المحاضرة 18

◄ دكتور المادة: محمد جمال اللبن

◄ عنوان المحاضرة: البوابات المنطقية

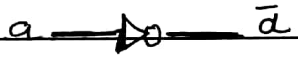
نظري ☑ عملي ☐

ملاحظة: كل عبارة بوليانية بالعناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ من الجبر البولياني $(\{0,1\}, +, \times, \bar{\ })$ تعرف دالة بوليانية بـ n متحولاً تلقائياً.

البوابات المنطقية، بفرض أن $(B, +, \times, \bar{\ })$ جبراً بوليانياً عندئذٍ فإن البوابات المنطقية عبارة عن ثلاثة بوابات شهيرة من أجل كل $a, b \in B$ وهي

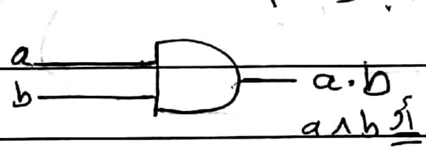
1) بوابة الـ NOT «بوابة النفي» يتم تمثيلها بالرسم:

لدينا دخل واحد وخرج واحد

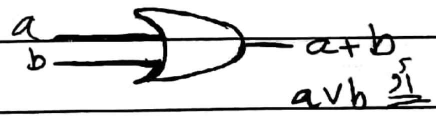


2) بوابة الـ AND يتم تمثيلها بالرسم:

لدينا دخلين وخرج واحد



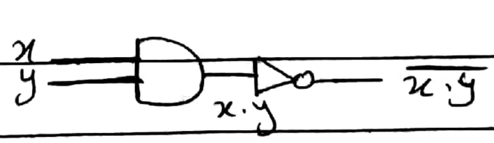
3) بوابة الـ OR يتم تمثيلها بالرسم:



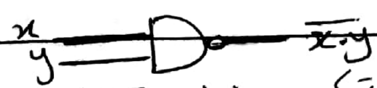
الدارات المنطقية: هي عبارة عن تركيب لبوابات منطقية.

هناك دارات منطقية شهيرة وكثيرة الاستعمال لدرجة أننا نعتبرها بوابات وهي: ① الدارة المنطقية NAND: هي عبارة عن تركيب بوابة NOT بعد بوابة AND

أي:

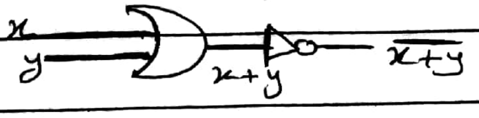


والدارة السابقة تكافئ الدارة



② الدارة المنطقية NOR: هي عبارة عن تركيب بوابة NOT بعد بوابة OR

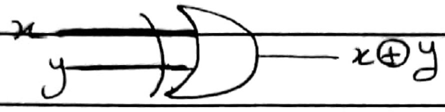
أي:



والدالة السابقة تكافئ الدالة

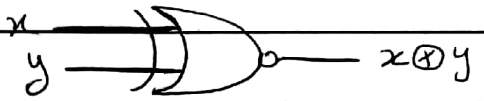
③ الدارة المنطقية XOR : هي عبارة تمثيل (تنفيذ) لدالة الفارق $f(x,y)=x\oplus y$

ويتم تمثيلها بالرسم



④ الدارة المنطقية NXOR : هي عبارة تمثيل (تنفيذ) لدالة التساوي $f(x,y)=x\odot y$

ويتم تمثيلها بالرسم

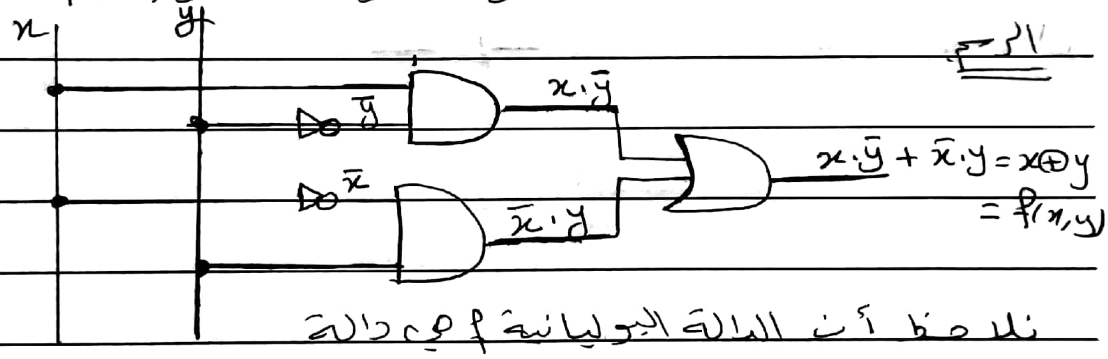


ملاحظة: سوف نعتبر كل دارة من الدارات المنطقية الأربعة السابقة بوابة.

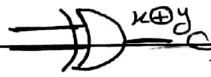
تمرين (1): ارسم الدارة المنطقية للدالة البوليانية:

$$f(x,y)=x\oplus y = x\bar{y}+\bar{x}y$$

الرسم



نلاحظ أن الدالة البوليانية f هي دالة الفارق ونعلم أن دارتها المنطقية هي



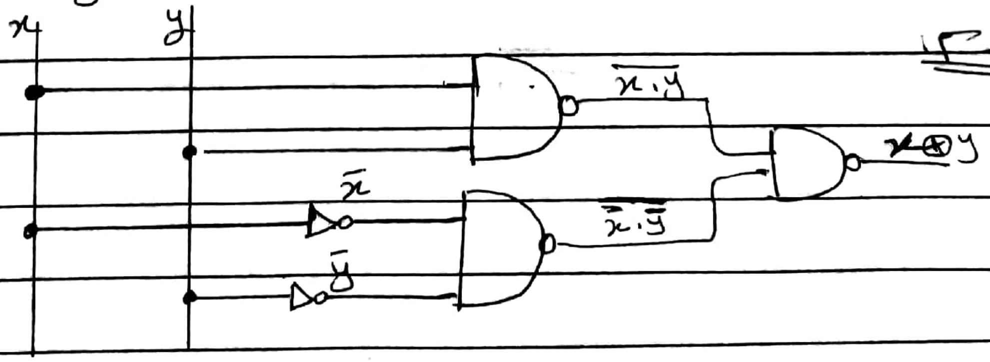
ورسمت بدلالة NOT و OR و AND

تمرين (2): ارسم الدارة المنطقية للدالة البوليانية $f(x,y)=x\oplus y = x\cdot y+\bar{x}\bar{y}$ بدلالة NAND فقط:

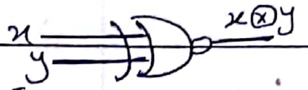
الحل

$$f(x,y)=\overline{\overline{xy+\bar{x}\bar{y}}} = \overline{(\overline{x\cdot y})\cdot(\overline{\bar{x}\bar{y}})}$$

الرسم



نلاحظ أن الدالة البوليانية f هي دالة التكرار ونعلم أن دارتها المنطقية

هي 

ورسمناها بدلالة NAND فقط.

تمرين (3): نريد تصميم آلة حاسبة تقوم بالعمليات الأربعة.

نلاحظ أن الضرب هو الجمع المتكرر

القسمة هو الطرح المتكرر ⟸ العمليات جميعها تخضع لعملية الجمع

الطرح هو نظير الجمع

الجامع النصفي: صمم دارة نصف الجامع التي تقوم بعملية الجمع «نرمز لنصف الجامع اختصاراً بـ HA» أي نقصد الجمع في النظام الثنائي؟

توضيح عملية جمع الأعداد الثنائية: إن عملية جمع رقمين فقط في النظام الثنائي تتم على الشكل التالي:

$0+0=0 \quad , \quad 0+1=1 \quad , \quad 1+0=1 \quad , \quad 1+1=10$

حيث 10 هو الرقم 2 في النظام العشري.

مثال: جمع نفس العددين بعد كتابتهما في النظام الثنائي

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\ 1000 \\ \hline 1011 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 8 \\ \hline 11 \end{array}$$

جمع عددين في النظام العشري

مراحل تصميم الدارة المنطقية المطلوبة:

1- نقوم بتعريف دالة S «sum» تقوم بعملية جمع الرقمين الثنائيين ونسميها بدالة الجمع، وأيضاً نقوم بتعريف دالة C نسميها بدالة المرحل (أي هي الرقم المرحل إلى الخانة التالية من ناتج جمع الرقمين الثنائيين) ووظيفة C هي تخزين القيمة الزائدة من جمع الرقمين الثنائيين تخزيناً مؤقتاً لنقوم بإضافتها إلى مجموع الرقمين الثنائيين الموجودين في الخانة التالية.

2- لإنشاء دارة منطقية تنفذ عملية الجمع لأي عددين في النظام الثنائي يجب أن نعرف أن الواجب أن يكون لهذه الدارة مدخلان a, b (يمثلان الرقمين الثنائيين وهما 0 أو 1) ومخرجان C, S وأن يتم مراعاة الجدول التالي:

