◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الحادية والثانية عشرون (والأخيرة) عنوان المحاضرة: حل مسائل

سنقوم بهذه المحاضرة أصدقائي بحل بعض المسائل تطبيق لما أخذناه بالمحاضرات السابقة ..

"المسألة الأولى" إضافي دورة

مثلث (ABD) قائم الزاوية في (A) ومتساوي الساقين طول ضلعه القائم يساوي (1), تتحرك في مستو ثابت بحيث تتركب حركتها في ثلاث دورانات في المستوي الثابت حول النقط الثلاث A, B, D قيمها على التوالي :

$$\omega_A = 1 + 2t.\tan t - \tan^2 t \quad ,\omega_B = -2\tan t \quad ,\omega_D = \tan^2 t$$

والمطلوب: 1- عين القاعدة والمتدحرج .

2- عين معادلات حركة النقطة (A) .

الحل

نختار في المستوي الثابت المحورين o_1x_1, o_1y_1 ونختار المحاور المتماسكة مع الصفيحة (المثلث) منطبقة على ضلعيها Ax, Ay ، إن حركة الصفيحة مستوية ، والدورانات الثلاث هي دورانات متوازية تعامد مستوي الحركة ونلاحظ أن :

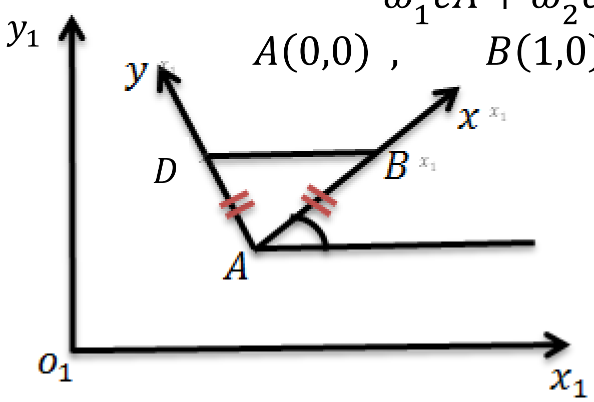
$$\overrightarrow{\omega_A} // \overrightarrow{\omega_B} // \overrightarrow{\omega_D}$$

$$\omega_A + \omega_B + \omega_D = 1 \neq 0$$

أي أن الحركة دورانية آنية حول محور آني (ω) يمر من مركز مجموعة النقاط (c) "حيث (c) هي المركز الآني للدورانات" ويتعين من العلاقة :

$$\omega_1\overrightarrow{cA} + \omega_2\overrightarrow{cB} + \omega_3\overrightarrow{cD} = 0 \dots (*)$$

$$A(0,0) \quad , \quad B(1,0) \quad , \quad D(0,1) \quad , \quad c(x,y)$$



اخترنا $A(0,0)$ مبدأ الاحداثيات والنقطتان $B(1,0)$ و $D(0,1)$ من نص المسألة ((متساويان الساقين وطول ضلعه 1)) والنقطة $c(x,y)$ مركز المثلث .

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد :

$$\omega_1(x-0, y-0) + \omega_2(x-1, y-0) + \omega_3(x-0, y-1) = 0$$

وبالمطابقة على المحور x نجد :

$$(\omega_1+\omega_2+\omega_3)x-\omega_2=0$$
$$\Longrightarrow x=\omega_2=-2\tan t \quad \dots(1)$$

وبالمطابقة على المحور y نجد :

$$(\omega_1+\omega_2+\omega_3)y-\omega_3=0$$
$$\Longrightarrow y=\omega_3=\tan^2 t \qquad \dots(2)$$

من العلاقة (1) نجد : $\tan t=\frac{x}{-2}$ وبالتربيع والتعويض بالعلاقة (2) نجد :

$$y=\frac{x^2}{4}\Longrightarrow x^2=4y$$

وهي عبارة عن معادلة قطع مكافئ وتمثل المتدحرج .

إيجاد القاعدة

لتعيين القاعدة يجب تعيين احداثيات النقطة c بالنسبة للمحورين o_1x_1,o_1y_1 من أجل ذلك نكتب الشرط $\overrightarrow{V_e}(I)=\vec{0}$ أو $\overrightarrow{V_a}(I)=\overrightarrow{V_r}(I)$ بحيث $I=c$

أي :

$$x_1'\overrightarrow{\iota_1}+y_1'\overrightarrow{J_1}=x'\vec{\iota}+y'\vec{J}\dots\dots(\#)$$

لدينا محصلة الدورانات تساوي $\omega=1=\theta'$ وهي مشتق الزاوية ومنه :

$$\Longrightarrow\theta=\int\omega.dt\Longrightarrow\theta=\int 1.dt\Longrightarrow\theta=t+\theta_0$$

في بداية الحركة $t=0\ ,\theta=0 \Longleftarrow \theta_0=0$

$$\boxed{\Longrightarrow\theta=t}$$

نعلم أن للتحويل من الجملة المتماسكة إلى الجملة الثابتة نسقط $\vec{\iota},\vec{J}$ على المحورين x_1,y_1 :

$$\vec{\iota}=\cos\theta\,\overrightarrow{\iota_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{J_1}\quad,\quad\vec{J}=-\sin\theta\,\overrightarrow{\iota_1}+\cos\theta\,\overrightarrow{J_1}$$
$$\Longrightarrow\vec{\iota}=\cos t\,\overrightarrow{\iota_1}+\sin t\,\overrightarrow{J_1}\quad,\quad\vec{J}=-\sin t\,\overrightarrow{\iota_1}+\cos t\,\overrightarrow{J_1}$$

وبالتعويض بالعلاقة (#) نجد :

$$x_1'\overrightarrow{\iota_1}+y_1'\overrightarrow{J_1}=x'(\cos\theta\,\overrightarrow{\iota_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{J_1})+y'(-\sin\theta\,\overrightarrow{\iota_1}+\cos\theta\,\overrightarrow{J_1})$$

وبالمطابقة نجد :

$$x_1'=x'\cos t-y'\sin t\dots\dots(1)$$
$$y_1'=x'\sin t+y'\cos t\dots\dots(2)$$

لدينا $x=-2\tan t \Longleftarrow x'=-\frac{2}{\cos^2 t}$ ولدينا ايضاً $y=\tan^2 t \Longleftarrow y'=\frac{2\sin t}{\cos^3 t}$

وبالتعويض بالعلاقة (1) فنجد :

$$\Longrightarrow x_1'=\frac{-2\cos t}{\cos^2 t}-\frac{2}{\cos^3 t}.\sin^2 t\Longrightarrow x_1'=\frac{-2}{\cos t}-\frac{2\sin^2 t}{\cos^3 t}$$
$$\Longrightarrow x_1'=\frac{-2}{\cos^3 t}\Longrightarrow x_1=\int\frac{-2}{\cos^3 t}dt$$

وبالتعويض بالعلاقة (2) أيضاً فنجد :

$$y_1' = \frac{-2\sin t}{\cos^2 t} + \frac{2\sin t}{\cos^3 t}.\cos t = 0$$
$$\Longrightarrow y_1 = C$$

ومنه القاعدة هي عبارة عن مستقيم يوازي (o_1x_1) .

معادلات الحركة هي x_A, y_A, θ

لإيجاد معادلات حركة $A(x_A, y_A)$ نحسب أولاً سرعة النقطة A :

$$\Longrightarrow \vec{V}(A) = \overrightarrow{\omega_B} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\omega_D} \wedge \overrightarrow{AD} = x_1'\vec{\imath_1} + y_1'\vec{J_1}$$

$$\vec{V}(A) = \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{J_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega_B \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{J_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega_D \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(A) = (\sin t\,.\,\omega_B + \cos t\,.\,\omega_D)\vec{\imath_1} + (-\cos t\,.\,\omega_B + \sin t\,.\,\omega_D)\vec{J_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(A) = (-2\sin t\,.\tan t + \cos t\,.\tan^2 t)\vec{\imath_1} + (2\cos t\,.\tan t + \sin t\,.\tan^2 t)\vec{J_1}$$

$$x_1'(A) = \frac{-2\sin^2 t}{\cos t} + \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{-\sin^2 t}{\cos t}$$

$$y_1'(A) = -2\sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}$$

$$x_1(A) = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt$$

$$\Longrightarrow x_1(A) = -\int \frac{dt}{\cos t} + \int \cos t\,dt$$

بفرض $\tan\frac{t}{2} = u \Longleftarrow dt = \frac{2du}{1+u^2}$

$$\Longrightarrow \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = 2\int \frac{du}{1-u^2} = \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = 2\int \left(\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}\right)du$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{2} \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$x_1(A) = -\ln\left|\frac{1-\tan\frac{t}{2}}{1+\tan\frac{t}{2}}\right| + \sin t + c_1$$

$$y_1(A) = -2\cos t + \underbrace{\int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\,dt}_{(I)}$$

بفرض : $\cos t = u \Rightarrow -\sin t\,dt = du$

$$I = -\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du = -\int \frac{du}{u^2} + \int du$$

$$I = \frac{1}{u} + u + c_2 \Rightarrow I = \frac{1}{\cos t} + \cos t$$

$$\Rightarrow y_1(A) = -\cos t + \frac{1}{\cos t} + c_2$$

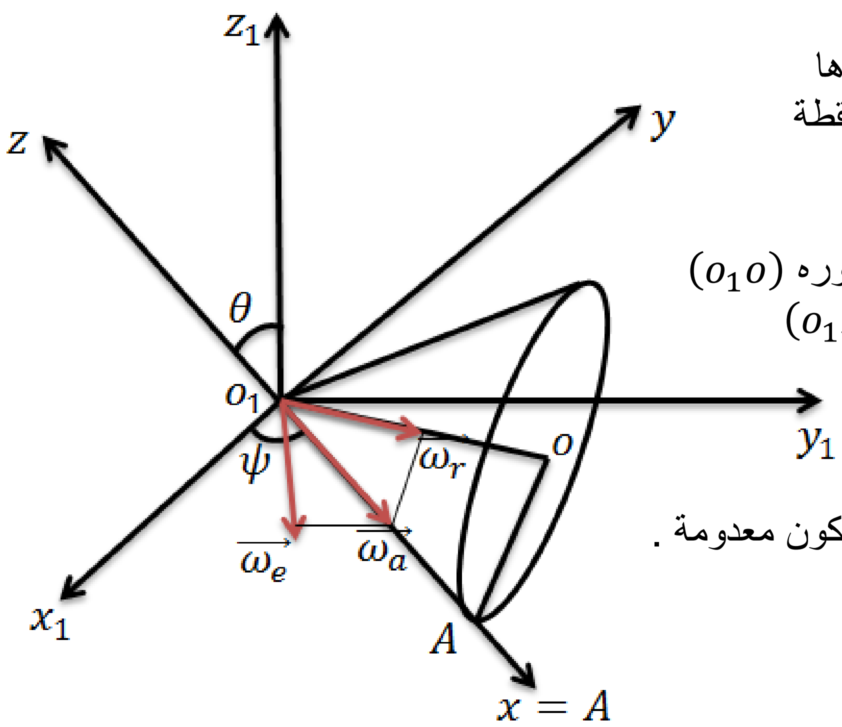
"المسألة الثانية"

يتدحرج مخروط دوراني ارتفاعه $(h = 4)$ نصف قطر قاعدته $(r = 3)$, نصف زاويته الرأسية (α) دون انزلاق على المستوي الأفقي $(o_1x_1y_1)$ بحيث يبقى رأسه (o_1) ثابتا, علما أن القيمة العددية لسرعة مركز قاعدة المخروط وهي (o) , $V(o) = 48$ والمطلوب :

-1 عين شعاع الدوران الجري للمخروط حول (o_1z_1) .

-2 عين شعاع الدوران الآني له بدلالة الزمن .

الحل



نوع الحركة " حركة دورانية حول نقطة ثابتة "
نختار جملة المحاور الثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$
بما أن الحركة دورانية حول نقطة ثابتة سنعتبرها حركة دورانية حول محور آني يمر من هذه النقطة بشرط ذهاب إحدى الحركات الدورانية
وسنعتبر بأن الحركة هي تركيب حركتين :
الحركة النسبية هي دوران المخروط حول محوره (o_1o)
الحركة الجرية هي دوران المخروط حول (o_1z_1)
وبما أن الحركة هي تدحرج دون انزلاق فسرع نقاط التماس تكون معدومة
أي سرعة $\vec{V}(o_1) = \vec{0}$
و $\vec{V}(A) = \vec{0}$ ومنه سرعة المستقيم (o_1A) تكون معدومة .

أي (o_1A) هو المحور الآني للدوران .

إن $\overrightarrow{\omega_e} \parallel \overrightarrow{k_1}$

$$\vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_a} \wedge \overrightarrow{o_1o}$$

$$\left|\vec{V}(o)\right| = |\overrightarrow{\omega_a}|.\,|\overrightarrow{o_1o}|.\sin(\overrightarrow{\omega_a}\,,\overrightarrow{o_1o})$$

$$\Longrightarrow \left|\vec{V}(o)\right| = |\overrightarrow{\omega_a}|.\,|4|.\sin\alpha \quad \dots(1)$$

من المثلث o_1oA حسب فيثاغورس

$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{o_1A}\right)^2 = (\overrightarrow{o_1o})^2 + \left(\overrightarrow{oA}\right)^2 \Longrightarrow \left(\overrightarrow{o_1A}\right)^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{o_1A}\right) = 5$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad ,\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

نعوض في (1) :

$$48 = |\overrightarrow{\omega_a}|.\,|4|.\left(\frac{3}{5}\right) \Longrightarrow |\overrightarrow{\omega_a}| = 20$$

$$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_e} + \overrightarrow{\omega_r}$$

$$\vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_a} \wedge \overrightarrow{o_1o} \Longrightarrow \vec{V}(o) = (\overrightarrow{\omega_e} + \overrightarrow{\omega_r}) \wedge \overrightarrow{o_1o}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{\omega_r} \wedge \overrightarrow{o_1o} \Longrightarrow \vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{o_1o} + \vec{0}$$

$\overrightarrow{\omega_r} \wedge \overrightarrow{o_1o} = 0$ بسبب $\overrightarrow{\omega_r} // \overrightarrow{o_1o}$

$$\left|\vec{V}(o)\right| = |\overrightarrow{\omega_e}|.\,|\overrightarrow{o_1o}|.\sin(\overrightarrow{\omega_e}\,,\overrightarrow{o_1o})$$

إن $o_1z_1 \perp o_1A$

$$\Longrightarrow 48 = |\overrightarrow{\omega_e}|.\,|4|.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

وحسب دستور التحويل من مجموع إلى جداء نجد :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}.\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{2}.\sin\alpha$$

$$\Longrightarrow 48 = |\overrightarrow{\omega_e}|.\,|4|.\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow 48 = |\overrightarrow{\omega_e}|.\,|4|.\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\Longrightarrow |\overrightarrow{\omega_e}| = 15 \ \Longrightarrow \psi' = 15 \ \Longrightarrow \psi = 15t$$

$$|\overrightarrow{\omega_e}| = -15\overrightarrow{k_1}$$

$$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_e}.\vec{\imath} = 20\cos\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + 20\sin\psi\,\overrightarrow{\jmath_1}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\omega_a} = 20\cos 15t\,\overrightarrow{\imath_1} + 20\sin 15t\,\overrightarrow{\jmath_1}$$

"مسألة محلولة صفحة 116 "

$(o_1x_1y_1)$ محوران متعامدان في مستو ثابت , (Δ) مستقيم يتدحرج دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها (o_1) نصف قطرها (1) بحيث تبقى السرعة الزاوية لدوران النقطة (c) تماس المستقيم (Δ) مع الدائرة $(o_1,1)$ بحيث تبقى السرعة الزاوية ثابتة وتساوي (ω) . (M) نقطة مادية تتحرك على (Δ) بحركة منتظمة سرعتها (v) ثابتة ، كان المستقيم (Δ) في لحظة البدء مماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ وكانت (M) في النقطة (A) ، أي A, M, c منطبقة في لحظة البدء

والمطلوب : **1-** عين الإحداثيات المطلقة للنقطة (M) بدلالة الجملة $(o_1x_1y_1)$

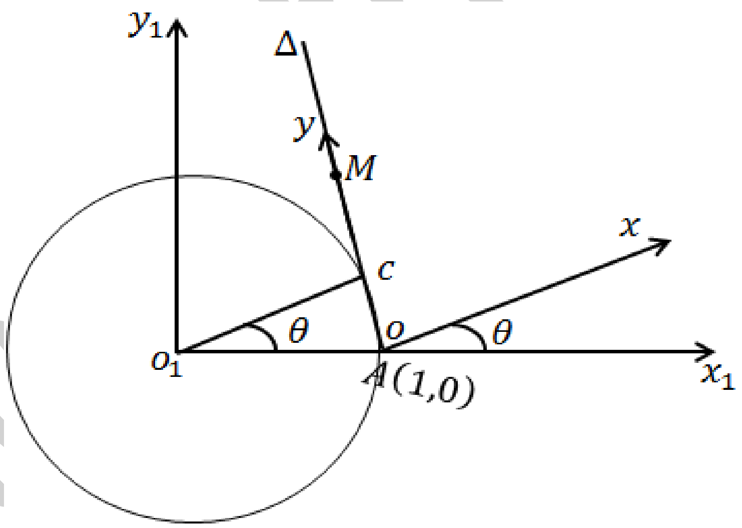
2- عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة (A)

3- عين العلاقة التي تربط (v) بـ (ω) كي يكون $(\overrightarrow{\Gamma_a})$ محمولاً على (Δ) .

الحل

إن حركة (M) هي محصلة حركتين وهي حركتها على المستقيم (Δ) **حركة نسبية** **وحركة جرية** مع المستقيم (Δ) وهي حركة مستوية . بما أن حركة (Δ) تتدحرج دون انزلاق فإن نقطة التماس (c) هي المركز الآني للدوران في الحركة المستوية :

نختار النقطة (o) مبدأ الاحداثيات للجملة المتماسكة مع المستقيم (Δ) التي كانت فيه النقطة (A) لحظة البدء .



فمن شرط التدحرج دون انزلاق نلاحظ أن المسافة التي تقطعها نقطة التماس (c) " **المركز الآني للدوران**" على المستقيم (Δ) "وهو المتدحرج" تساوي المسافة التي تقطعها النقطة (c) على الدائرة $(o_1,1)$ "القاعدة" أي أن طول $(\overline{oc})$ يساوي طول القوس $(\widehat{Ac})$ فإذا سمينا الزاوية بين (o_1c) و (o_1x_1) هي (θ) كان لدينا $\overline{oc} = (\widehat{Ac}) = \theta$ (لأن نصف قطر الدائرة يساوي الواحد)

نختار المحور (oy) منطبقا على (Δ) والمحور (ox) العمود على (Δ) في النقطة (o) .

1- لتعيين موضع النقطة (M) نكتب :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{cM}$$

إن $\overrightarrow{cM}$ هي عبارة عن $\overrightarrow{oM} - \overrightarrow{oc}$ ومنه $\overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد :

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = 1(\cos\theta\,\vec{\iota_1} + \sin\theta\,\vec{\jmath_1}) + co\vec{\jmath} + oM\vec{\jmath}$$

ولأن الحركة تتدحرج دون انزلاق ((فالمسافة المقطوعة على القاعدة تساوي المسافة المقطوعة على المتدحرج)) أي أن :

$$|\widehat{Ac}| = |\overline{co}| = r.\theta$$

$$\theta' = \omega \Rightarrow \theta = \omega t$$

$$\overrightarrow{o_1M} = \int v\,.dt = v.t + c$$

من شروط البدء $t = 0\ ,\ \overrightarrow{o_1M} = 0 \quad \Rightarrow c = 0$

$$\overrightarrow{oM} = v.t\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{co} = -\omega.t\vec{\jmath}$$

نعلم أن : $\vec{\jmath} = -\sin\theta\,\vec{\iota_1} + \cos\theta\,\vec{\jmath_1}$

$$\Rightarrow \vec{\jmath} = -\sin\omega t\,\vec{\iota_1} + \cos\omega t\,\vec{\jmath_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = \cos\omega t\,\vec{\iota_1} + \sin\omega t\,\vec{\jmath_1} - (v-\omega)t.\sin\omega t\,\vec{\iota_1} + (v-\omega)t.\cos\omega t\,\vec{\jmath_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = (\cos\omega t - (v-\omega)t.\sin\omega t)\vec{\iota_1} + (\sin\omega t + (v-\omega)t.\cos\omega t)\vec{\jmath_1}$$

بالاشتقاق المباشر نحصل على $(\vec{V_a})$ و $(\vec{\Gamma_a})$

أو عن طريق تركيب الحركات

إن حركة (M) على المستقيم هي حركة نسبية وبالتالي :

$$\vec{V_r}(M) = v\vec{\jmath}$$

وهي حركة مستوية $(o_1x_1y_1)$ بالنسبة لـ (Δ) مع (M) وهي (الحركة الجرية)

وبالتالي السرعة الجرية في الحركة المستوية هي :

$$\vec{V_e}(\mathrm{M}) = \vec{V}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o_1M} \quad \text{أو} \quad \vec{V_e}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{cM}$$

$$\vec{V_e}(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} \vec{\iota} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & (v-\omega)t & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{V_e}(\mathrm{M}) = -\omega(v-\omega)t\vec{\iota}$$

وبالتالي السرعة المطلقة هي مجموع السرعتين الجرية و النسبية

$$\vec{V_a}(\mathrm{M}) = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(\mathrm{M}) = -\omega(v-\omega)t\vec{\iota} + v\vec{\jmath}$$

وللحصول على التسارع نطبق القانون التالي :

$$\vec{\Gamma_a}(M) = \left.\frac{d\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{V_a}(M)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma_a}(M) = -\omega(v-\omega)\vec{\iota} + \begin{vmatrix} \vec{\iota} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega(v-\omega)t & v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = [-\omega(v-\omega) - v\omega]\vec{\imath} - \omega^2(v-\omega)t\vec{\jmath}$$

كي يحمل $\overrightarrow{\Gamma_a}(M)$ على (Δ) يجب أن تكون المركبة على (x) معدومة لذلك نكتب

$$-\omega(v-\omega) - v\omega = 0$$

$$\Rightarrow v-\omega = -v \Rightarrow 2v = \omega \Rightarrow v = \frac{\omega}{2}$$

مسألة من الكتاب صفحة (101) تم إعطائها

ذراع (o_1A) طوله (a) يدور في مستوي ثابت بسرعة زاوية ثابتة (ω_1) حول النقطة الثابتة (o_1) ، إن (AB) ذراع طوله $(2a)$ مرتبط مفصليا في (A) أي بالذراع o_1A) وتنزلق نهايته (B) على المستقيم الثابت (o_1x_1), والمطلوب :

1- معادلات حركة الذراع (AB).

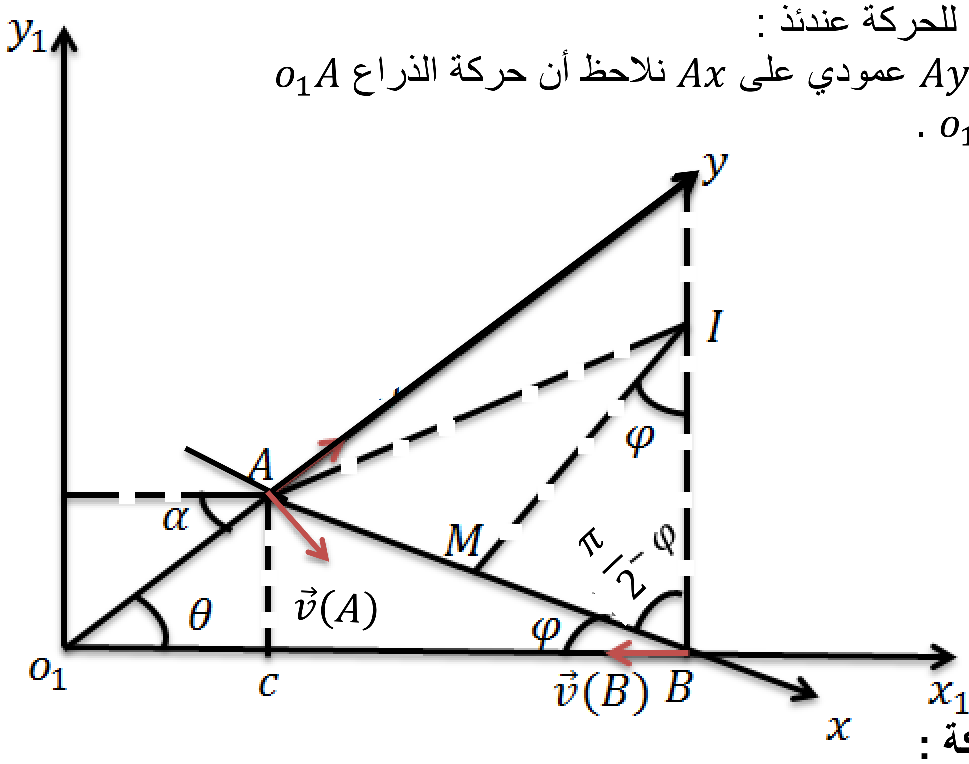
2- تعيين المركز الآني للدوران للذراع (AB) ثم تعيين القاعدة والمتدحرج .

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة (B) .

الحل :

نختار النقطة (A) قطب للحركة عندئذ :

Ax هو الذراع AB و Ay عمودي على Ax نلاحظ أن حركة الذراع o_1A حركة دائرية مركزها o_1 .



1- تعيين معادلات الحركة :

النقطة o_1 , وبالتالي معادلات النقطة A في الجملة الثابتة هي :

$$A(x_A, y_A) = \begin{cases} x_A = a.\cos\theta \\ y_A = a.\sin\theta \end{cases}$$

ولكن حسب الفرض في نص المسألة $\theta' = \omega_1 \Rightarrow \theta = \omega_1.t + \theta_0$

من شروط البدء $t=0$ و $\theta = 0$ نجد أن $\theta_0 = 0$ وبالتالي : $\theta = \omega_1 t$

وبالتالي فإن :

$$x_A = a.\cos\omega_1 t \quad , \quad y_A = a.\sin\omega_1 t$$

في المثلث ACo_1 يكون : $Ac = a.\sin\theta$ وفي المثلث ACB يكون : $Ac = 2a.\sin\varphi$

وبالتالي بالمطابقة :

$$a.\sin\theta = 2a.\sin\varphi \Longrightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{2} \Longrightarrow \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\theta}{2}\right) \quad ..(*)$$

$$\Longrightarrow \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\omega_1 t}{2}\right)$$

وبالتالي معادلات الحركة هي :

$$x_A = a.\cos\omega_1 t \quad , y_A = a.\sin\omega_1 t \quad , \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\omega_1 t}{2}\right)$$

2- تعيين المركز الآني للدوران :

أولاً : بفرض إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي $I(x_1, y_1)$

((سنقوم بتعيين المركز الآني هندسيا ويمكن تعينه تحليلياً))

A تتحرك بشكل دائرة و B تتحرك على نفس المستقيم .

وبالتالي نأخذ مماس الدائرة على A , ونأخذ العمود المماس في النقطة A ألا وهي النظيم .

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A)}{\omega^2} \quad ; \omega = \varphi'$$

$$x_1 = \overrightarrow{o_1 B} = \overrightarrow{o_1 c} + \overrightarrow{cB}$$

نلاحظ أن : $o_1 c = a.\cos\theta$ كما أن : $cB = 2a.\cos\varphi \overset{(*) \text{ من}}{=} 2a.\sqrt{1 - \sin^2\varphi}$

$$\Longrightarrow cB = 2a.\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{4}} = a.\sqrt{4 - \sin^2\theta}$$

$$x_1 = a.\cos\theta + a.\sqrt{4 - \sin^2\theta} = a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}$$

$$y_1 = BI = o_1 B.\tan\theta = x_1.\tan\theta$$

$$y_1 = \left(a.\cos\theta + a.\sqrt{4 - \sin^2\theta}\right).\tan\theta$$

$$y_1 = a.\sin\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}.\tan\omega_1 t$$

وبالتالي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي :

$$I\left(a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}, a.\sin\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}.\tan\omega_1 t\right)$$

وهذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للقاعدة .

لتعيين إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة ، وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هي : $I\big(x(I), y(I)\big)$.

وبالتالي نقوم بما يلي :

$$x(I) = AM = AB - MB = 2a - IB.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$x(I) = 2a - y_1.\sin\varphi = 2a - y_1.\frac{\sin\theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \left(a.\sin\theta + a\sqrt{4-\sin^2\theta}\,.\tan\theta\right).\frac{\sin\theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2}\left(\sin^2\theta - \sqrt{4-\sin^2\theta}\,.\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2}\left(\sin^2\omega_1 t - \sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\,.\frac{\sin^2\omega_1 t}{\cos\omega_1 t}\right)\;..(\#)$$

$$y(I) = IM = IB.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = y_1.\cos\varphi$$

$$y(I) = \left(a.\sin\theta + a\sqrt{4-\sin^2\theta}\,.\tan\theta\right)\frac{\sqrt{4-\sin^2\theta}}{2}$$

$$y(I) = \frac{a}{2}\left(\sin\theta\,.\sqrt{4-\sin^2\theta} + (4-\sin^2\theta).\tan\theta\right)$$

$$y(I) = \frac{a}{2}\left(\sin\omega_1 t\,.\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t} + (4-\sin^2\omega_1 t).\tan\omega_1 t\right)..(\#\#)$$

إن $(\#)$ و $(\#\#)$ هي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة
وهذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للمتدحرج .

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة (B) :

عبارة شعاع الموضع للنقطة (B) في الجملة الثابتة هو :

$$\overrightarrow{o_1B} = x_B\vec{\imath_1} + y_B\vec{\jmath_1} = x_1\vec{\imath_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1B} = \left(a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\right)\vec{\imath_1}$$

بالاشتقاق نحصل على السرعة :

$$\vec{V}(\mathrm{B}) = -a\left(\omega_1.\sin\omega_1 t + \frac{\omega_1.\sin\omega_1 t\,.\cos\omega_1 t}{\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}}\right)\vec{\imath_1}$$

بالاشتقاق مرة ثانية نحصل على التسارع :

$$\vec{\Gamma}(B) = -a\omega_1^2.\cos\omega_1 t + a\frac{\left(-\omega_1^2\,(\cos^2\omega_1 t - \sin^2\omega_1 t).\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\right)}{4-\sin^2\omega_1 t}$$

$$-a\left(\frac{\left(\dfrac{\omega_1.\sin\omega_1 t\,.\cos\omega_1 t}{\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}}\right)(\omega_1.\sin\omega_1 t.\cos\omega_1 t)}{4-\sin^2\omega_1 t}\right)$$

تصحيح مسألة من المحاضرة السابقة

يتدحرج مخروط دوراني S رأسه الثابت o ، زاويته الرأسية $\frac{\pi}{4}$ ، نصف قطر قاعدته a دون انزلاق على السطح الخارجي لمخروط دوراني ثابتٍ S_1 مشترك معه بالرأس o

المطلوب :

1) عين معادلات حركة S علماً أن نصف قطر المخروط S تساوي a نصف قطر قاعدة S وأن القيمة العددية لسرعة مركز القاعدة هي $|v(A)| = 4a$

2) عين سرعة نقطة B من محيط القاعدة S_1 في النقطة التي تقع فيها B على محور المخروط S_1 .

الحل

بما أن المخروط S يتدحرج على المخروط الثابت بنصف قاعدته وزاوية المخروط الثابت هي فقط $\frac{\pi}{4}$

فتكون الزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، ونعلم ان شعاع الدوران يعطى بالعلاقة :

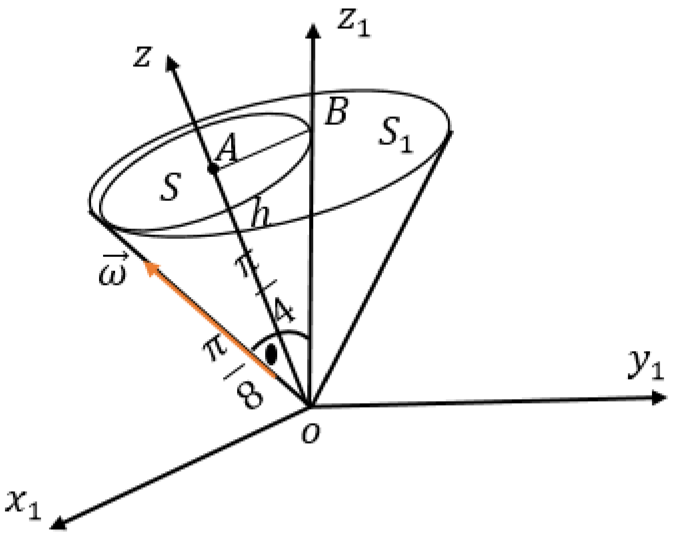
$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\overrightarrow{u_1} + \varphi'\vec{k} \Longrightarrow \vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\vec{k}$$

وسرعة النقطة A هي : $\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oA}$ وبأخذ القيمة العدية نجد :

$$|\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}|.|\overrightarrow{oA}|.\sin(\vec{\omega},\overrightarrow{oA}) \Longrightarrow |\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}|.|\overrightarrow{oA}|.sin\frac{\pi}{8} \ldots.(1)$$

من نص المسألة القيمة العددية لسرعة مركز القاعدة هي $4a$ أي أن $|\vec{V}(A)| = 4a$

ومنه نجد بالتعويض في (1) نجد : $4a = |\vec{\omega}|.h.sin\frac{\pi}{8}$ ......$(*)$.



* تصحيح الأخطاء الواردة في المقرر:

- المحاضرة الأولى:

- إضافة تعريف: ((درجة حرية جسم صلب)): هي عدد الوسطاء المستقلة التي تعين بشكل وحيد وكافي حركة جسم.

م3 ص-3

- تعريف الحركة الانسحابية: ((السطر الثالث من التعريف))
- الخطأ: ليس بالضرورة أن يتحرك
- الصواب: ليسَ بالضرورة أن يتحرك

ص-7 وظيفة: ((ثانياً: السطر الأخير)):

- نستطيع اختيار $M(\alpha,0,0)$ للسهولة

نختار $o\alpha$ يمر من النقطة M ((لأن M على محيط الحرص)) من الشكل:
ونكمل الحل هكذا بتعويض كل من β و γ بالصفر.

ص8 كذلك الأمر في مثال (2): ((السطر الثاني من الحل)).

- نستطيع اختيار $M(R,0,0)$ للسهولة.

$$\forall\, o_1M \in S : \vec{o_1M} = \vec{o_1o} + \vec{oM}$$

$$(t, t^2, 2) + (R,0,0)$$

$$\Rightarrow x_1 = (t+R)$$
$$y_1 = t^2$$
$$z_1 = 2$$

تنبيه: إن الحل الوارد في المحاضرة صحيح لكن نشير إلى أنه من الممكن اختيار M بهذا الشكل للسهولة وليس أكثر.

ص 10 - ((السطر السادس))

- الخطأ: $x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} = 1$

- الصواب: $x_1^2 + \frac{y_1^2}{4} = 1$

* المحاضرة السادسة: [ص 2 - سطر 4-5-7 , 8]

- الخطأ: $\vec{v}_1(m)$, $\vec{v}_2(m)$, $o, \vec{m}$

- الصواب: $\vec{v}_1(M)$, $\vec{v}_2(M)$, $o, \vec{M}$

ص 8 - سطر 2 -

- كذلك الأمر نستطيع اختيار $M(\alpha, o, R)$ للهولة.
لأن مسقط M في ox هو α ومسقطها في z هو R

* المحاضرة التاسعة: ص 6 - سطر 5 -

- الخطأ: $(x^2+y^2)\cos^2 2t = (\frac{1}{2}\sin^2 2t + 2) z^2$

- الصواب: $(x^2+y^2)\cos^2 2t = (\frac{1}{2}\sin^2 2t + 2) 2z^2$

* المحاضرة العاشرة:

تنبيه: المسألة الثانية ((ص 5)) مطلوبة وليست إضافية.

ص 11 سطر 11 -

الخطأ: $o'_2 = 1\alpha$. الصواب: $o'_2 = 1$

سطر 13 - الخطأ: $o'_2\ 1\alpha$. الصواب: $o'_2\ 1$

السطر الرابع من الطلب 4 :

- الخطأ : $\vec{\Gamma}(B) = \vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{OB} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(B)\ \cancel{\vec{\Gamma}(B)}$
- الصواب : $\vec{\Gamma}(B) = \vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{OB} + \vec{\omega}\wedge\vec{u}(B)$

- المحاضرة الحادية عشر : ص 2 - السطر الأخير :

- الخطأ :

$$A, B, C \xrightarrow{\text{انسحاب } A} A_1, B', C' \xrightarrow{\text{دوران حول } A} A_1, B_1, C_1$$

الصواب : الدوران حول نقطة يعطينا زوايا أولر

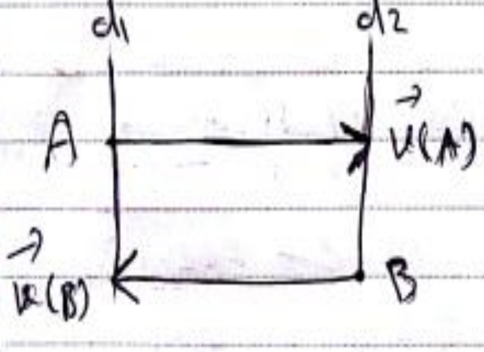
$$A, B, C \xrightarrow{\text{انسحاب } A} A_1, B', C' \xrightarrow[\psi,\theta,\varphi]{\text{دوران } A_1} A_1, B_1, C_1$$

م 13 - 14 : ص 9 السطر الأول :

- الخطأ : $x_1^2 + y_1^2 = \cancel{2}a^2$
الصواب : $x_1^2 + y_1^2 = a^2$

م 15-16 ص 4 :

- الحالة الثالثة : الرسمة :



ص 8 : المثال الثاني :

الخطأ : قضيب AB ينزلق طرفه A على نصف دائرة قطرها a

الصواب : ـ ـ ـ ـ ـ ـ دائرة ثابتة نصف قطرها a

* م 19-20 - طلب (5) ص 11 آخر أربع سطور:

- تكتب بشكل:

$$\vec{w} = a'\vec{k_1} + d'\vec{k} \overset{\text{تربيع}}{\Longrightarrow} w^2 = (a'\vec{k_1} + d'\vec{k})^2$$

$$\Rightarrow w^2 = a'^2 + d'^2 + 2a'd'\,\vec{k_1}\cdot\vec{k}$$

$$(\vec{k_1}\cdot\vec{k}) = |\vec{k_1}|\cdot|\vec{k}|\cdot\cos(\vec{k_1},\vec{k})$$

$$\cos(\vec{k_1},\vec{k}) = \frac{\pi}{8}$$

$$|\vec{k_1}| = |\vec{k}| = 1$$

$$= a'^2 + d'^2 + 2a'd'\cos(\vec{k_1},\vec{k})$$

$$\Rightarrow \cancel{\left(\frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}\right)^2} = \cancel{\left(\frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}\right)^2} + \frac{8}{\cancel{\cos\frac{\pi}{8}}}\cdot\cancel{\cos\frac{\pi}{8}}\cdot d' + d'^2$$

$$\Rightarrow (d'^2 + 8d') = 0$$

$$\Rightarrow d'(d'+8) = 0$$

* السطر الأخير من الصفحة 11

الخطأ: $d' = (8+d') = 0$

الصواب: $d'(8+d') = 0$

كل ما وضع عنه خط هو تصويب لما ورد بالمحاضرة.

م 19 - 20 صفحة $\boxed{12}$ طلب $\boxed{2}$ السطر 3 - من الطلب

- نعين سرعة النقطة B

$\vec{v}(B) = \vec{w} \wedge \vec{OB} = (\psi' \vec{k_1} + \varphi' \vec{k}) \wedge (OB \vec{k_1})$

- نوزع الجداء الخارجي على المجموع:

$\vec{v}(B) = (\psi' \vec{k_1} \wedge OB \vec{k_1}) + (\varphi' \vec{k} \wedge OB \vec{k_1})$

وبما أن الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين أو لهما نفس الحامل معدوم وهنا

$(\vec{k_1} \wedge \vec{k_1}) = 0$

$\Rightarrow \vec{v}(B) = \varphi' \vec{k} \wedge OB \vec{k_1}$

وبما أننا نريد تعيين السرعة في القاعدة فيجب تحويل $\vec{k}$ حسب مصفوفات التحويل نجد:

$\vec{k} = \cos\theta \, \vec{k_1} - \sin\theta \, \vec{u_1}$; $\vec{u_1} = (-\sin\psi \, \vec{i_1} + \cos\psi \, \vec{j_1})$

توضيح:

$\vec{i_1} \wedge \vec{k_1} = -\vec{j_1}$

$\vec{j_1} \wedge \vec{k_1} = \vec{i_1}$

$k = \sin\frac{\pi}{8} \cdot \sin\psi \, \vec{i_1} - \sin\frac{\pi}{8} \cos\psi \, \vec{j_1} + \cos\frac{\pi}{8} \vec{k_1}$

$\vec{v}(B) = (\varphi' \sin\psi \sin\frac{\pi}{8} \vec{i_1} - \varphi' \cos\psi \sin\frac{\pi}{8} \vec{j_1} + \varphi' \cos\frac{\pi}{8} \vec{k_1}) \wedge \vec{OB} \vec{k_1}$

$= (\varphi' \sin\psi \sin\frac{\pi}{8}) \vec{i_1} \wedge OB \vec{k_1} + (-\varphi' \cos\psi \sin\frac{\pi}{8}) \vec{j_1} \wedge OB \vec{k_1}$

$= (-\varphi' \sin\psi \sin\frac{\pi}{8}) OB \vec{j_1} + (-\varphi' \cos\psi \sin\frac{\pi}{8}) OB \vec{i_1}$

أسرة سيريا ماث تتمنى لكم امتحاناً موفقاً سائلين الله التوفيق لنا ولكم....وتأمل بأن تكون قد أدت مهمتها على أكمل وجه بتبسيط وتوضيح فقرات المقرر ...فإن احسنا فمن الله وإن أخطأنا فمن أنفسنا ومن الشيطان.... راجين منكم الدعاء .

" وكل عام وأنتم بألف خير "

كل الشكر لمن ساهم في إنجاز هذا المقرر حتى وإن لم يذكر... وجعله الله فى صحائف أعماله

انتهى المقرر

مستعدين لتلقي استفساراتكم واسئلتكم على غروبكم
syria Math 3rd Year

إعداد: محمد علي فليون ** هديل سعيد ** خديجة الرفاعي