مبرهنة:

إذا كان $f$ تطبيقاً مستمراً للفضاء المترابط $(X,\tau)$ في الفضاء $(Y,\tau')$ فإن $f(X)$ مجموعة جزئية مترابطة في $(Y,\tau')$ وهذا يكافئ أنه إذا كان

$$f:(X,\tau) \xrightarrow{\text{غامر}} (Y,\tau') \text{ : مستمر}$$

و $(X,\tau)$ مترابط فإن $(Y,\tau')$ مترابط

البرهان:

لنفرض مؤقتاً أن $(Y,\tau')$ غير مترابط، بالتالي توجد مفتوحتان $A,B \in \tau'$ تحققان ما يلي:

$A \neq \phi$ $\qquad$ $B \neq \phi$

$A \cap B = \phi$ $\qquad$ $A \cup B = Y$

ولنضع $A_1 = f^{-1}(A) \subseteq X$ و $B_1 = f^{-1}(B) \subseteq X$

إن $A_1$ مفتوحة لأن $f$ مستمر (الصورة العكسية لمجموعة مفتوحة وفق تطبيق مستمر هي مجموعة مفتوحة)

و $A_1$ غير خالية (لأن $f$ غامر)

وكذلك $B_1$

$$A_1 \cap B_1 = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

$$A_1 \cup B_1 = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(Y) = X$$

فينتج عن ذلك أن $(X,\tau)$ غير مترابط وهذا خلف فالفرض المؤقت مرفوض

**ملاحظة:**

سنقبل أن صورة أي مترابطة هي مترابطة.

**تمرين:**

استناداً للتعريف أثبت أن $\mathbb{R}$ مترابط

**الحل:**

يكون الفضاء $(X,\tau)$ مترابطاً إذا وفقط إذا كان لا يوجد مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن معاً سوى $X$ و $\phi$

لنفرض مؤقتاً أن $A \subseteq \mathbb{R}$ و $\phi \neq A \neq \mathbb{R}$

و $A$ مغلقة ومفتوحة في آن معاً

لما أن $A \neq \phi \Longrightarrow A^c \neq \phi$

$\Longrightarrow \exists \alpha \in A^c$

ولنأخذ المجالات $]-\infty,\alpha[$ و $[\alpha,+\infty[$

لنأخذ المجموعات:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = ]-\infty,\alpha[ \cap A \\ A_2 = [\alpha,+\infty[ \cap A \end{array}\right\} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 = A$$

وهذا يعني أن إحداهما على الأقل غير خالية ولتكن $A_2 \neq \phi$

إن $A_2 = [\alpha,\infty[ \cap A$ — ★ مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$

وسنكتبها بالشكل $A_2 = ]\alpha,\infty[ \cap A$ — ★★

((الحذف $\alpha$ أو ضمها لا يؤثر هنا لأن $a \in A^c$ أي ليست موجودة في $A$))

إن ★★ تظهر أن $A_2$ مفتوحة

$\Longleftarrow A_2$ مفتوحة ومغلقة في آن معاً

وإنها محدودة من الأعلى.

وبالتأكيد $\sup A_2 = \gamma$ موجود وأن

$\gamma \in A_1$ و $\gamma \notin A_2$

لأنها مفتوحة لأنها مغلقة

$\Leftarrow$ هذا خلف

- الآن نلاحظ أن المجال المغلق $K=[-1,1]$ مترابط

ذلك $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$

$x \mapsto \sin x$

مستمر وغامر و $\mathbb{R}$ مترابط $\Leftarrow$ $K=[-1,1]$ مترابط

وكذلك $L=[0,\infty[$ يوجد

$f:\mathbb{R}\to[0,\infty[$

$x\mapsto x^2$

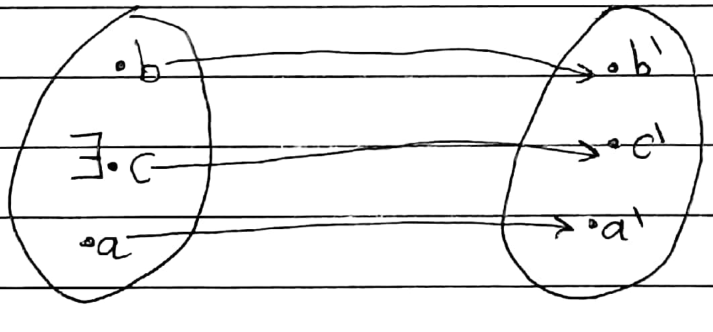
مستمر وغامر و $\mathbb{R}$ مترابط $\Leftarrow$ $L$ مترابط

