٢٠١٢-2018

نظري

◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: التاسعة عشر

◄ عنوان المحاضرة: المشتق من مراتب عليا

القيمة التقريبية للمشتق من مراتب عليا

يمكن إيجاد القيمة التقريبية للمشتقات من مراتب عليا (مرتبة ثانية – ثالثة)وذلك باستخدام قيم التابع عند نقاط مختلفة فمثلاً من اجل حساب قيمة مشتق التابع f من المرتبة الثانية ناخذ من منشور تايلور حتى المشتق من المرتبة الرابعة

الاستنتاج غير مطلوب ، فيكون القانون بالشكل التالي :

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\theta_x)]$$

القيمة التقريبية للمشتق $f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]$

الخطأ الأعظمي المرتب هو : $Emax=\left|\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\theta_x)]\right|$

مثال: أوجد المشتق من المرتبة الثانية للدّالة: $f(x)=e^{-x}sinx$ المعطاة عند نقطة $x_0=1.0$ علماً أنَّ: $h=0.5$.

الحل:

قانون المشتق من المرتبة الثانية يساوي

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\theta_x)]$$

فتكون القيمة التقريبية للمشتق من المرتبة الثانية هي

$$f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]$$

لدينا $x_0=1.0\ \ ,h=0.5$

$$f''(x_0)\approx\frac{1}{(0.5)^2}[f(1-0.5)-2f(1.0)+f(1+0.5)]$$

$$\approx\frac{1}{(0,5)^2}[f(0.5)-2f(1.0)+f(1.5)]$$

$$\approx \frac{1}{(0.5)^2}[(e^{-0.5}\,sin(0.5)) - 2(e^{-1.0}\,sin(1.0)) + (e^{-1.5}si\,n(1.5))]$$

$$\approx \frac{1}{(0.5)^2}[(0.2907862882) - 2(0.3095598757) + (0.2225712161)] \approx -0.4230489884$$

إيجاد الخطأ الأعظمي المرتكب هو:

$$E = \left|\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\theta)\right|$$

نوجد $f^{(4)}(\theta)$:

$$f(x) = e^{-x}\,.sin\,x$$

$$f'(x) = -e^{-x}\,.sin\,x + e^{-x}\,.cos\,x$$

$$f''(x) = e^{-x}\,.sin\,x - e^{-x}\,.cos\,x - e^{-x}\,.cos\,x - e^{-x}\,.sin\,x = -2e^{-x}\,.cos\,x$$

$$f'''(x) = 2e^{-x}\,.cos\,x + 2e^{-x}\,.sin\,x = 2e^{-x}(sin\,x + cos\,x)$$

$$\Rightarrow\ f^{(4)}(x) = -4e^{-x}sinx$$

ملاحظة : لإيجاد قيمة θ للمشتق يجب دراسة تغيرات الدالة وقد كانت دراسة تغيرات الدالة في مقررنا منذ البداية هي عبارة عن معرفة اذا كانت الدالة متزايدة ناخذ اعلى قيمة للمجال واذا كانت متناقصة ناخذ اصغر قيمة للمجال وهنا في مثالنا تصبح قيمة المشتق الرابع هي 1.3 وهذ القيمة اما الدكتورة تعطينا إياها في نص السؤال او تعطينا مجال لنوجدها منه .

$$\Rightarrow E_{max} \le \left|\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\theta)\right| \le \left|\frac{(0.5)^2}{12}(1.3)\right| \le 0.02768333333$$

التمرين الأول:

صيغة تقدمية لنقطتين $h = 1 - 0.5 = 0.5$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = \frac{1}{0.5}[6.80 - 3.65] = 6.3$$

صيغة تقدمية ل ٣ نقاط $h = 1.5 - 1 = 0.5$

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + h)]$$

$$= -\frac{1}{(2)(0.5)}[-3(3.65) + 4(6.80) - 9.90] = 6.35$$

Syria Math Team

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[f(x_0+h)-f(x_0)] = \frac{1}{1}[9.90-3.65] = 6.25$$

صيغة تقدمية لـ ٣ نقاط $[0.5-2]$

$$h = 2-0.5 = 1.5$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[f(x_0+h)+f(x_0)]$$

$$= \frac{1}{1.5}[12.15-3.65] = 5.667$$

التمرين الثاني:

صيغة تقدمية لنقطتين $h = 0.8-0.7 = 0.1$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{0.1}\big(f(0.8)-f(0.7)\big) = 10(2.5399-2.13375) = 4.0585$$

الصيغة التراجعية لنقطتين $h = 0.7-0.5 = 0.2$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{0.2}(2.13375-1.64872) = 2.42515$$

التمرين الثالث:

تقدمية لـ ٣ نقاط $h = 0.5-0 = 1-0.5 = 0.5$

عند $x_0 = 0$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0-h)-f(x_0+h)] = 0.8765$$

عند $x_0 = 0.5$

مركزية ثلاث نقاط:

Syria Math Team

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0-h)+f(x_0+h)] \approx 2.7183$$

عند $x_0 = 1$

تراجعية ثلاث نقاط

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0-2h)+4f(x_0-h)+3f(x_0)] \approx 4.5601$$

انتهت المحاضرة

إعداد: دعاء الرحيل – مرح غريب – ماريا عيد

Syria Math Team