نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: التاسعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: المتسلسلات

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-مثال على متسلسلة متباعدة رغم أن حدها العام يسعى إلى الصفر.

٢-اثبات بعض المبرهنات.

٣-حل تمارين.

**مثال :** أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)i$ متباعدة

سنثبت أنها متباعدةً وحدها العام يسعى إلى الصفر

**توضيح:** لإثبات أن متتالية ما تسعى إلى $0$ أو $\infty$ يكفي أن نأخذ طويلة الحد العام :

- ولإثبات أنها تسعى إلى الصفر نثبت أن الطويلة تسعى إلى الصفر .
- ولإثبات أنها تسعى إلى $\infty$ نثبت أن الطويلة تسعى إلى $\infty$ .

**الحل:**

$$3_n=\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)i$$

$$|3_n|=\left|\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)i\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

( ما داخل الطويلة مقدار سالب فنقلب الإشارات , $|i|=1$)

$$\lim_{n\to\infty}|3_n|:\infty-\infty$$

عدم تعيين (لإزالته نضرب البسط والمقام بالمرافق الحقيقي)

$$\lim_{n\to\infty}|3_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0 \quad \Rightarrow \ \mathfrak{Z}_n \to 0$$

والآن سنثبت أنها متباعدة باستخدام التعريف ((متتالية المجاميع الجزئية) :

$$S_n = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \cdots + \mathfrak{Z}_n$$

$$S_n = \left[\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\right] i = i - \sqrt{n+1}\, i$$

$$S_n = \left(1-\sqrt{n+1}\right) i$$

$$|S_n| = \sqrt{n+1} - 1 \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \quad S_n \longrightarrow +\infty$$

$\Leftarrow$ $S_n$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) i$ متباعدة.

**مبرهنة:**

لتكن $\sum \mathfrak{Z}_n$ ، $\sum W_n$ متسلسلتان عقديتان ، ولنفرض وجود عدد $N_0 > max(n_0, n_1)$ بحيث يحقق المساواة : $\mathfrak{Z}_n = W_n \quad ; \forall n > N_0$

عندئذٍ للمتسلسلتين $\sum \mathfrak{Z}_n$ ، $\sum W_n$ الطبيعة ذاتها ((متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً))

**أي أن اختلاف متسلسلتين بعدد منته من الحدود لا يؤثر على طبيعتها .**

لنفرض أن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Z}_n$

$\{\sigma_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} W_n$

عندئذ $\forall n \in N_0$

$$S_n - \sigma_n = \underbrace{(\mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_1 + \cdots + \mathfrak{Z}_n) - (w_0 + W_1 + \cdots + W_n)}_{\text{A=عدد ثابت}} \ldots\ldots.*$$

$\sum \mathfrak{Z}_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ متقاربة $\underbrace{\Leftrightarrow}_{*\text{حسب}}$ $\{\sigma_n\}$متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum W_n$ متقاربة

- لاحظ أن:

$$. S_n = A + \sigma_n \quad \Leftarrow \quad \sigma_n \ . = S_n - A$$

- إن مجموع متسلسلتين متقاربتين هو متسلسلة متقاربة.

إن تقارب $\sum 3_n$ ⇔ تقارب $s_n$ ⇔ تقارب $\sigma_n$⇔ $\sum W_n$ متقاربة.

**مبرهنة :**

إذا كانت $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$ ،$\sum_{n=n_0}^{\infty} W_n$ متسلسلتين متقاربتين فإن متسلسلة المجموع لهما $\sum_{n=n0}^{\infty}(3_n + W_n)$ متقاربة وفي حال التقارب فإن $\sum_{n=n0}^{\infty}(3_n + W_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n + \sum W_n$ .

**الإثبات :**

لنفرض أن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$

$\{T_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} W_n$

$$v_n = (3_{n0} + w_{n0}) + (3_{n0+1} + w_{n0+1}) + \cdots + (3_n + w_n)$$

$$= (3_{n0} + 3_{n0+1} + 3_{n0+2} + \cdots + 3_n) + (w_{n0} + w_{n0+1} + w_{n0+2} + \cdots + w_n)$$

$$v_n = S_n + T_n \to S + T$$

⇐$\sum_{n=n0}^{\infty}(3_n + W_n)$ متقاربة ومجموعها يساوي $S + T$ .

$$\sum_{n=n0}^{\infty}(3_n + W_n) = \sum_{n=n0}^{\infty} 3_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} W_n$$

**والعكس في الحالة العامة غير صحيح :**

فقد تكون متسلسلة المجموع لمتسلسلتين متباعدتين متسلسلة متقاربة .