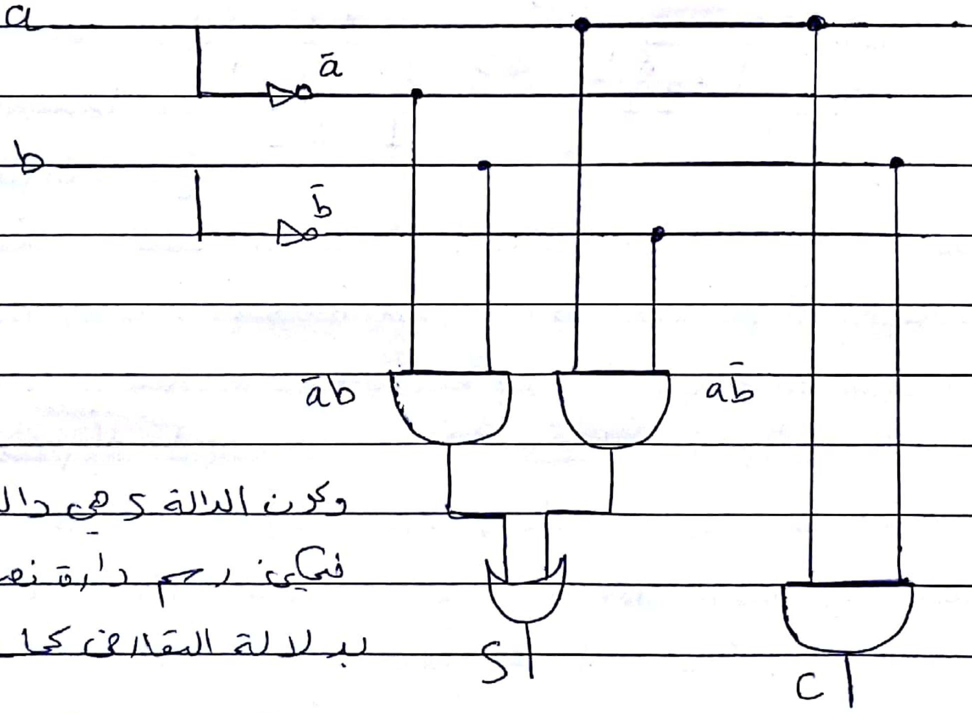
a	b	s (ناتج الجمع)	c (الرقم المرحل إلى الخانة التالية)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

لاحظ من الجدول السابق أن شكل الدالة c هو $c = a \cdot b = \overline{\overline{ab}}$

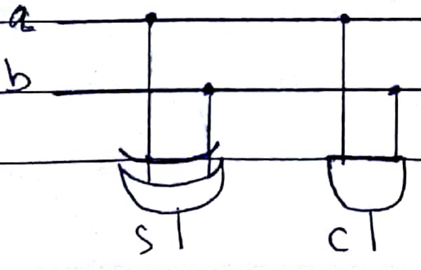
وأن شكل الدالة s هو $s = \bar{a}b + a\bar{b} = a \oplus b$

إذن الدارة المنطقية المطلوبة هي تلك الدارة التي تنفذ التابعين c, s بآن واحد وتسمى هذه الدارة بـ HA (الجامع النصفي) ولهذه الدارة الشكل:

نريد تعميم الدارة بدلالة NAND فقط



وكون الدالة s هي دالة التقارض فيمكن رسم دارة نصف الجامع بدلالة التقارض كما يلي:



«المؤثرات المنطقية»

1) المؤثر المنطقي NAND: نفرض أن $(\beta,+,\times,-)$ جبراً بوليانياً، عندئذٍ نرمز للمؤثر المنطقي NAND بالرمز «$\uparrow$» ويعرف بالشكل

$$a\uparrow b=\overline{a\cdot b}\ ,\ \forall a,b\in\beta$$

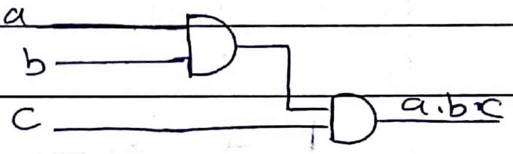
أو حسب دمورغان بالشكل $a\uparrow b=\bar{a}+\bar{b}\ ,\ \forall a,b\in\beta$

2) المؤثر المنطقي NOR: نفرض أن $(\beta,+,\times,-)$ جبراً بوليانياً، عندئذٍ نرمز للمؤثر المنطقي NOR بالرمز «$\downarrow$» ويعرف بالشكل

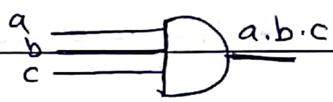
$$a\downarrow b=\overline{a+b}\ ,\ \forall a,b\in\beta$$

أو حسب دمورغان بالشكل $a\downarrow b=\bar{a}\cdot\bar{b}\ ,\ \forall a,b\in\beta$

ملاحظة: سنتفق على أن الدارة التي تمثل $a.b.c$ ولها 3 مداخل



سنرمز لها بالشكل



الدوال الشرطية:

1) دالة التماثل الفردي للواحدات: ليكن لدينا دالة بوليانية f معرفة بالجدول التالي

a	b	c	f(a,b,c)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

هي توصيف لـ آلة فيها 3 مداخل ومخرج واحد (حيث يكون المخرج واحد إذا كان عدد الواحدات فردي) ودونه

$$f(a,b,c) = abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$
$$= a(bc + \bar{b}\bar{c}) + \bar{a}(b\bar{c} + \bar{b}c)$$
$$= a(b \odot c) + \bar{a}(b \oplus c)$$

2) دالة التماثل الزوجي للأصفار: هي توصيف لـ آلة فيها 3 مداخل ومخرج واحد (حيث يكون واحد إذا كان عدد الأصفار زوجي) ودونه

a	b	c	f(a,b,c)
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

$$f(a,b,c) = a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$
$$= a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}(b\bar{c} + \bar{b}c)$$
$$= a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}(b \oplus c)$$

سؤال دورة: صمم دارة التماثل الفردي للواحدات معتمداً أي بوابة التعارض (أو تساوي) وذلك بطريقتين مختلفتين.

انتهت المحاضرة