نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : الثانية عشر ◄ عنوان المحاضرة: التشاكل المستخلص

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١-التشاكل المستخلص

مبرهنة: لتكن A,B,C مودولات على الحلقة R وليكن $f,h\in Hom(A,B)$, $g,k\in Hom(B,c)$

عندئذ :

١- $(gof)_*=g_*of_*$
٢- $(gof)^*=f^*og^*$
٣- $(f+h)_*=f_*+h_*$
٤- $(g+k)^*=g^*+k^*$

الإثبات :

١- $(gof)_*:Hom(M,A)\to Hom(M,c)$

$$g_*of_*:Hom(M,A)\to Hom(M,c)$$

من جهة ثانية $\forall v\in Hom(M,A)$: فإن :

$$(gof)_*(v)=(gof)ov=go(fov)=g_*(fov)$$
$$=g_*(f_*(v))=(g_*of_*)(v)$$
$$\Rightarrow (gof)_*=g_*of_*$$

٢- $(gof)^*=f^*og^*$

$$(gof)^*:Hom\,(c,M)\to Hom(A,M)$$
$$f^*og^*:Hom(c,M)\to Hom(A,M)$$

و $\forall v\in Hom(c,M)$ فإن :

$$(gof)^*(v)=vo(gof)=(vog)of=f^*(vog)$$
$$=f^*(g^*(v))=(f^*og^*)(v)$$

$$\Rightarrow (gof)^* = f^*og^*$$

٣- $(f+h)_* = Hom(M,A) \to Hom(M,B)$

$$(f_* + h_*): Hom(M,A) \to Hom(M,B)$$

$\forall v \in Hom(M,A)$ فإن :

$$(f+h)_*(v) = (f+h)ov = (fov) + (hov)$$
$$= f_*(v) + h_*(v) \Rightarrow (f+h)_* = f_* + h_*$$

٤- $(g+k)^*: Hom(c,M) \to Hom(B,M)$

$$g^* + k^*: Hom(c,M) \to Hom(B,M)$$

$\forall v \in Hom(c,M)$ فإن :

$$(g+k)^*(v) = vo(g+k) = (vog) + (vok)$$
$$= g^*(v) + k^*(v)$$
$$\Rightarrow (g+k)^* = g^* + k^*$$

مبرهنة : إذا كانت

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A" \to 0 \quad \dots .(1)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية على الحلقة R وليكن M مودولا على الحلقة R عندئذ المتتاليتان الآتيتين تامتان

١- $0 \to Hom(M,A') \xrightarrow{f_*} Hom(M,A) \xrightarrow{g_*} Hom(M,A")$

٢- $0 \to Hom(A",M) \xrightarrow{g^*} Hom(A,M) \xrightarrow{f^*} Hom(A',M)$

الإثبات :

لإثبات أن (١) تامة يكفي أن أثبت أن f_* متباين وأن $Imf_* = Kerg_*$

$$\forall v \in Kerf_* \Rightarrow f_*(v) = 0$$

$\Leftarrow fov = 0$ وكون (١) تامة فإن f متباين وبالتالي فغن قابل للأختصار من اليسار $\Leftarrow v = 0$

$\Leftarrow Kerf_* = \{0\} \Leftarrow$ f_* متباين ....(a)

من جهة ثانية : $\forall v \in Imf_*$ فإنه يوجد $v' \in Hom(M,A')$ بحيث

$$v = f_*(v') \Rightarrow v = fov'$$

وليكن $g_*(v) = g_*(fov')$

$$= g_*\left(f_*(v')\right) = go(fov') = (gof)ov'$$

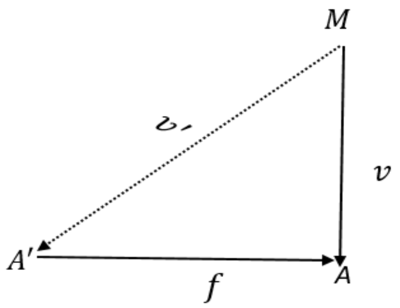
لكن $gof = 0$ (كون (١) تامة)

$$g_*(v) = 0 \Rightarrow v \in Kerg_* \Rightarrow Imf_* \subseteq Kerg_*$$

وكذلك $\forall v \in Kerg_*$ فإن $g_*(v) = 0$

$\Rightarrow gov = 0 \Rightarrow Imv \subseteq Kerg = Imf$ وكون f متباين فيوجد تشاكل مودولي وحيد

$v : M \to A'$ بحيث $fov' = v$



ومنه $f_*(v') = v \Leftarrow v \in Imf_*$

$$\Rightarrow Kerg_* \subseteq Imf_*$$

وبالتالي : $Imf_* = Kerg_*$ ......(b)

من (a) و(b) $\Leftarrow$ المتتالية (١) تامة

٢) لإثبات أنها تامة يجب أن يكون g^* متباين وأن $Img^* = Kerf^*$ لنفرض $g^*(v_1) = g^*(v_2)$

وذلك أيا كان $v_1, v_2 \in Hom(A'', M)$ عندئذ :

$v_1og = v_2og$ وكون g غامر فهو قابل للإختصار من اليمين

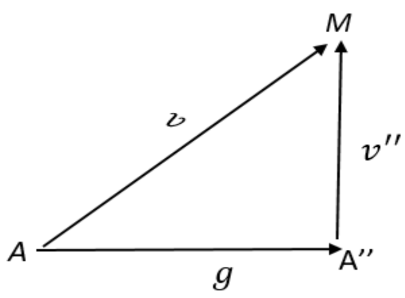
$\Leftarrow v_1 = v_2$ إذا g^* متباين

ومن جهة ثانية: $\forall v \in Kerf^* \Rightarrow f^*(v) = 0 \Rightarrow vof = 0$

$Imf \subseteq Kerv$ ولكن (١) تامة فإن

$$Imf = Kerg \Rightarrow Kerg \subseteq Kerv$$

ولكن g غامر $\Leftarrow$ يوجد تشاكل وحيد



$v'' : A'' \to M$

بحيث $v''og = v \Leftarrow v = g^*(v'')$

$(a).... \; v \in Img^* \Rightarrow Kerf^* \subseteq Img^*$

وكذلك $\forall v \in Img^*$ فيوجد $v'' \in Hom(A'', M)$ بحيث

$v = g^*(v')$ ومنه $f^*(v) = f^*\big(g^*(v'')\big)$

$v''o(gof) = vof \Rightarrow$ ولكن (١) تامة $\Leftarrow gof = 0$ أي $vof = f^*(v) = 0$

$$\Rightarrow v \in Kerf^*$$

$$\Rightarrow Img^* \subseteq Kerf^* \; ....(b)$$

من (a)و(b) $\Leftarrow Kerf^* = Img^*$ وبالتالي (٢) تامة

تمرين (وظيفة كتاب ص٧٠): ليكن مخطط التشاكلات المودوليي التبادلي :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

وسطريه متتاليتان تامتان اثبت أن :

١- إذا كانت f', γ, α متباينة فإن β متباين

٢- إذا كانت g, γ, α غامرة فإنه β غامرة

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جوده – بكر مشرف