19-11-2018

نظري

◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: السابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التكامل العددي

التكامل العددي

شبه المنحرف

$$I(f)=\frac{h}{2}(y_0+y_1)$$
$$h=b-a>0$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$
$$[a,b]\ ,\ [x_0,x_1]$$

سمبسون

$$I(f)=\frac{h}{2}(y_0+4y_0+y_0)$$
$$E(I)=\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$
$$h=\frac{b-a}{2}>0$$

مجال كبير ⇐ مقدار الخطأ كبير، يقسم المجال إلى مجالات جزئية وكل مجال يوجد له مقدار خطأ

شبه المنحرف المركب

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x).dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\approx\frac{h}{2}[y_0+y_1]+\frac{h}{2}[y_1+y_2]+\cdots+\frac{h}{2}[y_{n-1}+y_n]$$
$$\approx\frac{h}{2}[y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n]$$

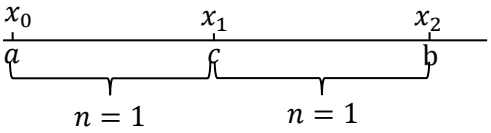
ومنه اصبح قانون التكامل من الشكل :

$$I(f)\approx\frac{h}{2}[y_0+2y_1+\cdots+2y_{n-1}+y_n]$$
$$h=\frac{b-a}{n}\qquad \text{و}\qquad x_i=a+h_i$$

$$E_I = \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi)$$

حيث n هو عدد المجالات.

$n = 2$



$$x_i = a + (i * h) \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

ملاحظات:

- حيث h هو طول المجال.
- يمكن لـ n أن تكون صغيرة لكن من المستحيل أن تكون ذات قيمة سالبة.
- لا يجب الخروج خارج حدود التكامل.
- y_i نوجدها من $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

طريقة سمبسون المركبة:

تعتمد هذه الطريقة على استبدال الدالة بحدودية من الدرجة الثانية :

$$I(f) \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

حيث : $h = \frac{b-a}{2}$

قانون الخطأ $E(I) = \left|\frac{h^4}{180} . f^{(4)}(\xi)\right|$

يستخدم هذا القانون لإيجاد الخطأ

مثال: احسب تكامل $I = \int_0^2 e^x\,dx$ بطريقة شبه المنحرف حيث $n = 8$.

$$I(f) \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_1)$$
$$h = b - a = 2 - 0 = 2$$
$$I(f) = \frac{2}{2}(1 + 7.38906)$$
$$I(f) = 8.38906$$

i	x	$f(x)$
0	0	1
1	0.25	1.28403
2	0.50	1.64872
3	0.75	2.117
4	1	2.71828
5	1.25	3.49034
6	1.50	4.48169
7	1.75	5.75460
8	2	7.38906

Syria Math Team

- طريقة سمبسون:

$$I(f)=\frac{h}{2}(y_0+4y_1+y_2)$$
$$h=\frac{b-a}{2}=\frac{2-0}{2}=1$$
$$I(f)=\frac{1}{3}(1+4(2.71828)+7.38906)$$
$$=6.42073$$

- شبه المنحرف المركب:

حيث $n=8$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{8}=\frac{1}{4}$$

$$I(f)\approx\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_7+y_8)$$
$$\approx 6.4224575$$

طريقة سمبسون المركبة:

$$I(f)\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+\cdots+4y_7+y_8)$$
$$\approx 6.3891933$$

$$f(x)=e^x\ ,\quad f'(x)=e^x\ ,\quad f''(x)=e^x\ ,\quad f'''(x)=e^x\ ,\quad f^{(4)}=e^x$$

شبه المنحرف:

$$E(I)=\frac{h^3}{12}f^{(4)}(\xi)=\frac{2^3}{12}e^2=4.926037399$$

شبه المنحرف المركب:

Syria Math Team

$$E(I)=\frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi)=\frac{(0.25)^2(2-0)}{12}e^2=0.0769693344$$

طريقة سمبسون:

$$E(I)=\frac{h^5}{90}f^4(\xi)=\frac{1}{90}e^2=0.08210062332$$

طريقة سمبسون المركبة:

$$E(I)=\frac{h^4(b-a)}{180}f^4(\xi)=\frac{(0.25)^4(2)^2}{180}e^2=0.3207055598\times10^{-3}$$

مثال: $I=\int_{0.25}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

طريقة شبه المنحرف:

$$I(f)\approx\frac{h}{2}(y_0+y_1)$$
$$h=b-a=4-0.25=3.75$$
$$I(f)=\frac{3.75}{2}(2+0.5)$$
$$I(f)\approx4.6875$$

طريقة سمبسون:

$$I(f)=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$
$$h=\frac{b-a}{2}=\frac{4-0.25}{2}=1.875$$
$$I(f)=\frac{1.875}{3}[2+4(0.6859943)+0.5]$$
$$\approx3.2774858$$

شبه المنحرف المركبة: $n=4$.

Syria Math Team

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0.25}{4} = 0.9375$$

$$I(f) \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4)$$

$$\approx 3.2110178$$

x_i	y_i
0.25	2
1.1875	0.9176629
2.125	0.6859943
3.0625	0.5714285
4	0.5

طريقة سمبسون المركبة:

$$I(f) \approx 3.0713607$$

Syria Math Team

إعداد: دعاء الرحيل & مرح غريب & ماريا عيد