نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄ المحاضرة: الخامسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: حل وظائف

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ ـ حل تمارين الوظائف السابقة

السؤال الأول: برهن ان: $r = \frac{1}{x.y}$ عامل تكميل للمعادلة التفاضلية $2ydx + xdy = 0$

الحل:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2 \qquad \& \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1$$

"المعادلة غير تامة ولكن متجانسة"

ومنه لنتاكد من ان: $r = \frac{1}{x.y}$ هو عامل التكميل المناسب وبضرب طرفي المعادلة نجد

$$\frac{1}{x.y}2ydx + \frac{1}{x.y}xdy = 0$$

$$\frac{2}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

ومنه فان المعادلة أصبحت تامة ويمكن التأكد من ذلك:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int \frac{2}{x}dx + \varphi(y)$$

$$= 2\ln(x) + \varphi(y) \dots (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة ل y نجد:

$$\frac{dF}{dy} = 0 + \varphi'(y) = N(x,y)$$

نطابق مع $N(x,y)$ نجد: $\varphi'(y) = \frac{1}{y} \underset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \varphi(y) = \ln|y|$

نعوض قيمة $\varphi(y)$ في المعادلة (1) وبالتالي:

$$F(x,y) = 2\ln x + \ln y$$ "هو الحل العام"

السؤال الثاني: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية:

- $$(x^4 + y^4)dx - (xy^3)dy = 0$$

الحل:

$$M(x,y) = x^4 + y^4 \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4y^3$$

$$N(x,y) = xy^3 \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y^3$$

المعادلة متجانسة وغير تامة ومنه فإن الشرط: $xM(x,y) + yN(x,y) \neq 0$

$$x(x^4 + y^4)dx - y(xy^3)dy \neq 0$$

محقق ومنه يكون عامل التكميل يعطى بالشكل: $\mu = \frac{1}{xM+yN}$

$$xM + yN \Rightarrow (x^5 + xy^4 - xy^4) = x^5 \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^5}$$

وبالتالي نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل:

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{y^3}{x^4}\right)dx - \left(\frac{y^3}{x^4}\right)dy = 0$$

ومنه أصبحت المعادلة تامة ☺

- $$y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0$$

الحل:

$$(x^2y^3+2y)dx+(2x-2x^3y^2)dy=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=3x^2y^2+2 \quad \& \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2-6x^2y^2$$

ومنه أصبحت المعادلة غير تامة وغير متجانسة ومنه يكون عامل التكميل من الشكل:

$$\mu=\frac{1}{xM-yN}=\frac{1}{3x^3y^3}$$

ومنه بضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل نجد:

$$\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^3y^2}\right)dx+\left(\frac{2}{3x^2y^3}-\frac{2}{3y}\right)dy=0$$

ومنه أصبحت المعادلة تامة ☺

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+v(y)=\int\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^3y^2}\right)dx+v(y)$$

$$\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{2}{3xy^2}+v(y)\ \dots.(1)$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{2}{3xy^2}+v'(y)$$

بالمطابقة مع $N(x,y)$

$$\frac{2}{3xy^2}+v'(y)=\frac{2}{3x^2y^3}-\frac{2}{3y}\Rightarrow v'(y)=\frac{1}{xy}-\frac{2}{3y}\Rightarrow v(y)=\frac{1}{xy^2}-\frac{2}{3}\ln|y|$$

نعوض في (1)

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln|x|-\frac{2}{3xy^2}+\frac{1}{xy^2}-\frac{2}{3}\ln|y|$$ "وهو الحل العام للمعادلة"

✎اوجد الحل العام والشاذ للمعادلة☺ $y=xp-\frac{4}{27}p^3$

الحل:

(نعوض كل p بـ c) $\qquad y' = p \;\; ...(1)$

"وهو الحل العام" $\qquad y = cx - \frac{4}{27}c^3$

$$x + f'(p) = 0 \quad \Rightarrow f(p) = -\frac{4}{27}p^3 \quad \Rightarrow \; f'(p) = -\frac{4}{81}p^2$$

$$x = \frac{4}{81}p^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{9}{2}\sqrt{x}$$

نعوض في (1) فنحصل على الحل الشاذ

$$y' = \frac{9}{2}\sqrt{x}$$

$$2\left(x - y\right)dx + dy = 0$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-y)}{1}$$

١- نفرض $x - y = z$

٢- نفاضل الطرفين $\qquad 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx} \Rightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = -2z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + 2z \;\Rightarrow\; dx(1+2z) = dz$$

$$\Rightarrow \; dx = \frac{dz}{1+2z} \;\Rightarrow\; x = \ln(1+2z) + c$$

$$y' = \frac{3x-y}{2}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x-y}{2}$$

نفرض ان $z=3x-y$ وبمفاضلة الطرفين $dz=3dx-dy$ نقسم المعادلة على dx

$$\frac{dz}{dx}=3-\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=3-\frac{dz}{dx}\Rightarrow 3-\frac{dz}{dx}=\frac{z}{2}$$

معادلة قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dz}{dx}=3+\frac{z}{2}\Rightarrow\frac{6+z}{2}=\frac{dz}{dx}\Rightarrow 2dz=(6+z)dx\Rightarrow 2\frac{dz}{6+z}=dx$$

$$\Rightarrow x=2\ln|6+z|$$ نعوض قيمة z :

$$x=2ln\,|6+(3x-y)|$$

$$y'=\frac{3}{2x-5y}$$

الحل:

نفرض ان $z=2x-5y$ وبمفاضلة الطرفين $dz=2dx-5dy$

نقسم على dx

$$\Rightarrow\frac{dz}{dx}=2-\frac{5dy}{dx}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=2-\frac{5}{z}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{2z-5}{z}\Rightarrow dx=\frac{2z-5}{z}dz$$

$$\Rightarrow dx=\left(2-\frac{5}{z}\right)dz\underset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow}x=2z-5\,ln|z|$$

نعوض قيمة z فنحصل على الحل العام

$$x=2(2x-5y)-5\,ln|2x-5y|$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عيد*علا الدالاتي