**مثال**: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ،$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$ كلاهما متسلسلة متباعدة حدها العام لا يسعى إلى الصفر إلا أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

وهي متسلسلة متقاربة .

**مبرهنة :** لتكن $\sum \mathfrak{z}_n$ متسلسلة عقدية ، $\lambda$ ثابت عقدي غير معدوم

$\sum \mathfrak{z}_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum(\lambda \mathfrak{z}_n)$ متقاربة .

وفي حال التقارب نستطيع أن نكتب $\sum(\lambda \mathfrak{z}_n) = \lambda \sum \mathfrak{z}_n$ .

**تمارين :**

$$(1)\quad \mathfrak{z}_n = \left\{\frac{e^{in}}{n}\right\}$$

$$e^{in} = \cos n + i\sin n$$

$$\mathfrak{z}_n = \left\{\frac{\cos n}{n} + i\frac{\sin n}{n}\right\}$$

$$\{x_n\} = \left\{\frac{\cos n}{n}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\{y_n\} = \left\{\frac{\sin n}{n}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{z}_n \to 0$$

$$(2)\quad \mathfrak{z}_n = \left\{1 + i\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$\{x_n\} = \{1\} \to 1$$

$$\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\} \to 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{z}_n \to 1$$

$$(3)\quad \mathfrak{z}_n = \left\{\frac{1}{n^2+1} + i\frac{2n-1}{n+1}\right\} \to 0 + 2i = 2i$$

$$(4)\quad \mathfrak{z}_n = \left\{n^2 + i\frac{n-1}{n+1}\right\}$$

إذاً متتالية الأجزاء الحقيقية $\{x_n\} = \{n^2\}$ هي متتالية متباعدة تسعى إلى $\infty$ وبالتالي $\infty \to \mathfrak{z}_n$ متباعدة.

$$(5) \quad \mathfrak{z}_n = \left\{\frac{n^7 + 2}{e^n} + i\,\frac{\ln n}{n}\right\}$$

إن $\frac{n^7+2}{e^n} \to 0$

لأن $e^n > n^7$

وأن $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

$$\Rightarrow \mathfrak{z}_n \to 0$$

$$(6) \quad \mathfrak{z}_n = \left\{n ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 2n + 1}i\right\}$$

$$\mathfrak{z}_n = \left\{ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 2n + 1}i\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Rightarrow \mathfrak{z}_n \to 1 + 3i$$

$$(7) \quad \mathfrak{z}_n = \left\{\frac{e^{in}}{e^n}\right\}$$

$$\mathfrak{z}_n = \left\{\left(\frac{e^i}{e}\right)^n\right\}$$

وهي متتالية هندسية أساسها $\frac{e^i}{e} \neq 1$

$$\left|\frac{e^i}{e}\right| = \frac{\sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

إذاً المتتالية متقاربة من الصفر لأن طويلة الأساس أصغر من الواحد ولا يساوي الواحد.

$$(8)\quad \mathfrak{Z}_n = \left\{\frac{3+in}{n+i2n}\right\}$$

نضرب بالمرافق لكي نفصل بين الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية .

$$\frac{(3+in)(n-i2n)}{|n+i2n|^2} = \frac{3n-6ni+in^2+2n^2}{\left(\sqrt{n^2+4n}\right)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{5n^2} + i\frac{n^2-6n}{5n^2} = \frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$$

**مبرهنة** كل متتالية متقاربة محدودة والعكس غير صحيح.

نريد إثبات أن $\forall\, n:\ |\mathfrak{Z}_n| < M$

**البرهان:** لتكن $\{\mathfrak{Z}_n\}$ متتالية متقاربة من عندئذٍ $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\exists N_1 \geq 0\ ; n \geq N_1\ ;\ |\mathfrak{Z}_n - a| < \varepsilon$$

$$|\mathfrak{Z}_n - a + a| \leq |\mathfrak{Z}_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| = l$$

$$r = |\mathfrak{Z}_1| + |\mathfrak{Z}_2| + \cdots + |\mathfrak{Z}_{N_1-1}| + 1$$

لنأخذ $max$ لِـ $r, l\ ;$

$$M = \max(r,l)$$

$$\Rightarrow\ |\mathfrak{Z}_n| < M \quad ; \forall\, n \geq N_1$$

$\Leftarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ متقاربتان

$\Leftarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ محدودتان (حسب مبرهنة سابقة )

$\Leftarrow$ $\{\mathfrak{Z}_n\}$ محدودة (حسب مبرهنة سابقة )

**انتهت المحاضرة**

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى