-12-٢٠١٨

نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة : العشرون ◄ عنوان المحاضرة: تقارب المتسلسلات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-مبرهنة تعطي الشرط الازم والكافي لتقارب متسلسلة عقدية.

٢-التقارب بإطلاق.

٣-المتسلسلة الهندسية العقدية.

٤-أمثلة.

عرفنا في المحاضرات السابقة تقارب متسلسلة عقدية ، كما يعرف تقارب متسلسلة حقيقية عندما تكون متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة وأن نهاية متتالية المجاميع الجزئية هي مجموع المتسلسلة وقمنا بدراسة عدة خواص ومبرهنات على المتسلسلات.

مبرهنة تعطي شرط لازم و كافي لتقارب متسلسلة عقدية:

مبرهنة(١):

تكون متسلسلة عقدية $\sum 3_n$ متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists N_\varepsilon \geq 0 : \forall\, m > n \geq N \Longrightarrow |3_{n+1} + \cdots + 3_m| < \varepsilon$$

الاثبات :

بفرض أن $\sum 3_n$ متسلسلة عقدية متقاربة ولتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum 3_n$ عندئذ:

تعريفاً

$\sum 3_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \{S_n\}$ متقاربة $\Leftrightarrow \{S_n\}$كوشية $\Leftrightarrow$ تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N(\varepsilon) \geq 0\ ;\ \forall\, m > n \geq N(\varepsilon) : |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |+3_{n+1} + \cdots + 3_m| < \varepsilon$$

توضيح:

$$S_m = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + \cdots + 3_n + 3_{n+1} + \cdots + 3_m$$

$$S_n = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + \cdots + 3_n$$

بالطرح نجد

$$S_m - S_n = 3_{n+1} + \cdots + 3_m$$

مبرهنة(٢):

تكون المتسلسلة العقدية $\sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\,y_n)$ متقاربة ومجموعها S إذا وفقط إذا كانت متسلسلتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية لها متقاربة أي بصياغة أخرى :

$$\begin{pmatrix} Re\ s \text{ متقاربة و مجموعها } \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \\ Im\ s \text{ متقاربة و مجموعها } \sum_{n=n_0}^{\infty} y_n \end{pmatrix}$$

الاثبات:

لتكن $\{\sigma_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\,y_n)$

ولتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$

ولتكن $\{T_n\}$متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ عندئذ:

$$\sigma_n = (x_{n_0} + i\,y_{n_0}) + \cdots + (x_n + iy_n)$$

$$= (x_{n_0} + \cdots + x_n) + i\,(y_{n_0} + \cdots + y_n)$$

$$= S_n + i\,T_n$$

نأخذ نهاية الطرفين : $\sigma = S + iT$

أمثلة :

Syria Math Team

ادرس تقارب المتسلسلات التالية :

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\,\frac{n}{n^3+3}\right)$$

إن هذه المتسلسلة متباعدة لأن متسلسلة الأجزاء الحقيقية لها هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة

تذكرة

- $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متباعدة إذا كانت $P\leq 1$ ومتقاربة إذا كانت $P>1$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة ولكن حدها العام متتالية متقاربة من الصفر .

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+i\frac{n}{n^3+1}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:متقاربة لأنها متسلسلة ريمانية $P=2>1$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+3}$:متقاربة لأن حدها العام متتالية كسرية درجة مقامها أكبر من درجة بسطها بأكثر من واحد.

$\Leftarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+i\frac{n}{n^3+1}\right)\right.$: متقاربة لأن كلاً من $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+3}$ متقاربتين.

تمرين : أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+i\,\frac{1}{n!}\right)$ متقاربة ثم أوجد مجموعها.

إن متسلسلة الأجزاء الحقيقية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة ومجموعها

$$S_1=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

ومتسلسلة الأجزاء التخيلية لها $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

نعلم أن:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

نعوض $x = 1$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

فالمتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + i\ \frac{1}{n!}\right)$ متقاربة ومجموعها يساوي $(1 + ie)$

التقارب بالإطلاق

نقول عن $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$ أنها متقاربة بإطلاق إذا كانت متسلسلة الطويلات لها متقاربة ($\sum_{n=n_0}^{\infty}|3_n|$ متقاربة)

مثال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$ متسلسلة متقاربة بإطلاق لأن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\substack{\text{متقاربة لأنها ريمانية} \\ p=2>1}}$$

مبرهنة : $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$متقاربة بالإطلاق$\Leftarrow\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$ متقاربة

الإثبات

$$\sum 3_n \text{ متقاربة بإطلاق } \overset{\text{تعريفاً}}{\Leftrightarrow} \sum|3_n| \text{ متقاربة}$$

Syria Math Team

$$\forall\,\varepsilon>0\;;\;\exists\,N>0\;;\forall\,m>n\geq N:\;|3_{n+1}|+\cdots+|3_m|<\varepsilon$$

بالتالي :

$$|3_{n+1}+3_{n+2}+\cdots+3_m|\leq|3_{n+1}|+\cdots+|3_m|<\varepsilon$$

$\Leftarrow \sum 3_n$ متقاربة

ملاحظة ◄ $p=2>1$

العكس للمبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة أي قد توجد متسلسلة متقاربة وليست متقاربة بإطلاق نسمي مثل هذه المتسلسلة متسلسلة متقاربة شرطياً

تمرين: أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ متقاربة شرطياً .

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=i-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{i}{5}-\frac{1}{6}-\frac{i}{7}+\cdots$$

الأن سوف نجزأها إلى متسلسلتين حقيقية و تخيلية لأثبات إنها متقاربة

مثال $i=(0+i)\quad,\quad -\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}+0i\right)$

بالتالي تصبح :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{in\pi}{2}}}{n}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$$

$$=(0+i)+\left(-\frac{1}{2}+0i\right)+\left(0-\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{4}+0i\right)+\left(0+\frac{1}{5}i\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{6}+0i\right)+\left(0-\frac{1}{7}i\right)+\cdots$$

إن متسلسلة الأجزاء الحقيقية لـ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ هي :

Syria Math Team

$$0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+0-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

وهي متقاربة (وذلك حسب ليبنز متناوبة وحدها العام بالقيمة المطلقة متتالية متناقصة وتسعى إلى الصفر)

وكذلك فإن متسلسلة الأجزاء التخيلية لـ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ هي :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

وهي متقاربة أيضاً حسب ليبنز

$$\sum\frac{i^n}{n}\Leftarrow \text{متقاربة}\Leftarrow \sum\frac{i^n}{n} \text{ متقاربة شرطيا}$$

المتسلسلة الهندسية العقدية

هي متسلسلة عقدية حدها العام متتالية من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}(ba^n)$

a أساس المتسلسلة و b حدها الأول لدراسة تقاربها **نميز حالتين:**

$a=1$ ♥

$$S_n=b+b+\cdots+b\to\infty$$

♥$a\neq 1$ نميز الحالات التالية :

١- $|a|=1$

$$|3_n|=|ba^n|=|b||a^n|=|b|\longrightarrow |b|\neq 0$$

ومنه $3_n \not\to 0$ وهي متباعدة (حسب اختبار الحد العام)

٢- $|a|\neq 1$

$$S_n=b+ba+\cdots+ba^n \quad (١)$$
$$aS_n=ab+\cdots+ba^n+ba^{n+1} \quad (٢)$$

بطرح (٢) من (١)

$$(1-a)S_n=b-ba^{n+1} \qquad :a\neq 1$$
$$\longrightarrow S_n=\frac{b}{1-a}(1-a^{n+1})$$

وهنا نميز حالتين :

أ- $|a| > 1$

$$a^{n+1} \longrightarrow \infty \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{و المتسلسلة متباعدة}} S_n \longrightarrow \infty$$

ب - $|a| < 1$

$$a^{n+1} \longrightarrow 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{و المتسلسلة متقاربة}} S_n \longrightarrow \frac{b}{1-a}$$

المتسلسلة متقاربة أي : $\sum_{n=0}^{\infty} ba^n = \frac{b}{1-a}$

- **النتيجة:**

بفرض لدينا المتسلسلة الهندسية العقدية $\sum_{n=n_0}^{\infty} b.a^n$ فإنها تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت $|a| < 1$

وفي هذه الحالة مجموعها يكتب بالشكل : $S = \frac{b}{1-a}$.

◄ملاحظة:

قد لا تبدأ مجموع في المتسلسلة الهندسية من الصفر لأجل ذلك كنا نأخذ الدليل يبدأ في n_0

أمثلة:

١ $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} i^n$ هندسية أساسها i
وبما أن $|i| = 1$ فهي متباعدة
الطريقة الثانية $\{i\}^n$ متتالية متباعدة لأن $i^n \nrightarrow 0$
$\Longleftarrow$ فالمتسلسلة متباعدة (حسب اختبار الحد العام).

٢ $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + i\sqrt{3})^n$

وهي هندسية أساسها $1 + i\sqrt{3}$.
و إن : $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2 > 1$

Syria Math Team

فالمتسلسلة متباعدة .

٣- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i+1)^n}{3^{n+2}}$ متسلسلة هندسية تكتب بالشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1+i}{3}\right)^n$$

وهي عبارة عن متسلسلة هندسية أساسها $\left(\frac{1+i}{3}\right)$ وحدها الأول $\frac{1}{9}$ (وهنا كتبنا حدها الأول إذا طلب المجموع هنا سوف نوجد المجموع,

وبما أن :

$$\left|\frac{1+i}{3}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

فالمتسلسلة متقاربة ومجموعها هو :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i+1)^n}{3^{n+2}} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1+i}{3}} = \frac{1}{9-3-3i} = \frac{1}{6-3i} \overset{\text{نضرب بالمرافق}}{=} \frac{6+3i}{45} = \frac{6}{45}+\frac{1}{15}i$$

(إذا لم يطلب الشكل الجبري نكتفي بما كتبنا و أذا طلب الشكل الجبري نضرب بالمرافق)

◄ملاحظة:

نحصل على الحد الأول للمتتالية بأن نعوض أصغر دليل لها.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى

Syria Math Team