نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: السادسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التشاكلات الزمرية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

نبدأ في هذه المحاضرة بالفصل السادس من مقرر البنى الجبرية لعنوان التشاكلات الزمرية ومبرهنات التماثل ...

إن مصطلح التشاكل أتى من الكلمة الأغريقية($homo$)وتعني يشبه وكلمة $(morphe)$ وتعني شكلا أو صيغة وجبر يعني مصطلح التشاكل البنى المتشابهة

التشاكل بين الزمر هو تطبيق يحفظ لنا العملية المعرفة على الزمرة .

تعريف : لتكن G, G' زمرتين نسمي كل تطبيق $f : G \to G'$ تشاكل زمري($(homomorphism)$)

إذا حقق الشرط : $\forall x, y \in G ; f(x . y) = f(x)f(y)$

حيث الجداء $f(x . y)$ معرف على G و $f(x).f(y)$ معرف على G'

تعريف : ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري نسمي المجموعه التالية

$ker(f) = \{x : x \epsilon G \;\; ; \;\; f(x) = e'\}$ بنواة التشاكل الزمري f

مبرهنة : ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري عندئذ :

١) $f(e) = e'$

٢) $\forall a \epsilon G, \forall \; n \epsilon Z \; ; \; f(a^n) = (f(a))^n$

٣) لأجل كل $a \epsilon G$ فإن : $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

٤) $ker(f)$ هي زمرة جزئية ناظمية في G.

الاثبات :

١) لدينا $e.e=e$

نأخذ صورة مباشرة للجداء $f(e.e)=\quad f(e)=f(e).\underbrace{f(e)}_{\epsilon\, G'}$

سنضرب بـ $\left(f(e)\right)^{-1}$ للطرفين $\left(f(e)\right)^{-1}.f(e)=\left(f(e)\right)^{-1}.f(e).f(e)$

$$e'=e'.f(e)\ \Rightarrow e'=f(e)$$

٢) ليكن $a\in G\ ,\ n\in Z$ عندئذ :

$$f(a^n)=f(\underbrace{a.a.\dots\dots.a}_{n\ \text{مرة}})$$

$$f(a).f(a)\dots\dots.f(a)=\left(f(a)\right)^n$$

٣) $a\ \epsilon\ G$ عندئذ $a.a^{-1}=e$ فإن :

$$f(a.a^{-1})=f(e)=e'\ \Rightarrow f(a).f(a^{-1})=e'$$

نضرب بمقلوب $f(a)$ نجد :

$$\underbrace{\left(f(a)\right)^{-1}.f(a)}_{\text{محايد}}.f(a^{-1})=\left(f(a)\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow f(a^{-1})=\left(f(a)\right)^{-1}$$

٤) ان النواه حسب تعريفها هي :

$$ker\,f\ =\{x:\ x\ \epsilon\ G\quad ;\ f(x)=e'\}$$

ومن خلال التعريف ينتج أن $\emptyset\ \neq ker\,f\ \subseteq G$ لأن $f(e)=\ e'\Rightarrow e\ \epsilon\ ker\,f$

لإثبات أنها زمرة جزئية :

ليكن $x,y\ \epsilon\ ker\,f$ عندئذ حسب تعريف النواة $f(x)=\ e'\quad ,\ f(y)=\ e'$

$$e'=\left(f(y)\right)^{-1}=\ f(y^{-1})$$

$$=\ f(x.y^{-1})=f(x).f(y^{-1})$$

$$=e'.e'=e'\quad\Rightarrow x.y^{-1}\epsilon\ ker\,f$$

ومنه $ker\,f$ زمرة جزئية في G.

لنثبت أنها ناظمية :

ليكن $g \epsilon G$ ولنبرهن أن $g.ker\, f\ .g^{-1} \subseteq ker\, f$

وأنه ليكن $z \epsilon g.ker\, f\ .g^{-1}$ عندئذ يوجد $a \epsilon ker\, f$ بحيث :

$$z = g.a.g^{-1}$$

نأخذ الصورة المباشرة $f(z) = f(g.a.g^{-1}) = f(g).f(a).f(g^{-1})$

$$= f(g).(f(g))^{-1} = e'$$

وهذا يبين أن $z \epsilon\ ker\, f$ ومنه $g.ker\, f\ .g^{-1} \subseteq ker\, f$

ومنه $ker\, f$ زمرة جزئية ناظمية في G .

مبرهنة : ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري عندئذ :

١) إذا كانت H زمرة جزئية في G فان $f(H) = \{f(h) \quad ; \quad h \in H\}$ تشكل زمرة جزئية في G'

٢) إذا كانت K زمرة جزئية في G' فإن $f^{-1}(K) = \{x : x \ \in G \ ; f(x) \in K\}$ زمرة جزئيةفي G .

٣) f متباين $\Leftrightarrow ker(f) = \{e\}$.

الاثبات :

١) لنفرض أن H زمرة جزئية في G

عندئذ $e \in H$ وان $\grave{e} = f(e) \in f(H)$ ومنه :

$$\emptyset \neq f(H) \subseteq \ G'$$

ليكن $x , y \epsilon f(H)$ عندئذ يوجد $h_1, h_2 \in H$

بحيث : $x = f(h_1)\ ,\ y = f(h_2)$ ومنه: $x.y^{-1} = f(h_1).(f(h_2))^{-1}$

$$= f(h_1)\ f(h_2^{-1}) = f(h_1\ h_2^{-1}) = f(\mathrm{h})$$

وهذا يبين أن $f(H)$ زمرة جزئية في G' .

٢) لنفرض أن K جزئية في G' عندئذ $f(e) = e' \in K$

ومنه فإن $e \in f^{-1}(K)$ وهكذا فإن $\emptyset \neq f^{-1}(K) \subseteq G$ (الصورة العكسية لـ K مجموعة جزئية في G غير خالية)

ليكن $x , y \in f^{-1}(K)$ عندئذ: $x , y \in G$ وأن $f(x), f(y) \in K$

لما كان $x . y^{-1} \in G$ وان $f(x . y^{-1}) = f(x). f(y^{-1})$

$$= f(x). \big(f(y)\big)^{-1} \in K$$

وبالتالي فإن $x\ y^{-1} \in f^{-1}(K)$ وهكذا فإن $f^{-1}(k)$ زمرة جزئية في G

٣) " $\Leftarrow$ " لنفرض أن $ker(f) = \{e\}$ وليكن $x , y \in G$ بحيث $f(x) = f(y)$

$$f(x). \big(f(y)\big)^{-1} = e' \ (\text{تشاكل } f)$$

$$f(x) f(y^{-1}) = e' \Longrightarrow f(x. y^{-1}) = e'$$

ومنه $x. y^{-1} \in Ker(f) = \{e\}$ ومنه فإن $x. y^{-1} = e \Longrightarrow x = y$

أي أن التشاكل f مباين

" $\Longrightarrow$ "لنفرض أن f متباين وليكن $z \in Ker\ (f)$ عندئذ $f(z) = e' = f(e)$

ولما كان f متباين نجد أن $z = e$ ومنه فإن $Ker\ f = \{e\}$

تعريف :

ليكن G , G' زمرتين و ليكن $f : G \to G'$ تطبيق ان f تشاكل ((Homomorphism))

- إذا كان f شاكل ومتباين نسمي f مونومورفيزم ((Monomorphism))
- إذا كان f شاكل و غامر نسمي f ابيومورفيزم ((Epomorphism))
- إذا كان f تشاكل و تقابل (تماثل) نسمي f ايزومورفيزم ((Isomorphism))
- إذا كان تشاكل و $G = G'$ نسمي f إندومورفيزم ((Endomorphism))
- إذا كان f تشاكل و تقابل و $G = G'$ نسمي f أتومورفيزم ((Automorphism))

تعريف : ليكن G , G' زمرتين اختياريتين و $f : G \to G'$ تشاكلا زمريا نقول عن f إنه تماثل إذا كان متباين وغامر ونقول عن الزمرتين G , G' أنهما متماثلتان إذا وجد بينهما تماثل وتعبر عن ذلك بالرمز $G \cong G'$

مبرهنة : لتكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري حيث G , G' زمرتين اختياريتين ولتكن KوH زمر جزئية في G عندئذ :

١) إذا كانت H دوارة فإن $f(H)$ دوارة .
٢) إذا كانت H تبديلية فإن $f(H)$ تبديلية .
٣) إذا كانت H ناظمية في G فإن $f(H)$ ناظمية في $f(G)$.
٤) إذا كانت K ناظمية في G' فإن $f^{-1}(k)$ ناظميه فيG

الاثبات :

١) لنفرض أن $a \in H \quad ; \quad H =< a >$
لنثبت أن $f(H) =< f(a) >$

بما أن :

$$a \in H \implies f(a) \in f(H)$$

وبالتالي$< f(a) > \subseteq f(H)$ ليكن $y \in f(H)$ عندئذ $y = f(x)$ حيث $x \in H$ ومنه $x = a^n$ حيث $n \in Z$ فإن :

$$y = f(x) = f(a^n) = [\ f(a)]^{\,n} \in < f(a) >$$

أي أن $f(H) \subseteq < f(a) >$ مما سبق نجد أن $f(H) = < f(a) >$ومنه $f(H)$ دوارة .

٢) بما أن H تبديلية فإن $\forall\, x, y \in H \ : x.y = y.x$

$$\exists a \ , b \ \in f(H)$$

حيث : $f(y) = b$ و $f(x) = a$

ولأن f تشاكل :

$$f(x).f(y) = f(x.y)$$

ولأن H تبديلية :

$f(x).f(y) = f(x.y) = f(y.x) = f(y).f(x)$ ومنه $f(H)$ تبديلية

٣) لنفرض أن الزمرة H ناظمية في G عندئذ $yHy^{-1} \subseteq H$ وذلك أيا كان $y \in G$

ليكن $a \in f(H)$, $x \in f(G)$ عندئذ $x = f(y)$, $a = f(h)$ حيث $y \in G$ و $h \in H$

ومنه فإن $yhy^{-1} \in H$ وبالتالي $f(yhy^{-1}) = f(y)f(h)[f(y)]^{-1}$

$= xax^{-1} \in f(H)$

وهكذا فإنه أيا كان $x \in f(G)$ ينج أن $x f(H)x^{-1} \subseteq f(H)$

وبالتالي الزمرة الجزئية $f(H)$ ناظمية في $f(G)$

٤)لنفرض أن K ناظمية في G' ولنبرهن على أن $f^{-1}(k)$ ناظميه في G

$$\forall g \in G; \ g.f^{-1}(K).g^{-1} \subseteq f^{-1}(K)$$

وليكن $x \in g.f^{-1}(k).g^{-1}$ عندئذ يوجد $y \in f^{-1}(K)$ حيث $x = g.y.g^{-1} \in G$

و $f(g)f(y)(f(g))^{-1} \in K$ وأن :

$$f(x) = f(g\,.\,y\,.\,g^{-1}) = f(g)f(y)f(g^{-1})$$

$$= \underbrace{f(g)}_{\in G'} \,.\, \underbrace{f(y)}_{\in K} \,.\, (f(g))^{-1}$$

طالما K ناظمية في G' و هذا يبين أن $x \in f^{-1}(K) \Longleftarrow f(x) \in K$

وبالتالي الزمرة $f^{-1}(K)$ ناظمية في G

مبرهنة : كل زمرة جزئية ناظمية في هي نواة لتشاكل زمري غامر .

الاثبات :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ G/H معرفة وهي زمرة الخارج ولنعرف العلاقة f .

$$f : G \to \frac{G}{H}$$

$$\forall a \in G \ : \ f(a) = aH$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه إذا كان $\forall \ a,b \in G \ : \ a = b \Longrightarrow aH = bH$

كما أن f تشاكل لأنه حسب التعريف: $f(a.b) = (a.b)H = (aH).(bH) = f(a).f(b)$

إن f غامر لأنه لأجل $d.H \epsilon G/H$ حيث $d \epsilon G$ ومنه $f(d) = d.H$

اثبتنا انه تشاكل زمري غامر بقي ان نثبت أن H نواة أي لنبرهن أن $H = \ker f$

ليكن $x \epsilon \ker f$ عندئذ $x \epsilon G$ حيث $f(x) = x.H = H$(المحايد) $\Leftarrow$

$x \epsilon \ker f$ لأن $x.H = H$ ومنه $x \epsilon H$ أي أن :

$$\ker(f) \subseteq H$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \epsilon H$ وطالما H زمرة جزئية في G فإن $y \epsilon G$ أي أن y ينتمي للمنطلق فنأخذ الصورة المباشرة له .

$$f(y) = \underbrace{y}_{y \epsilon H} .H = \underbrace{H}_{\text{محايد المستقر}}$$

وهذا يبين أن $y \epsilon \ker f$ ومنه $H \subseteq \ker f$

ومنه نجد :

$$\ker(f) = H$$

تعريف : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G

نسمي التشاكل $f : G \longrightarrow \frac{G}{H}$ المعرف بالشكل $\forall g \in G ; f(g) = gH$

التشاكل القانوني الغامر

- طالما لدينا زمرة جزئية ناظمية فإن هذا الشاكل موجود .
- كل تشاكل يقابله زمرة جزئية ناظمية .

انتهت المحاضرة

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي