◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الحادية والعشرون (الأخيرة)

◄ عنوان المحاضرة: حل تمارين عن التكاملات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- تمارين عن التكاملات التابعة لوسيط.

تمرين (٥) : احسب:

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-kx}\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx \quad \alpha,k>0$$

الحل: و هو تكامل معتل تابع للوسيط α حسب مبرهنة قاعدة لايبنتز للتكامل المعتلتحقق الشرووط ونشتق بالنسبة لـ α نطبق قاعدة لايبنتز :

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}e^{-kx}\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx=\int_0^\infty e^{-kx}\frac{x\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^\infty e^{-kx}\sin\alpha x\,dx$$

>>الاشتقاق كان بالنسبة لـ α و ليس x أما الآن فسنكامل بالنسبة لـ **x** و ذلك بالتجزئة إذ نفرض :

$$u=e^{-kx}\Rightarrow du=-ke^{-kx}dx$$
$$dv=\sin\alpha x\,dx\Rightarrow v=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\left[-\frac{e^{-kx}}{\alpha}\cos\alpha x\right]_0^\infty-\frac{k}{\alpha}\int_0^\infty e^{-kx}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\alpha}-\frac{k}{\alpha}\int_0^\infty e^{-kx}\cos\alpha x\,dx$$

نطبق التجزئة مرة أخرى :

$$u = e^{-kx} \Rightarrow du = -ke^{-kx}dx$$

$$dv = \cos\alpha x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{k}{\alpha}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{-kx}}{\alpha}\sin\alpha x\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{k}{\alpha}\underbrace{\int_0^\infty e^{-kx}\sin\alpha x\,dx}_{\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}}\right)$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{k^2}{\alpha^2}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \Rightarrow \left(1+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2+k^2}{\alpha^2}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow\Rightarrow \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

حصلنا على معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات كما يلي :

$$dI(\alpha) = \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

من الناتج

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+k^2} = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2) + c$$

لحساب الثابت c :

من التكامل الأصلي

$$0 = I(0) = \frac{1}{2}\ln(k^2) + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln(k^2)$$

نعوض :

$$\boxed{I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2) - \frac{1}{2}\ln(k^2) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\right)}$$

تمرين(٦): أوجد قيمة التكامل التالي :

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\ dx$$

الحل: نشتق التكامل بالنسبة لـ α

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\right)dx=+\int_0^{\infty}-e^{-x^2}.2x.\sin 2\alpha x\ dx=H$$

نكامل بالتجزئة:

بفرض: $u=\sin 2\alpha x \Rightarrow du=2\alpha\cos 2\alpha x\ dx$

$$dv=-2x^{-x^2}\ dx \Rightarrow v=e^{-x^2}$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=[u.v]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}v\,du$$

$$=\left[e^{-x^2}.\sin 2\alpha x\right]_0^{\infty}-2\alpha\int_0^{\infty}e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\ dx$$

حيث:

$$\left[e^{-x^2}.\sin 2\alpha x\right]_0^{\infty}=0$$

لأنه بالتعويض بـ ∞ نجد أن $e^{-\infty}=0$ وعند التعويض بـ 0 نجد أن $\sin(0)=0$

أي:

$$[e^{-\infty}.\sin 2\alpha(\infty)-e^0.\sin 0]=0$$

ومنه:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=-2\alpha\int_0^{\infty}e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\ dx=-2\alpha I(\alpha)$$

$$\frac{dI}{I}=-2\alpha\,d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln I(\alpha)=-\alpha^2+\ln c \Rightarrow I(\alpha)=c.e^{-\alpha^2}$$

عندما $\alpha=0 \Leftarrow I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ومنه حسب $I(\alpha)=c.e^{-\alpha^2}$ نجد أن $c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

إذاً : $\mathbf{I(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}}$

ـ بهذا نكون قد أنهينا كل ما يخص التكاملات التابعة لوسيط و التمارين المتعلقة بهذا البحث (^_^)

متسلسلات فورييه:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

حدودها توابع مثلثية دورية ، دورها 2π

المطلوب عندئذٍ حساب : $a_0\,, a_n\,, b_n$ حتى تتقارب المتسلسلة من تابع المجموع $f(x)$.

انتهت المحاضرة الأخيرة

كل عام وأنتم بألف خير وإن شاء الله يكون التوفيق حليفكم

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو

تنسيق: ولاء الأخضر ♥