

نظري

◀ دكتور المادة: محمد الشيخ

◀ عنوان المحاضرة: المنطقه

◀ المحاضرة: الرابعة عشر

**المستوى العلمي :** أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- تعريف (المنطقة و المجموعة المحدبة و المجموعة النجمية).

٢- أمثلة.

٣- ملاحظات .

**المنطقة:** هي مجموعة مفتوحة و مترابطة في آن واحد .

أمثلة :

(١) كل قرص (مفتوح أو مغلق) هو منطقة لأن أي نقطتين في قرص يمكن الوصل بينهما بخط مضلعي واقع بأكمله في القرص.

(٢) أي نصف مستوي مفتوح ((دون حافته)) أو مغلق ((مع حافته)) هو عبارة عن مجموعة مترابطة،

أي نصف مستوي مفتوح هو منطقة أما نصف المستوي العلوي المغلق ليس بمنطقة.

(٣) أي شريط شاقولي أو أفقي مفتوح ((دون حافته)) أو مغلق ((مع حافته)) أو لا مفتوح ولا مغلق ((دون إحدى حافتيه)) هو مجموعة مترابطة ،

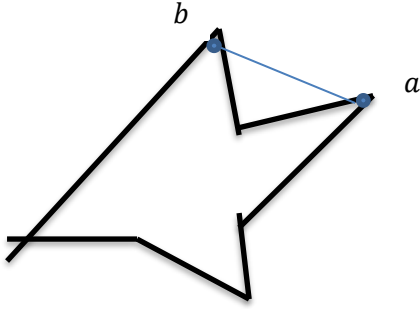
وإذا كان الشريط مفتوح فهو منطقة.

(٤) أي مجموعة محدبة هي مجموعة مترابطة والعكس في الحالة العامة غير صحيح.

**المجموعة المحدبة:** نقول عن مجموعة  $A \subseteq \mathbb{C}$  أنها محدبة إذا أمكن الوصل بين أي نقطتين منها بقطعة مستقيمة واحدة واقعة بكاملها فيها.

إن جميع الأمثلة السابقة هي مجموعات محدبة ((الأقراص وأنصاف الأقطار والأشرطة))

◀ **خاصة :** كل مجموعة محدبة مترابطة والعكس غير صحيح في الحالة العامة **ومثال** على ذلك المجموعة



إن هذه المجموعة مترابطة لأنه  
يمكن الوصل بين أي نقطتين منه  
بخط مضلعي (مكون من خط أو خطين على الأكثر)  
واقع بكامله في المجموعة وهي ليست محدبة لأننا  
لم نستطيع الوصل بين النقطتين  $a, b$  بقطعة  
مستقيمة واقعه بأكملها في المجموعة

أي مجموعة تكون محدبة و مفتوحة تكون مترابطة.

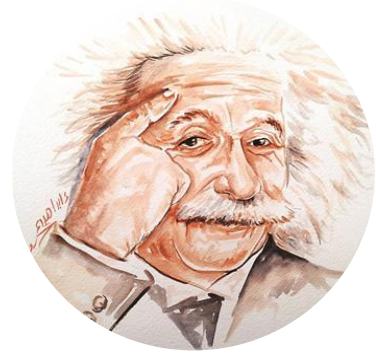
(٥) كل مجموعة نجمية هي مجموعة مترابطة و العكس غير صحيح .

### المجموعة النجمية :

نقول عن  $A$  محتوى في  $C$  أنها مجموعة نجمية إذا وجد فيها نقطة  $a$  (واحدة على الأقل) يمكن وصلها  
بجميع نقاط  $A$  بقطعة مستقيمة واقعة فيها نسمي  $a$  مركزاً للنجمة .

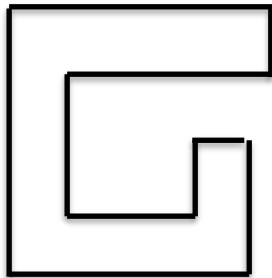
مركز النجمة يعني وحيد

أما عندما نقول مركزاً يعني  
يمكن وجود عدة مراكز



◀ **ملاحظة :** إن أي مجموعة محدبة هي نجمية تصلح جميع نقاطها مراكز.

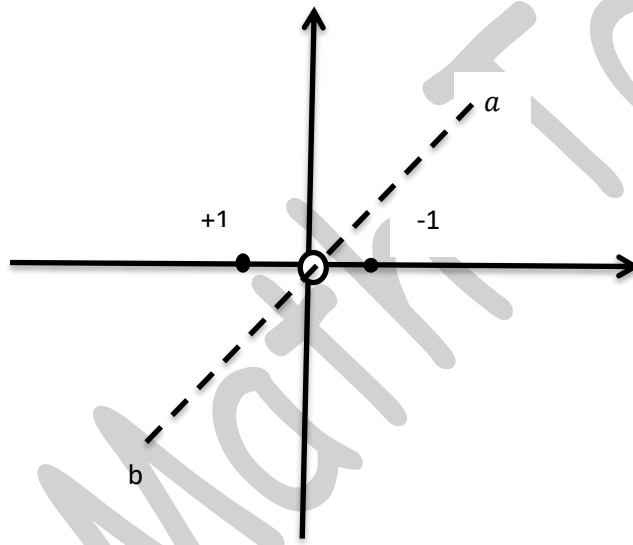
\*ليست كل مترابطة نجمية والمجموعة في الشكل التالي هي مجموعة مترابطة ولكنها ليست نجمية لأننا لا  
يمكننا أن نجد نقطة يمكن وصلها بجميع نقاط المجموعة بقطع مستقيمة.



سؤال : هل  $\mathbb{C}^*$  هي مجموعة نجمية ؟

لنفرض جدياً أن  $\mathbb{C}^*$  نجمية أي يوجد نقطة ولتكن  $a$  تنتمي لـ  $\mathbb{C}^*$  تصلح أن تكون مركزاً لـ  $\mathbb{C}^*$

نصل  $a$  بالمبدأ بالاتجاه الآخر ولتكن  $b$  أي نقطة على نصف المستقيم غير الحامل لـ  $a$  وعندئذ القطعة المستقيمة الواصلة بين  $a, b$  لن تكون محتوية في  $\mathbb{C}^*$  لأنها ستمر من المبدأ أي استطعنا أن نجد نقطة من  $\mathbb{C}^*$  ولا يمكن وصلها بـ  $a$  بواسطة قطعة مستقيمة واقعة بكاملها من  $\mathbb{C}^*$  وهذا يعني أن  $a$  لا تصلح أن تكون مركزاً لـ  $\mathbb{C}^*$   
 $\mathbb{C}^*$  ليست محدبة (ولكنها مترابطة)



سؤال : هل  $\mathbb{C}^*$  منطقة ؟

الجواب نعم ، لأنها أولاً مترابطة ((يمكن الوصل بين أي نقطتين منها بخط مضلعي واقع بكامله فيها.

وهي مجموعة مفتوحة ((لأنها متممة لمجموعة وحيدة العنصر  $\{0\}$  وأي مجموعة وحيدة العنصر في فضاء متري تكون مغلقة .

**مبرهنة:** إذا كانت  $A$  مجموعة مترابطة ومفتوحة  $\Leftrightarrow$  يمكن الوصل بين أي نقطتين من  $A$  بخط مضلعي

واقع بكامله في  $A$ .

**نتيجة:** إذا وجدت نقطتان في مجموعة  $A$  ولم تتمكن من الوصل بينهما بخط مضلعي واقع بكامله في  $A$  فإن  $A$  ليست مفتوحة أو ليست مترابطة.

ملاحظة: إن لصاقة مجموعة مترابطة هي مجموعة مترابطة والعكس غير صحيح .

مثال على ذلك ، المجموعة  $A = \{z \in \mathbb{C} ; |Re z| > 0\}$  .

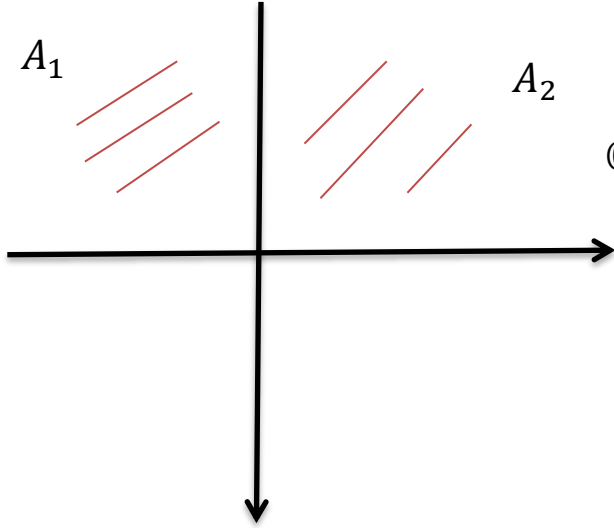
إن المجموعة  $A$  تمثل كل المستوي ما عدا  $z = 0$  .

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} ; Re z < 0\}$$

$$A_2 = \{z \in \mathbb{C} ; Re z > 0\}$$

$$A = A_1 \cup A_2$$

إن  $A$  ليست مترابطة لأحد أمرين :



(١) لأنها اجتماع لمجموعتين غير خاليتين ومفتوحتين ومنفصلتين.

(٢) أو لو أخذنا أي نقطة على يمين المحور وأي نقطة على يسار المحور ولتكن  $z_2$  فلا يمكن الوصل بين هاتين النقطتين بخط مضلعي واقع بكامله في المجموعة ،

لأنه لا بد من قطع المحور  $oy$  بالتالي خرجنا من المجموعة ، وبما أن  $A$  مجموعة مفتوحة ولم أتمكن من الوصل بين هاتين النقطتين  $z_1, z_2$  فإن المجموعة  $A$  ليست مترابطة.

وإن  $\bar{A} = \mathbb{C}$  عبارة عن مجموعة مترابطة .

• وقد يأتي السؤال بالشكل الآتي :

بين صحة أو خطأ ما يلي مع التعليل :

((إذا كانت المجموعة  $A$  غير مترابطة فإن لصاقتها غير مترابطة))

الجواب خطأ وللايِّتبات نستخدم المثال السابق.

### انتهت الحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي - باسل أبو عيسى - هالة مصطفى