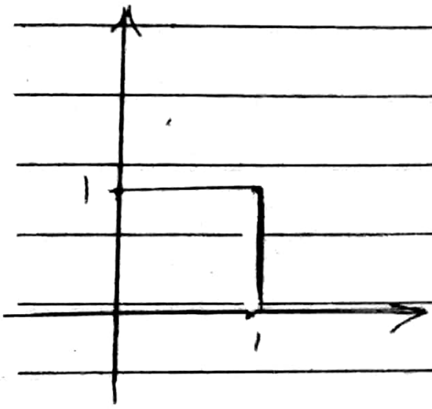
تمرين: هل $Fr(A_1 \times A_2) = Fr(A_1) \times Fr(A_2)$ ؟! برّر

الحل:

لنأخذ $A_1 = [0,1] = A_2$ عندئذٍ : $A_1 \times A_2$ هو المربع الموضح بالشكل وجبهته هي كامل محيطه



أما $Fr(A_1) = Fr(A_2) = \{0,1\}$

$\Rightarrow Fr(A_1) \times Fr(A_2) =$

$= \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$

$\Rightarrow Fr(A_1 \times A_2) \neq Fr(A_1) \times Fr(A_2)$

* * *

الزمر التبولوجية (الجمعية) والفضاء الطبيعي التبولوجي $(X, +, \tau)$

1. إذا كان V جواراً للصفر فإن $x_0 + V$ جواراً لـ x_0 مهما تكن $x_0 \in X$
2. إذا كان V جواراً للصفر فإن $-V$ جواراً للصفر
3. إذا كانت $A_1, A_2 \subseteq X$ مجموعتان متراصتان فإن $A_1 + A_2$ متراصة و $A_1 \cup A_2$ متراصة ولكن $A_1 \cap A_2$ ليست بالضرورة
4. $\forall U \in \mathcal{V}_0 ; \exists V \in \mathcal{V}_0$

$V + V = \{a+b : a \in V, b \in V\} \subseteq U$

سؤال: هل $(\mathbb{R}, +, \tau_{[a,b[})$ زمرة تبولوجية ؟؟ برّر

لا، ذلك لأن:

$[0,1[$ جواراً للصفر $V=$
إلا أن $V=[0,1[$ ليست جواراً للصفر

★ ★ ★

تمرين:
[4] كل فضاء متراص وهاوسدورف يكون فضاءً منتظماً.
الحل:
- يجب إثبات أنه فضاء T_1 و T_3.
بما أنه فضاء هاوسدورف فهو فضاء T_1، بقي إثبات أنه فضاء T_3
لتكن K مجموعة مغلقة غير خالية و $p \notin K$، بما أن الفضاء (X,T)
متراص و K مجموعة مغلقة فإن K مجموعة متراصة.
ليكن $x \in K$ فإن $p \neq x$ وبما أن X هاوسدورف، فإنه:

$$\exists U_x^{(p)} \in V_x \quad \exists U_p^{(x)} \in V_p : U_x^{(p)} \cap U_p^{(x)} = \phi$$

نلاحظ أن $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x^{(p)}$، أي $\{U_x^{(p)} : x \in K\}$

تغطية مفتوحة لـ K المتراصة ومنه توجد: $x_1, x_2, \dots, x_n$ من K
بحيث أن:

$$K \subseteq U_{x_1}^{(p)} \cup U_{x_2}^{(p)} \cup \dots \cup U_{x_n}^{(p)}$$

لنأخذ:

$$O_K = U_{x_1}^{(p)} \cup U_{x_2}^{(p)} \cup \dots \cup U_{x_n}^{(p)}$$

و

$$O_p = U_p^{(x_1)} \cap U_p^{(x_2)} \cap \dots \cap U_p^{(x_n)}$$

تحققان المراد.

★ ★ ★

(٦) كل فضاء متراص وهاوسدورف يكون فضاءً ناظمياً .

الحل :

لتكن F_1 و F_2 مجموعتين غير خاليتين مغلقتين وغير متقاطعتين من X المتراص فإن F_1 و F_2 مجموعتان متراصتان .

لأجل $x \in F_1$ (حسب ما سبق) يوجد جوار مفتوح θ_x لـ x وجوار مفتوح $\theta_{F_2}^{(x)}$ لـ F_2 بحيث أن :

$$\theta_x \cap \theta_{F_2}^{(x)} = \phi$$

نلاحظ أن $F_1 \subseteq \bigcup_{x \in F_1} \theta_x$ ، أي $\{\theta_x : x \in F_1\}$

تغطية مفتوحة لـ F_1 المتراصة ، ومنه يوجد $(x_i)_{i=1}^{n}$ من F_1 بحيث أن :

$$F_1 \subseteq \theta_{x_1} \cup \theta_{x_2} \cup \dots \cup \theta_{x_n}$$

لنأخذ :

$$\theta_{F_1} = \theta_{x_1} \cup \theta_{x_2} \cup \dots \cup \theta_{x_n} ,$$

$$\theta_{F_2} = \theta_{F_2}^{(x_1)} \cap \theta_{F_2}^{(x_2)} \cap \dots \cap \theta_{F_2}^{(x_n)}$$

تم المطلوب ...

انتهت المحاضرة الأخيرة .. ♡

إعداد

رشا رويعي

نذير تيناوي ☺