نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: التاسعة عشرة والعشرون

عنوان المحاضرة: الحركة المحصلة لنقطة مادية (تركيب الحركات)

سنبدأ معكم أصدقائي في هذه المحاضرة ببحث جديد بعنوان الحركة المحصلة لنقطة مادية والآن لنبدأ ..

شروط التدحرج دون انزلاق في الحركة المستوية

إن حركة المركز الآني للدوران على المتدحرج بالنسبة للمستوي المتحرك هي حركة نسبية وسرعة انتقالها (المركز الآني) على المتدحرج هي سرعة نسبية يرمز لها بـ $\left(\vec{V_r}(I)\right)$.

إن حركة نقطة ما مثل (P) من المستوي المتحرك والتي تنطبق على (I) في لحظة ما بالنسبة للمستوي الثابت هي حركة جرية والسرعة في هذه الحركة تكون مساوية للصفر أي $(\vec{V_e}(I) = \vec{0})$ حسب تعريف المركز الآني للدوران ، كما أن حركة النقطة (I) بالنسبة للجملة الثابتة (القاعدة) هي حركة مطلقة وسرعتها $\left(\vec{V_a}(I)\right)$ ، وحسب تركيب الحركات فإن :

$$\vec{V_a}(I) = \vec{V_r}(I) + \vec{V_e}(I)$$

وبما أن $\vec{V_e}(I) = \vec{0}$ فإن :

$$\vec{V_a}(I) = \vec{V_r}(I)$$

نستنتج أن سرعة انتقال (I) على القاعدة (السرعة المطلقة) تساوي سرعة انتقال (I) على المتدحرج (السرعة النسبية) وبالتالي المسافة التي تقطعها I ((المركز الآني للدوران))على القاعدة تساوي المسافة التي تقطعها على المتدحرج .

الخلاصة

إن العبارات التالية متكافئة ويعد كل منها هو شرط للمتدحرج دون انزلاق لمنحني ما (c) على منحني ثابت (c_1) :

أولا : نقطة التماس بين المنحنيين c_1 , c هي المركز الآني للدوران .

ثانيا : السرعة الجرية لنقطة التماس تساوي الصفر "معدومة"

ثالثا : السرعة المطلقة للمركز الآني للدوران يساوي السرعة النسبية للمركز الآني للدوران .

رابعا : المسافة التي تقطعها نقطة التماس على المنحني (c) تساوي المسافة التي تقطعها نقطة التماس على المنحني (c_1) في فترة زمنية واحدة (أي المسافة على القاعدة تساوي المسافة على المتدحرج

الحركة المحصلة لنقطة مادية (تركيب الحركات)

تعيين موضع وسرعة متجه في الجملتين المتحركة والثابتة :

لتكن (S) مجموعة متحركة (متماسكة) ولنعرف عليها جملة محاور متماسكة معها $(oxyz)$ ولتكن (S_1) مجموعة ثابتة ولنعرف عليها جملة محاور ثابتة $(ox_1y_1z_1)$ ، وليكن $\vec{A}$ متجه ما متغير بالنسبة لـ S .

يتعين المتجه $\vec{A}$ إذا عرفت مركباته على الجملة $(oxyz)$ المتماسكة بالشكل :

$$\vec{A}\Big|_M = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

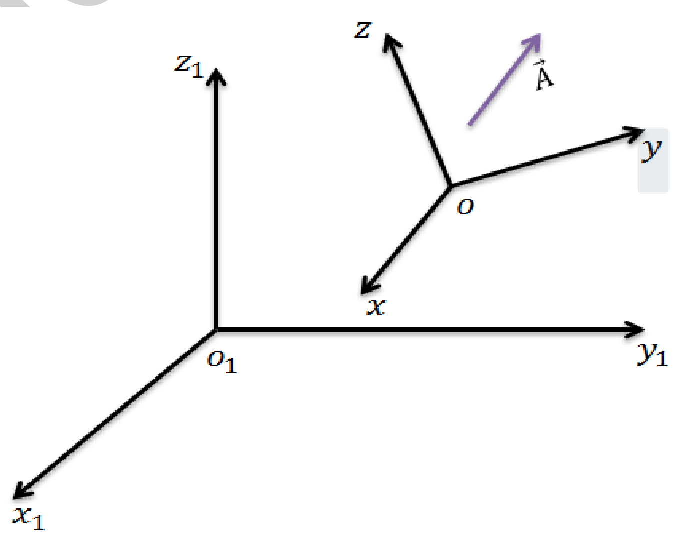
يتعين المتجه $\vec{A}$ إذا عرفت مركباته على الجملة $(ox_1y_1z_1)$ الثابتة بالشكل :

$$\vec{A}\Big|_F = A_{x_1}\vec{\imath_1} + A_{y_1}\vec{\jmath_1} + A_{z_1}\vec{k_1}$$

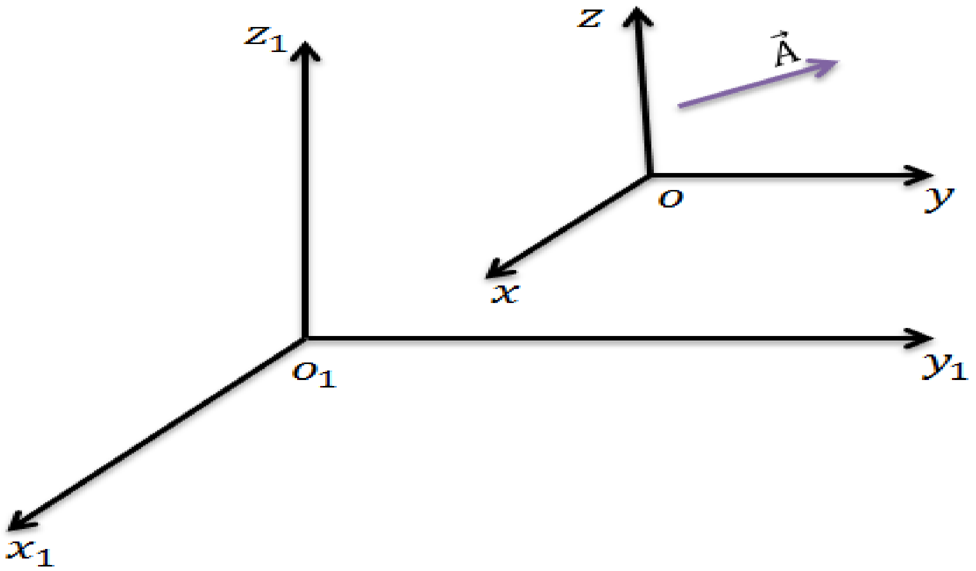
حيث لدينا وبشكل عام :

$$A_x \neq A_{x_1} \ , \quad A_y \neq A_{y_1} \ , \quad A_z \neq A_{z_1}$$

وإن متجهات الواحدة (i_1, j_1, k_1) ثابتة ،
بينما متجهات الواحدة (i, j, k) متغيرة ،
ويمكن تعيين العلاقة بينهما إذا عرفنا حركة (S) بالنسبة لـ (S_1) وسنميز الحالات التالية :



1- إذا تحركت الجملة المتماسكة (M) بالنسبة للجملة الثابتة (F) بحركة انسحابية :



نعلم إنه يمكن اختيار الجملة $(oxyz)$ موازية للجملة $(ox_1y_1z_1)$ في الجملة الانسحابية وتحافظ هذه المحاور على مناحيها أثناء الحركة فيكون :

$$\vec{i} = \vec{i_1} \quad , \vec{j} = \vec{j_1} \quad , \vec{k} = \vec{k_1}$$

$$A_x = A_{x_1} \quad , \quad A_y = A_{y_1} \quad , \quad A_z = A_{z_1}$$

أي أن مركبات المتجه $\vec{A}$ لا تتأثر بحركة الجملة المتماسكة S .

وإذا حسبنا مشتق المتجه $\vec{A}$ بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة المتماسكة S نجد :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M = A'_x\vec{i} + A'_y\vec{j} + A'_z\vec{k}$$

وإذا حسبنا مشتق المتجه $\vec{A}$ بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة الثابتة S_1 نجد :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = A'_{x_1}\vec{i_1} + A'_{y_1}\vec{j_1} + A'_{z_1}\vec{k_1}$$

ولما كان :

$$\vec{i} = \vec{i_1} \quad , \vec{j} = \vec{j_1} \quad , \vec{k} = \vec{k_1}$$

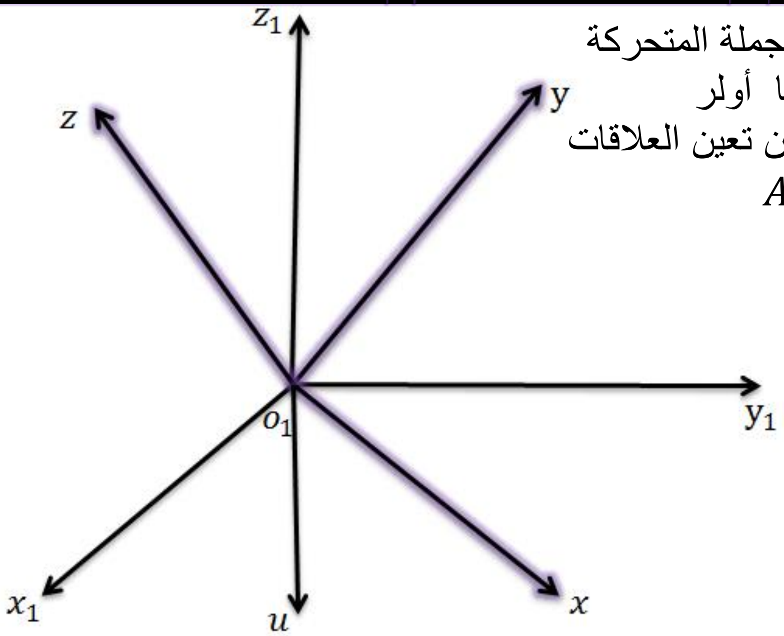
$$A_x = A_{x_1} \quad , \quad A_y = A_{y_1} \quad , \quad A_z = A_{z_1}$$

$$A'_x = A'_{x_1} \quad , \quad A'_y = A'_{y_1} \quad , \quad A'_z = A'_{z_1}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F$$

2- إذا تحركت الجملة المتماسكة M بالنسبة للجملة الثابتة F بحركة دورانية حول نقطة ثابتة :

إن متجهات الواحدة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ للجملة المتحركة تتعين في هذه الحالة بتابعية زوايا أولر كما مر معنا سابقاً ، وبالتالي يمكن تعين العلاقات التي تربط المركبات A_x,A_y,A_z بالمركبات A_{x_1},A_{y_1},A_{z_1}



إن مشتق الشعاع $\vec{A}$ بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة المتماسكة M هو :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M = A'_x\vec{\imath} + A'_y\vec{\jmath} + A'_z\vec{k}$$

مشتق الشعاع $\vec{A}$ بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة الثابتة F هو :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = A'_{x_1}\vec{\imath_1} + A'_{y_1}\vec{\jmath_1} + A'_{z_1}\vec{k_1}$$

أما اشتقاق العلاقة : $A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ بالنسبة للجملة الثابتة ، حيث لدينا $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k},A_x,A_yA_z$ متغيرة وبالتالي يصبح المشتق جداء ومنه :

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \underbrace{A'_x\vec{\imath} + A'_y\vec{\jmath} + A'_z\vec{k}}_{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M} + A_x\frac{d\vec{\imath}}{dt} + A_y\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + A_z\frac{d\vec{z}}{dt}$$

ولأن الحركة دورانية فتصبح العلاقة بالشكل :

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M + A_x(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}) + A_y(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}) + A_z(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M \vec{\omega}\wedge\left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{A} \ldots.(*)$$

ومن هذه العلاقة $(*)$ يمكننا التحويل من الجملة المتماسكة إلى الجملة الثابتة (موضع وسرعة وتسارع)
ومنه نجد أن مشتق أي شعاع في الجملة المتحركة (المتماسكة) M بالنسبة للجملة الثابتة F يساوي مشتق الشعاع بالنسبة للجملة المتحركة M مع الجداء الخارجي للشعاع بـ $\vec{\omega}$.

3- حركة الجملة المتماسكة (M) بالنسبة للجملة الثابتة (F) (حركة عامة) "انسحاب + دوران "

نعلم أنه في الحركة العامة لمجموعة متماسكة هي انسحاب مع القطب ودوران حول هذا القطب وبما أن الحركة الانسحابية لا تؤثر على المتجهات ومشتقاتها فيمكن كتابة العلاقة $(*)$ على الشكل التالي وذلك باستخدام المؤثر التفاضلي بالنسبة لكمية شعاعية :

$$D|_F = D|_M + \vec{\omega} \wedge \dots .$$

نطبق $(*)$ على $\vec{\omega}$:

$$\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}}_{\substack{0 \\ \text{متوازيان}}}$$

تركيب الحركات لنقطة مادية

لتكن (M) نقطة مادية متحركة بالنسبة لمجموعة متماسكة S ، فإذا كانت المجموعة المتماسكة S متحركة بدورها بالنسبة لمجموعة ثابتة S_1 فإننا نعرف الحركات التالية :
الحركة النسبية هي حركة النقطة المادية (M) بالنسبة للجملة المتحركة ونرمز لها بـ S.
الحركة الجرية هي حركة النقطة المادية (M) المتماسكة مع الجملة $(oxyz)$ المتماسكة بالنسبة للجملة الثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$
الحركة المطلقة هي حركة النقطة المادية (M) المتماسكة مع الجملة $(oxyz)$ المتماسكة بالنسبة للجملة الثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$ وهي الحركة المحصلة للحركتين النسبية والجرّية .

مثال

راكب يتحرك على باخرة ,عندها حركته بالنسبة لشيء ثابت في الباخرة هي حركة نسبية
إذا جلس الراكب ومرت الباخرة بجوار جزيرة ما فإن حركة الراكب مع الباخرة بالنسبة للجزيرة هي حركة جرية أما حركة الراكب عندما يمشي في الباخرة هي حركة مطلقة بالنسبة لراصد في الجزيرة.

المسار والسرعة والتسارع النسبي :

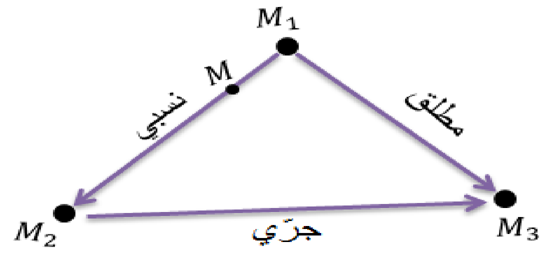
هو مسار النقطة المادية M في الحركة النسبية (M تتحرك من $M_1 \longrightarrow M_2$) وسرعتها هي السرعة النسبية $\vec{V_r}(M)$ وتسارعها هو التسارع النسبي $\vec{\Gamma_r}(M)$.

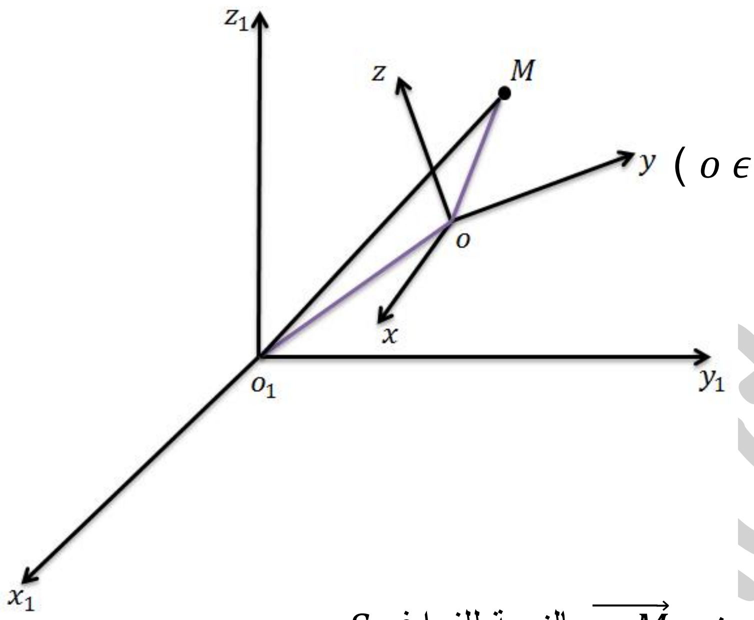
المسار والسرعة والتسارع الجرّي :

هو مسار النقطة المادية M في الحركة الجرّية (M تتحرك من $M_2 \longrightarrow M_3$) وسرعتها هي السرعة الجرّية $\vec{V_e}(M)$ وتسارعها هو التسارع الجريّ $\vec{\Gamma_e}(M)$.

المسار والسرعة والتسارع المطلق :

هو مسار النقطة المادية M في الحركة المطلقة (M تتحرك من $M_3 \longrightarrow M_1$) وسرعتها هي السرعة المطلقة $\overrightarrow{V_a}(M)$ وتسارعها هو التسارع المطلق $\overrightarrow{\Gamma_a}(M)$.





تعيين شعاع الموضع لنقطة المادية M

يعطى شعاع الموضع بالعلاقة : (بحيث $o_1 \epsilon S_1$ و $o \epsilon S$)

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = (x_0, y_0, z_0) + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

إن (x, y, z) تعين الحركة النسبية

وأيضاً $(x_0, y_0 z_0)$ تعين جزء من الحركة الجرية

وكما أن $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ تعين زوايا أولر (ψ, φ, θ)

التي تعين الجزء الثاني من الحركة الجرية .

تركيب السرع لنقطة مادية M

لحساب السرعة المطلقة للنقطة M ، يكفي اشتقاق الموضع $\overrightarrow{o_1M}$ بالنسبة للفراغ S_1 .

$$\overrightarrow{V_a}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{o_1M}}{dt}\right|_F = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt}\right|_F}_{\vec{V}(o)} + \left.\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\right|_F$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M) = \vec{V}(o) + \left.\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \underbrace{\vec{V}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}}_{\overrightarrow{V_e}(M)}$$

حيث $\vec{\omega}$ هو شعاع الدوران في حركة S بالنسبة لـ S_1 .

$$\Longrightarrow \underbrace{\overrightarrow{V_a}(\mathrm{M})}_{\text{مطلقة}} = \underbrace{\overrightarrow{V_r}(M)}_{\text{نسبية}} + \underbrace{\overrightarrow{V_e}(M)}_{\text{جرية}}$$

وهذا يعني أن السرعة المطلقة هي المجموع الهندسي للسرعتين النسبية (وهي سرعة النقطة بالنسبة للجملة S) والجرّية (وهي سرعة S بالنسبة للجملة S_1) .

عبارة التسارع

إن التسارع المطلق للنقطة M هو المشتق الزمني للسرعة المطلقة للنقطة M بالنسبة للفراغ الثابت المتماسك مع S_1 ونرمز له $\overrightarrow{\Gamma_a}(M)$ ، إذا لتعيينه نشتق العلاقة الشعاعية للسرعة المطلقة المعطاة بالشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \vec{V}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}}$$

وبالتالي نجد :

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)\Big|_F = \frac{d\overrightarrow{V_a}(M)}{dt}\bigg|_F = \frac{d\overrightarrow{V_r}(M)}{dt}\bigg|_F + \frac{d\vec{V}(o)}{dt}\bigg|_F + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\bigg|_F \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\bigg|_F$$

حيث نعلم أن $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_F$ وهو التسارع الزاوي ، و $\vec{\Gamma}(o) = \frac{d\vec{V}(o)}{dt}\Big|_F$

لدينا من علاقة التحويل من الجملة الثابتة إلى الجملة المتماسكة

$$\frac{d\overrightarrow{V_r}(M)}{dt}\bigg|_F = \overrightarrow{\Gamma_r}(M) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\bigg|_F = \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\bigg|_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = \overrightarrow{\Gamma_r}(M) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r} + \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}\bigg|_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{\Gamma_a}(M)}_{\text{تسارع مطلق}} = \underbrace{\overrightarrow{\Gamma_r}(M)}_{\text{التسارع النسبي}} + \underbrace{\vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}\right)}_{\text{التسارع الجري}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r}}_{\text{التسارع المتمم}}$$

نطبق علاقة جيبس $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}\right) = -\omega^2 \overrightarrow{oM}$

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M) = \overrightarrow{\Gamma_r}(M) + \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{oM} + 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

حيث **نرمز للتسارع المتمم بـ** $\overrightarrow{\Gamma_c}(M) = 2\overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{V_r}$

ونعلم أن $\overrightarrow{\Gamma_e}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{oM}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = \overrightarrow{\Gamma_r}(M) + \overrightarrow{\Gamma_e}(M) + \overrightarrow{\Gamma_c}(M)$$

سؤال: متى يكون التسارع المتمم معدوم ؟؟

الجواب : إما $\vec{\omega} = \vec{0}$ الحركة الجرية هي حركة انسحابية فقط

أو $\overrightarrow{V_r} = \vec{0}$ التوازن النسبي للنقطة M بالنسبة للجملة المتماسكة S ، أو $\overrightarrow{\omega_e} \parallel \overrightarrow{V_r}$

عندما يصبح التسارع المتمم معدوم ، يصبح التسارع المطلق هو المجموع الهندسي للتسارع النسبي والجرّي .

الدراسة التحليلية للحركة المحصلة

دائماً في الدراسة التحليلية نبدأ باختيار جملتي محاور ثابتة ومتماسكة ، ولتكن $oxyz$ جملة محاور احداثية متماسكة مع S ، ولتكن $o_1x_1y_1z_1$ جملة محاور احداثية ثابتة ، عندئذٍ :

يعطى شعاع الموضع لنقطة ما ولتكن M من الجسم الصلب في الجملة الثابتة بالعلاقة :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = (x_0,y_0,z_0) + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \ldots\ldots \$$$

$$\overrightarrow{o_1M} = (x_0,y_0,z_0) + x(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) + y(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) + z(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$$

$$\text{مركبات النقطة } M \begin{cases} x_1 = x_0 + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 \\ y_1 = y_0 + x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3 \\ z_1 = z_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 \end{cases}$$

حيث $\vec{k} = (\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$, $\vec{\jmath} = (\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $\vec{\imath} = (\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ مقادير تابعة للزمن تتعين بتابعية زوايا أولر ، (x,y,z) هي الاحداثيات النسبية للنقطة M وهي مقادير تابعة للزمن ايضاً
(x_0,y_0,z_0) احداثيات النقطة o مبدأ الجملة المتحركة وهي ايضاً متغيرة بالنسبة للزمن ، وبالتالي تتعين احداثيات النقطة M المطلقة (x_1,y_1,z_1) بتابعية تسع وسطاء تابعة كلها للزمن .
و (x_0,y_0,z_0) جزء في جرية و $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ مع (x_0,y_0,z_0) جرية و (x',y',z') سرعة نسبية و (x_1',y_1',z_1') سرعة مطلقة
لتعين السرعة المطلقة نشتق العلاقة \$ فنجد :

$$\vec{V_a}(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{\imath}}{dt} + y\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k} + x\,\vec{\imath'} + y\vec{\jmath'} + z\vec{k'} \ldots (\$\$)$$

علاقات بواصون $\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{\imath}$, $\frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}$, $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k} + x(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}) + y(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}) + z(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k} + \vec{\omega}\wedge(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$$

حيث $\vec{V_e}(M) = \vec{V}(o) + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$ و $\vec{V_r}(M) = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M)$$

لتعيين التسارع نشتق السرعة من العلاقة (\$\$) فنجد :

$$\vec{\Gamma_a}(M) = \frac{d2\overrightarrow{o_1o}}{dt^2} + x''\vec{\imath} + y''\vec{\jmath} + z''\vec{k} + x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'} + x\,\vec{\imath''} + y\,\vec{\jmath''} + z\,\vec{k''} + x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}$$

$$\vec{\Gamma_a}(M) = \underbrace{x''\vec{\imath} + y''\vec{\jmath} + z''\vec{k}}_{\vec{\Gamma_r}(M)} + \underbrace{2[x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}]}_{\vec{\Gamma_c}(M)} + \underbrace{\vec{\Gamma}(o) + x\,\vec{\imath''} + y\,\vec{\jmath''} + z\,\vec{k''}}_{\vec{\Gamma_e}(M)}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = \overrightarrow{\Gamma_r}(M) + \overrightarrow{\Gamma_e}(M) + \overrightarrow{\Gamma_c}(M)$$

" دساتير بور "

في بعض المسائل يكون ايجاد شعاع التسارع المطلق في الجملة المتماسكة اسهل من ايجاده في الجملة الثابتة لذلك نحتاج لطريقة لإيجاد هذا الشعاع في الجملة المتماسكة وهذه الطريقة هي باستخدام دساتير بور ، نعلم أن التسارع المطلق هو المشتق الزمني للسرعة المطلقة $\overrightarrow{V_a}(M)$ في الفراغ الثابت ، وبالتالي :

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(\mathrm{M}) = \left.\frac{d\overrightarrow{V_a}(M)}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\overrightarrow{V_a}(M)}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_a}(M)$$

حيث :

$$\overrightarrow{V_a}(V_x, V_y, V_z) \quad , \quad \vec{\omega}(p, q, r) \quad , \quad \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$$

حيث

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_a}(M) = (qV_z - rV_y)\vec{i} + (rV_x - pV_z)\vec{j} + (pV_y - rV_x)\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} + qV_z - rV_y \\ \dfrac{dV_y}{dt} + rV_x - pV_z \\ \dfrac{dV_z}{dt} + pV_y - qV_x \end{cases}$$

وهذه الدساتير الثلاث هي دساتير بور التي تحدد التسارع المطلق على الجملة المتماسكة .

مسألة دورات

يتدحرج مخروط دوراني S رأسه الثابت o ، زاويته الرأسية $\frac{\pi}{4}$ ، نصف قطر قاعدته a دون انزلاق على السطح الخارجي لمخروط دوراني ثابت S_1 ومشترك معه بالرأس o

المطلوب :

1) عين معادلات حركة S علماً أن نصف قطرالمخروط S تساوي a نصف قطر قاعدة S وأن القيمة العددية لسرعة مركز القاعدة هي $|v(A) = 4a|$

2) عين سرعة نقطة B من محيط القاعدة S_1 في النقطة التي تقع فيها B على محور المخروط S_1 .

الحل

بما أن المخروط S يتدحرج على المخروط الثابت بنصف قاعدته وزاوية المخروط الثابت هي فقط $\frac{\pi}{4}$

فتكون الزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، ونعلم ان شعاع الدوران يعطى بالعلاقة :

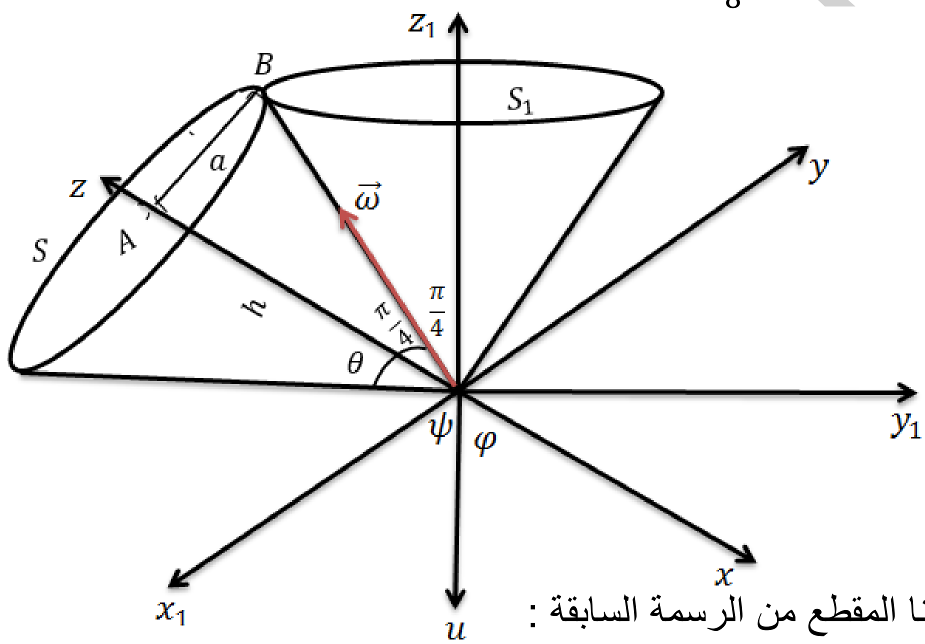
$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\overrightarrow{u_1} + \varphi'\vec{k} \Rightarrow \vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\vec{k}$$

وسرعة النقطة A هي : $\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oA}$ وبأخذ القيمة العدية نجد :

$$|\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}|.|\overrightarrow{oA}|.\sin(\vec{\omega}, \overrightarrow{oA}) \Rightarrow |\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}|.|\overrightarrow{oA}|.sin\frac{\pi}{8} \dots (1)$$

من نص المسألة القيمة العددية لسرعة مركز القاعدة هي $4a$ أي أن $|\vec{V}(A)| = 4a$

ومنه نجد بالتعويض في (1) نجد : $4a = |\vec{\omega}|.h.sin\frac{\pi}{8} \dots\dots(*)$.



لحساب الارتفاع h لدينا المقطع من الرسمة السابقة :

ومنه يوجد لدينا المقابل و المجاور للزاوية $\frac{\pi}{8}$ ، ولدينا $\boxed{tan\,\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}}$

ومنه نجد : $tan\frac{\pi}{8} = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{tan\frac{\pi}{8}}$ وبالتالي بتعويض h بالعلاقة $(*)$ نجد :

$$4a = |\vec{\omega}|.\frac{a}{tan\frac{\pi}{8}}.sin\frac{\pi}{8} \Rightarrow |\vec{\omega}| = 4.\frac{tan\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}}$$

$$\boxed{\Rightarrow |\vec{\omega}| = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}}$$

بالعودة لعلاقة السرعة :

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oA}$$

ولدينا $\overrightarrow{oA}$ محمول على شعاع الواحدة $\vec{k}$ (لأنه موجود على محور المخروط) ، وطوله h بالتالي :

$$\vec{V}(A) = (\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\vec{k}) \wedge (h\vec{k})$$

بتوزيع الجداء الخارجي على المجموع وسحب الثوابت خارج جداء الأشعة ، نجد :

$$\vec{V}(A) = h\psi'(\overrightarrow{k_1} \wedge \vec{k}) + h\varphi'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

وبما أن الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين أو على نفس الحامل معدوم ومنه $(\vec{k} \wedge \vec{k}) = 0$

ولدينا : $|\vec{k}| = |\overrightarrow{k_1}| = 1, sin\frac{\pi}{2} = 1$; $|\overrightarrow{k_1} \wedge \vec{k}| = |\vec{k}|.|\overrightarrow{k_1}|.sin\frac{\pi}{2} = 1$

ومنه:

$$|\vec{V}(A)| = h\psi'$$

بتعويض h بقيمتها وأخذ القيمة العددية للسرعة نجد :

$$4a = \frac{a}{tan\frac{\pi}{8}}\psi' \Rightarrow 4 = \psi' \Rightarrow \psi' = \frac{4}{tan\frac{\pi}{8}}$$

بالمكاملة :

$$\psi = \frac{4}{tan\frac{\pi}{8}}t + \psi_0$$

من شروط البدء $t = 0, \psi = 0$, ومنه نجد $\psi_0 = 0$ وبالتالي

$$\boxed{\psi = \frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}t} \dots\dots\dots (2)$$

لإيجاد φ من العلاقة :

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\,\vec{k} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} \omega^2 = (\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\,\vec{k})^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \psi'^2 + \varphi'^2 + 2\left(\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\,\vec{k}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}\right)^2 = \left(\frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}\right)^2 + \varphi'^2 + 2.\frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}.cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow 0 = 8\varphi' + \varphi'^2 \Rightarrow \varphi' = (8 + \varphi') = 0$$

إما $\varphi' = 0$ ومنه $\varphi = c$ ((ولايمكن أن تكون الزاوية ثابتة)) مرفوضة

أو $\varphi' = -8$ ومنه $\varphi' = -8$ ومنه $\varphi = -8t + c$ ومنه $\boxed{\varphi = -8t}$

2) تعيين سرعة النقطة B

$$\vec{v}(B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oB} = (\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\vec{k}) \wedge (oB\vec{k})$$

بتوزيع الجداء الخارجي على المجموع وسحب الثوابت خارج جداء الأشعة ، نجد :

$$\vec{V}(B) = (oB\vec{k}) \wedge \psi'\overrightarrow{k_1} + (oB\vec{k})\varphi'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

وبما أن الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين أو على نفس الحامل معدوم ومنه $(\vec{k} \wedge \vec{k}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{V}(B) = (oB\overrightarrow{k_1}) \wedge \varphi'\vec{k}$$

وبما أننا نريد تعيين السرعة على القاعدة فيجب تحويل $\vec{k}$ حسب مصفوفات التحويل نجد :

$$\vec{k} = \cos\theta\,\overrightarrow{v_1} - \sin\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

ويجب تحويل لـ $\overrightarrow{v_1}$ إلى الجملة الثابتة (القاعدة) فتصبح $\overrightarrow{v_1} = (-\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \cos\psi\,\overrightarrow{J_1})$

$$\overrightarrow{v_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{v_1} - \sin\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

وبالتعويض في $\vec{k}$ نجد :

$$\vec{k} = sin\frac{\pi}{8}.\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} - sin\frac{\pi}{8}.\cos\psi\,\overrightarrow{J_1} + cos\frac{\pi}{8}\overrightarrow{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B) = (oB\overrightarrow{k_1}) \wedge \left(\varphi'\, sin\frac{\pi}{8}.\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} - \varphi'\, sin\frac{\pi}{8}.\cos\psi\,\overrightarrow{J_1} + \varphi'\, cos\frac{\pi}{8}\overrightarrow{k_1}\right)$$

مبرهنة : إن المركز الآني للدوران إن وجد فهو وحيد .

الإثبات

نفرض جدلاً أن (I) و (I') مركزان آنيان للدوران في لحظة معينة حيث $\vec{v}(I) = 0, \vec{v}(I') = 0$ عندئذٍ باختيار (I) قطب للحركة في اللحظة المذكورة وبالتالي :

$$\underbrace{\vec{v}(I')}_{0} = \underbrace{\vec{v}(I)}_{0} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{II'} \Longrightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{II'} = 0$$

فإما إحدى الشعاعين معدومين أو أنهما متوازيين أي :

((إما $\vec{\omega} = \vec{0}$ وهي مرفوضة لأن الحركة دورانية))

((أو $\vec{\omega} \parallel \overrightarrow{II'}$ وهي مرفوضة لأن $\vec{\omega} \perp \overrightarrow{II'}$))

((أو $\overrightarrow{II'} = \vec{0}$ وهذا يعني أن (I) تنطبق على (I'))) ويتم المطلوب .

انتهت المحاضرة