نظرية الاحتمالات

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الحادية عشرة   عنوان المحاضرة : الاستقلال العشوائي وخواصه

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ خواص الاستقلال العشوائي

خواص الاستقلال العشوائي

١ـ الأحداث المستقلة عن نفسها هي فقط الأحداث شبه المستحيلة و الأحداث شبه الأكيدة .

البرهان :

من أجل أي حدث $A \in F$ بفرض أنّه مستقل عن نفسه أي :

$$P(\overbrace{A \cap A}^{=A}) = P(A).P(A) \Rightarrow P(A) = P^2(A) \Rightarrow P(A) - P^2(A) = 0$$

$$\Rightarrow P(A).[1 - P(A)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 = \text{الحدث شبه المستحيل} \\ P(A) = 1 = \text{الحدث شبه الأكيد} \end{cases}$$

٢) إن Ω و$\emptyset$ حدثان مستقلان عن أي حدث $A \in F$ يحقق : $0 < P(A) < 1$

البرهان

$$P(A \cap \emptyset) = P(A).P(\emptyset) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 \\ P(A).P(\emptyset) = 0 \end{cases}$$

إذاً A و $\emptyset$ مستقلان احتمالياً

$$P(A \cap \Omega) = P(A).P(\Omega) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} P(A \cap \Omega) = P(A) \\ P(A).P(\Omega) = P(A) \times 1 = P(A) \end{cases}$$

إذاً A و Ω مستقلان احتمالياً

٣) إذا كان A, B حدثين مستقلين عشوائياً من F فإنَّ :

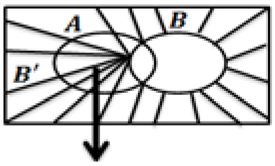
أ- A و B' مستقلان .

ب- A' و B مستقلان .

ت- A' و B' مستقلان .

◄ **البرهان :**

أ) $P(A\cap B') \overset{\text{حسب خواص الاحتمال}}{=} P(A/(A\cap B)) \overset{\text{حسب خواص الاحتمال}}{=} P(A)-P(A\cap B) \overset{A,B\ \text{مستقلان}}{=} P(A)-P(A)\mathrm{P(B)}$



$A\backslash B = A\cap B' = A\backslash(A\cap B)$

$$= P(A)[1-P(B)] = P(A).P(B')$$

ومنه A و B' مستقلان .

ب) $P(A'\cap B) = P(B/(A\cap B)) = P(B)-P(A\cap B) = P(B)-P(A).P(B)$

$$= P(B)[1-P(A)] = P(B).P(A')$$

ومنه A و B' مستقلان .

ت) $P(A'\cap B') = P(A\cup B)' = 1-P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$

$$= [1-P(A)]-P(B)+P(A).P(B) = P(A')-P(B)[1-P(A)]$$

$$= P(A')-P(B).P(A') = P(A')[1-P(B)] = P(A').P(B')$$

ومنه A' و B' مستقلان .

٤) إذا كانت $(A_i)_{1\le i\le n}$ متتالية من أحداث F مستقلة عشوائياً فإنّ الحوادث المتممة لها $(A'_i)_{1\le i\le n}$ تكون مستقلة أيضاً .

٥) لتكن $(A_i)_{i\le 1}$ متتالية الأحداث المتنافية مثنى مثنى وإذا كانت الأحداث B و A_i مستقلة عشوائياً من أجل كل $i\ge 1$ ، عندئذٍ يكون الحدثان B و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ مستقلين عشوائياً .

الإثبات

$$P\big(B\cap(\textstyle\bigcup_{i\ge 1} A_i)\big) = P(\textstyle\bigcup_{i\ge 1}(B\cap A_i)$$

وبسبب تنافي الأحداث A_i ينتج أنَّ $(B\cap A_i)_{i\ge 1}$ أيضاً أحداث متنافية وحسب مبرهنة سابقة أنَّ :

$$P\big(B\cap(\textstyle\bigcup_{i\ge 1} A_i)\big) = P(\textstyle\bigcup_{i\ge 1}(B\cap A_i)) = \sum_{i\ge 1} P(B\cap A_i)$$

ولكون B و A_i مستقلة من أجل كل i :

$$\Rightarrow P\left(B \cap (\cup_{i\geq 1} A_i)\right) = \sum_{i\geq 1} P(B \cap A_i) = \sum_{i\geq 1} P(B).P(A_i) = P(B)\sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

ولكون $(A_i)_{i\geq 1}$ أحداث متنافية ، فإنَّ :

$$P\left(B \cap (\cup_{i\geq 1} A_i)\right) = P(B)\sum_{i\geq 1} P(A_i) = P(B).P(\cup_{i\geq 1} A_i)$$

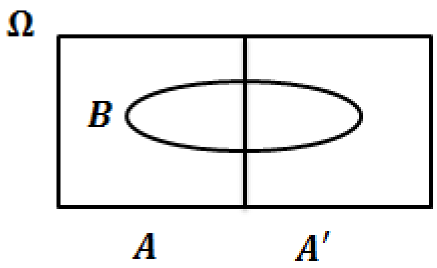
وبالتالي الحدثين مستقلين عشوائياً .

٦) من أجل B, A حدثين من F ويحققان الشرط : $P_A(B) = P_{A'}(B)$ ، عندئذٍ يكون : B, A مستقلين عشوائياً .

البرهان يمكن كتابة $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$ حيث : $B \cap A' , B \cap A$ حدثان متنافيان

فحسب قاعدة الاحتمال المركب يكون : $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$

$$P(B) = P(A).P_A(B) + P(A').P_{A'}(B)$$



ولدينا فرضاً : $P_A(B) = P_{A'}(B)$ ومنه :

$$P(B) = P(A).P_A(B) + P(A').P_A(B)$$

$$= P_A(B)[P(A) + P(A')] = P_A(B)[1] = P_A(B)$$

ومنه B و A مستقلان .

٧) بفرض C و B و A أحداث مستقلة من F وبفرض $A \subseteq B$ وكذلك A و C مستقلان عشوائياً وأيضاً B و C مستقلان عشوائياً ، عندئذٍ يكون C و B/A مستقلين .

الإثبات

$$(B/A) \cap C = [(B \cap C) \,/\, (A \cap C)]$$

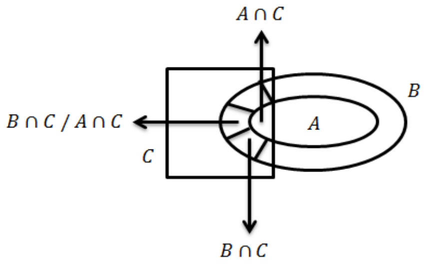
$$\mathrm{P}((\mathrm{B}/\mathrm{A}) \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}[(B \cap C)/(A \cap C)] = P(B \cap C) - P(A \cap C)$$

وبسبب استقلال كل من C و B و A فإنَّ:

$$P((B/A) \cap C) = P(B).P(C) - P(A).P(C) = P(C)[P(B) - P(A)]$$

ولكون $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$:

$$P((B/A) \cap C) = P(C)[P(B) - P(A)] = P(C).P(B/A)]$$



وبالتالي B/A و C مستقلين.

٨) يكون الصفان F_1, F_2 مستقلين عشوائياً إذا كان كل حدث من F_1 مستقلاً عن كل حدث من F_2 .

فمثلاً إذا كان A, B حدثان مستقلان من أجل : $F_1 = \{\emptyset, \Omega, A, A'\}$ جبر تام على A

$F_2 = \{\emptyset, \Omega, B, B'\}$ جبر تام على B فإنَّ : F_1, F_2 جبران مستقلان عشوائياً إذا كان B و A مستقلان.

٩) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة عشوائياً فعندئذٍ يكون :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\cup_{i=1}^{n} A_i)' = 1 - P(\cap_{i=1}^{n} A_i') = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i')$$

و ذلك لكون A_i مستقلة فإنَّ A_i' مستقلة

تعريف خاصية الاستقلال الشرطي

نقول عن حدثين $A, B \in F$ أنهما مستقلان شرطياً بالنسبة للحدث $C \in F$ إذا تحقق :

$$P_C(A\cap B) = P_C(A).P_C(B)$$

◀ **ملاحظة** من الممكن أن يكون الحدثان A, B مستقلان عشوائياً وغير مستقلان شرطياً بالنسبة للحدث C .

البرهان نأخذ $C = A\cap B$ وبالتالي $P_C(A\cap B) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(C)} = \frac{P(A).P(B)}{P(C)} = P(A)\frac{P(B)}{P(C)} = P(A).\frac{P(B\cap C)}{P(C)} = P(A).P_C(B) \neq P_C(A).P_C(B)$$

أي أنَّ A, B غير مستقلين شرطين بالنسبة للحدث C .

مثال (١) إذا كان احتمال أن يعيش رجل 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{4}$ واحتمال أن تعيش زوجته 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{3}$ ، والمطلوب :

١) احسب احتمال أن يعيش الاثنان 10 سنوات أخرى .
٢) احسب احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل 10 سنوات أخرى .
٣) احسب احتمال أن يتوفى الاثنان خلال 10 سنوات أخرى .

٤) احسب احتمال أن تعيش الزوجة فقط 10 سنوات أخرى .

الحل

١) بفرض A الحدث الدال على أنَّ الرجل يعيش 10 سنوات أخرى ، و B الحدث الدال على أنَّ الزوجة تعيش 10 سنوات أخرى فيكون الحدث المطلوب هو : $A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

٢) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

٣) $P(A' \cap B') = P(A').P(B') = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

٤) $P(A' \cap B) = P(A').P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

طريقة ثانية لحل (4) : $P(B/A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$

انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المخبر – نهى حبشية

خيب ظنهم ..

وكن أنت

احلم ... واصل ... قاتل ... لا تقف

كن أنت بأي ثمن

لا تدعهم يشكلونك كما يريدون

لا تكن صورة لا تليق بك

وشخصية لا تمثلك ...

كن أنت فقط أنت !!