مبرهنة: ليكن $(X,\tau)$ فضاء تبولوجي مترابط و

$f:(X,\tau)\to\mathbb{R}$ مستمر

و $f(a),f(b)\in\mathbb{R}$ بحيث $f(a)\neq f(b)$ حيث $a,b\in X$

عندئذ: $\exists c\in X$ : $\boxed{a'=f(a)<c'=f(c)<f(b)=b'}$




مبرهنة:

ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً و $Y\subseteq X$

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون $Y$ مترابطة في $X$

هو ألا يوجد فصل لـ $Y$ في $X$

~~مبرهنة: ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً ولتكن $Z$ و $X$ مجموعتين جزئيتين من $X$ بحيث يكون $Z \subseteq Y \subseteq X$~~

مبرهنة: ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً ولتكن $S$ مجموعة جزئية متصلة مترابطة في $X$ فإذا كانت $Y$ مجموعة جزئية من $X$ وتحقق الشرط $S \subseteq Y \subseteq \bar{S}$ فإن $Y$ مترابطة في $X$.

نتيجة: إذا حوى فضاء $(X,\tau)$ مجموعة متصلة (مترابطة) وكثيفة في $X$، فإن $(X,\tau)$ فضاء متصل.

مبرهنة: ليكن $(X,\tau)$ فضاءً تبولوجياً، ولتكن $\{Y_i\}_{i\in I}$ جماعة من المجموعات الجزئية المتصلة في $X$ بحيث $\bigcap Y_i \neq \phi$ عندئذٍ تكون $Y = \bigcup Y_i$ مجموعة جزئية متصلة في $X$.

أي: إذا كان لدينا $A_1, A_2$ مجموعتين مترابطتين

$A_1 \cap A_2 = \phi \Rightarrow A_1 \cup A_2$ ليست مترابطة

$A_1 \cap A_2 \neq \phi \Rightarrow A_1 \cup A_2$ مترابطة

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جداء جماعة غير خالية ومنتهية من الفضاءات التبولوجية متصلاً هو أن يكون كل من مركبات الجداء فضاءً متصلاً.

الترابط الموضعي:

يقال عن فضاء تبولوجي $(X,\tau)$ إنه فضاء مترابط موضعياً في نقطة $x$، إذا وجد لكل جوار $U$ للنقطة $x$ جوار مترابط $V$ للنقطة $x$ محتوى في $U$.

وإذا كان $(X, \tau)$ مترابط موضعياً في كل نقطة من نقاطه فإننا نسميه مترابطاً موضعياً.

ونقول عن مجموعة $Y \subseteq X$ إنها مترابطة موضعياً إذا كان الفضاء $(Y, \tau_Y)$ مترابطاً موضعياً.

مثال: كل فضاء متقطع يكون مترابطاً موضعياً وغير مترابط.

ملاحظة: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ فضاء مترابط ومترابط موضعياً.

مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (مبرهنة التقليص):

ليكن $(X, d)$ فضاءً مترياً، حيث $X \neq \phi$

إذا كان $(X, d)$ تاماً وكان التطبيق $T:(X,d) \longrightarrow (X,d)$ تقليصاً على $X$ فإنه توجد لـ $T$ نقطة ثابتة واحدة بالضبط

التقليص: ليكن $(X, d)$ فضاءً مترياً يدعى التطبيق $T:(X,d) \longrightarrow (X,d)$ تقليصاً على $X$ إذا وجد عدد حقيقي موجب $\alpha$ وأصغر تماماً من الواحد بحيث أنه إذا كان $x, y \in X$ فإن:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

النقطة الثابتة:

النقطة الثابتة لتطبيق $T: X \longrightarrow X$ هي نقطة $x \in X$ تكون صورتها وفق التطبيق النقطة $x$ ذاتها (بمعنى أن $x$ «تبقى ثابتة» وفق $T$) أي أنّ: $Tx = x$

الأمر الذي يعني بأن الصورة $Tx$ تتطابق والعنصر $x$

مبرهنة بير: ليكن $(X, d)$ فضاءً مترياً تاماً حيث $X \neq \phi$

إذا كانت $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية من المجموعات المفتوحة الكثيفة في $X$، فإن تقاطعها $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ (ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة) مجموعة كثيفة في $X$.

END