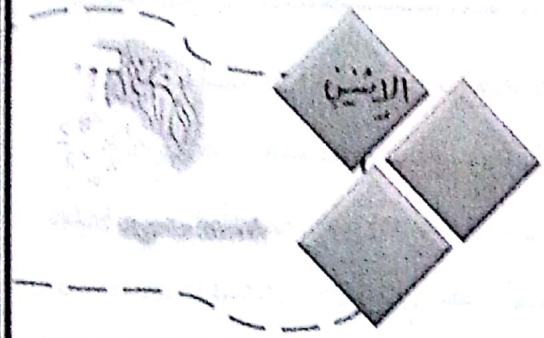
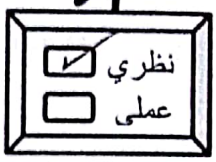


سنة الرابعة اقتصاد تحليل

المحاضرة (26)



◄ دكتور المادة: محمد مناف الحمد

◄ عنوان المحاضرة: حساب التحولات ..

دالیات عدیدة المتغيرات : سندرس في هذا الفصل :

- الشكل اللازم لوجود متغيرات حرجة (متوقف) للدالیات من الشكل :

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$$

- الشكل القانوني لمعادلة أولر لاغرانج.

- دالیات تعتمد على مشتقات ذات مراتب عليا (معادلات أولر - بواسون)

- دالیات مشروط إضافية.

معادلات أولر - لاغرانج للدالیات المعتمدة على n من المتغيرات :

ليكن :

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n')\,dx$$

$$y_i(a) = A_i$$

$$y_i(b) = B_i$$

$$y_i(x) \in D_1$$

دوال مستمرة على $[a,b]$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y_i'}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y_i}$

عندئذٍ : إن الشرط اللازم لوجود متغيرات توقف (حرجة) فتكون الدالي متم مقعرة عندما

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right) = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,n}$$

وهي تمثل معادلات أولر - لاغرانج.

Scanned by CamScanner

وهي الشرط اللازم لوجود مخنيات مرهة للتابعي J
وهي n معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية.
هذا يعني أسرة من المخنيات ذات $2n$ من الثوابت في فضاء بعده $(n+1)$
فيكون للتابعي J قيم قصوى عليها.

مثال محلول: أوجد مخنيات التوقف، التي قد تكون للتابعي:

$$J[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx$$

حيث:

$$y(0)=z(0)=0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad , \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

تقبل قصوى عليها.

الحل: لأن

$$F=y'^2+z'^2+2yz$$

فإن معادلات أولر - لاغرانج:

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0 \\ F_z-\dfrac{d}{dx}\left(F_{z'}\right)=0 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} y''-z=0 \quad \ldots(1) \\ z''-y=0 \quad \ldots(2) \end{cases}$$

من (1) $\Rightarrow z=y'' \Rightarrow z''=y^{(4)}$

نبدل في (2) فنجد:

$$y^{(4)}-y=0$$

وهي معادلة خطية متجانسة من المرتبة الرابعة معادلتها المميزة

$$\lambda^{(4)}-1=0$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)=0$$

$$(\lambda+i)(\lambda-i)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

WhatsApp : 0997378154
Facebook_Page : IOM
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

$\lambda = \pm 1 \quad , \quad \lambda = \pm i$

وبالتالي حلها:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

$$z = y'' = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

ولتعيين الثوابت نقدم الشروط الحدية:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \quad 0 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \quad 1 = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4$$

$$z(0) = 0 \Rightarrow \quad 0 = c_1 + c_2 - c_3$$

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \quad -1 = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_4$$

$(1) - (3) \Rightarrow c_3 = 0 \quad , \quad c_2 = -c_1$

$(2) - (4) \Rightarrow c_4 = 1$

من (2) نجد:

$$1 = c_1 e^{\frac{\pi}{2}} - c_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + 1$$

$$c_1 \underbrace{\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

WhatsApp : 0997378154 Facebook_Page : IOM
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

نعوض فنجد:

$$y(x) = \sin x$$
$$z(x) = -\sin x$$

وهي مستقيمات لتوقف التابع $J(y,z)$

مثال محلول أوجد مستقيمات لتوقف التابع:

$$J[y,z] = \int_a^b F(y', z')\,dx$$

الحل:

معادلتي أولر لاغرانج هما:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \quad \cdots (1) \\ F_z - \dfrac{d}{dx}(F_{z'}) = 0 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

نلاحظ أن $F_y = F_z = 0$

نصبح معادلات أولر لاغرانج:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \quad \cdots (1)$$
$$\frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0 \quad \cdots (2)$$

وبالتالي:

$$F_{y'y'} \cdot y'' + F_{y'z'} \cdot z'' = 0 \quad \cdots (1)$$
$$F_{z'y'} \cdot y'' + F_{z'z'} \cdot z'' = 0 \quad \cdots (2)$$

نضرب المعادلة الأولى بـ $F_{z'z'}$ والثانية بـ $F_{y'z'}$ ونطرح

WhatsApp : 0997378154
Facebook_Page : IOM
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

$$F_{y'y'}\cdot F_{z'z'}\cdot y'' + F_{y'z'}\cdot F_{z'z'}\cdot z'' = 0 \quad \dots (1$$

$$\left(F_{y'z'}\right)^2\cdot y'' + F_{z'z'}\cdot F_{y'z'}\cdot z'' = 0 \quad \dots (2$$

بالطرح:

$$\left[F_{y'y'}\cdot F_{z'z'} - \left(F_{y'z'}\right)^2\right]\cdot y'' = 0$$

ونفرض أنّ:

$$\left[F_{y'y'}\cdot F_{z'z'} - \left(F_{y'z'}\right)^2\right] \neq 0 \Rightarrow y'' = 0$$

وبالتالي $y = c_1 x + c_2$

ونفرض طريقة حسابية نضرب المعادلة الأولى بـ $F_{y'y'}$ والثانية بـ $F_{y'z'}$ ونطرح.

$$F_{y'y'}\cdot F_{y'z'}\cdot y'' + \left(F_{y'z'}\right)^2\cdot z'' = 0 \quad \dots (1)$$

$$F_{y'y'}\cdot F_{y'z'}\cdot y'' + F_{y'y'}\cdot F_{z'z'}\cdot z' = 0 \quad \dots (2)$$

بالطرح نجد:

$$\left[\left(F_{y'z'}\right)^2 - F_{y'y'}\cdot F_{z'z'}\right]\cdot z'' = 0$$

ونفرض أن:

$$\left[\left(F_{y'z'}\right)^2 - F_{y'y'}\cdot F_{z'z'}\right] \neq 0 \Rightarrow z'' = 0$$

وبالتالي: $z = c_3 x + c_4$

ومن ثم فإنّ: $y(x), z(x)$ عائلة من المستويات في الفضاء $\mathbb{R}^3$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

وحيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية يتم تعيينها من الشروط الحدية، ويكون منحني الحوتين هما الحل المشترك للمستويين.

مثال: ماهي أقصر مسافة بين النقطتين: $(0,1,1)$ و $(1,0,-1)$ في $\mathbb{R}^3$

المطلوب إيجاد أقصر منحني يصل بين النقطتين الواقعتين على $F(x,y,z)=0$ في $\mathbb{R}^3$

وتكون دالة الهدف على شكل

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx$$

وحيث:

$$y(0) = z(0) = 1$$
$$y(1) = 0 \quad , \quad z(1) = -1$$

أقل ما يمكن.

أقصر مسافة هي الحل المشترك للمستويين:

$$y = c_1 x + c_2$$

$$z = c_3 x + c_4$$

باستخدام الشروط الحدية نجد:

$$c_2 = c_4 = 1$$

$$c_1 = -1 \quad , \quad c_3 = -2$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

وبالتالي:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$$

مثال محلول: أوجد منحني لتوقف للدالي:

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b \left(-2y^2 + 2yz - y'^2 + z'^2\right) dx$$

حيث: $y(a) = a_1, y(b) = b_1, z(a) = a_2, z(b) = b_2$

الحل: بما أن معادلات أولر لاغنج هي:

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \quad \dots (1) \\ F_z - \frac{d}{dx}\left(F_{z'}\right) = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'' - 2y + z = 0 \quad \dots (1) \\ y - z'' = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

من (2) $\Leftarrow y = z'' \Leftarrow y'' = z^{(4)}$ (بتبديل في (1)) $\Leftarrow z^{(4)} - 2z^{(2)} + z = 0$

وهي معادلة خطية متجانسة من المرتبة الرابعة ذات أمثال ثابتة معادلتها المميزة:

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$ جذر مضاعف

$$\lambda = \pm 1$$

وبالتالي:

$$z = (c_1 + c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x)e^{-x}$$

$$z' = (c_1 + c_2 + c_2 x)e^x + (c_4 - c_3 - c_4 x)e^{-x}$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

$$y = z'' = (C_1 + 2C_2 + C_2 x)e^{x} + (-2C_4 + C_3 + C_4 x)e^{-x}$$

وباستخدام الشروط الحدية يمكننا إيجاد الثوابت:

C_1, C_2, C_3, C_4 وبالتالي نحصل على اختيارات لكل من

$y(x)$ ، $z(x)$

انتهت المحاضرة ... ♡

إعداد: إلياس دليل ..

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner