المحاضرة 26+25

نظري ☑
عملي ☐

◄ دكتور المادة: محمد جمال اللبن

◄ عنوان المحاضرة: الاسناديات

تعريف آخر للمفردة: $T_0(L) = \mathcal{V} \cup C$

$\forall k \geq 0,\ T_{k+1}(L) = T_k(L) \cup \{ f t_1 \dots t_n ;\ f \in F(L),\ t_1 \dots t_n \in T_k(L),\ n \geq 1 \}$

مثال: لتكن لدينا اللغة $L = \{f, g, c_1, c_2\}$

دالة مقط واحد   دالة مقطين

هل ffc_1 مفردة؟؟ نعم هي مفردة وذلك حسب قاعدة الوزن حيث وزن ffc_1 هو 1 ووزن أي قطعة ابتدائية فعلية ff أكبر أو يساوي الصفر.

ملاحظة [1]: طول السلسلة هو عدد مواقع محارفها.

مثال: $\alpha = abc$ ومنه طول α هو $|\alpha| = 3$

و $\beta = a\ bc$ ومنه طول β هو $|\beta| = 4$ لأنه يوجد فراغ بين a و b.

[2] ليس بالضرورة أن تكون كل قطعة ابتدائية فعلية من مفردة هي مفردة.

سؤال: هل يوجد لغة بدون ثوابت؟؟

نعم مثال $L = \{f, g\}$ حيث تم ~~التعبير~~ التعبير عن f و g عن طريق المتحولات.

سؤال: ما هي المفردات التي ارتفاعها الصفر؟؟ هي المتغيرات.

المفردة المغلقة: نقول عن مفردة أنها مغلقة إذا كانت لا تحوي أي ظهور لمتحول (متغير) من اللغة.

سؤال: هل اللغة $L = \{f, g\}$ تحوي مفردات مغلقة؟؟

لا، لأنها لا تحوي ثوابت.

تعريف: لتكن t مفردة من اللغة T(L) ولتكن $n_1, \dots, n_n$ أعداد طبيعية مختلفة مثنى مثنى عندئذ التعويض $t = t[\mathcal{V}_{n_1}, \dots, \mathcal{V}_{n_n}]$

يشير إلى أن المتحولات التي تحتوي المفردة t هي من بين
$v_1, \dots, v_n$

الاستعاضة في المفردات:
ليكن $k \geq 1$ عدد صحيح ولنفرض $v_1, \dots, v_k$ عبارة عن k متحول
مثنى مثنى ولتكن $t, u_1, \dots, u_k$ عبارة عن $k+1$ مفردة في اللغة L عندئذ
الكلمة
$t_{u_1|v_1, u_2|v_2, \dots, u_k|v_k}$

هي نتيجة تعويض المفردات $u_1, \dots, u_k$ على الترتيب بالمتحولات
$v_1, \dots, v_k$ في المفردة t.

تنويه: لتكن $t = t[z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_k]$ مفردة حيث
$z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_k$ عبارة عن $k+n$ متحول حيث $n, k \in N$ سنشير
إلى المفردة $t_{u_1|w_1, u_2|w_2, \dots, u_k|w_k}$ ب
$t[z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_k]$

الصيغة الذرية: نقول عن الكلمة $w \in W(L)$ إنها صيغة ذرية إذا
وفقط إذا وجد عدد طبيعي $n \geq 1$ ووجدت n مفردة من اللغة L $t_1, \dots, t_n$
ووجدت رمز علاقة n-مقامية R بحيث $w = R t_1 t_2 \dots t_n$
نرمز لمجموعة كل الصيغ الذرية من اللغة L بالرمز $At(L)$
ملاحظة: كون اللغة L مع مساواة نعبر عن الصيغة الذرية
ب $t_1 \simeq t_2$ أو $\simeq t_1 t_2$

تعريف مجموعة صيغ اللغة L: نرمز لها ب $F(L)$ أصغر مجموعة جزئية
من مجموعة كلمات اللغة $W(L)$ تحقق:

1. تحتوي مجموعة الصيغ الذرية $AL(L) \subseteq F(L)$
2. أياً كانت $v, w \in F(L)$ عندئذٍ كل من الكلمات التالية
هي صيغ $v \to w$, $v \wedge w$, $v \vee w$, $v \leftrightarrow w$, $\sim w$
ومن أجل كل عدد $n \geq 1$ فإن $\exists v_n w$ و $\forall v_n w$ (*)
أيضاً صيغ من اللغة.

ماهي الصيغة في منطق الإسناديات: إما أن تكون صيغة ذرية أو
حاصل تركيب صيغ فيما بينها وروابط بينها هي:

$\exists , \forall , \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow$

مثال: لتأخذ اللغة $L = \{ f , g , c , \simeq \}$ هل $v_0 c$ تشكل صيغة؟
الحل: نعم كون كلاً من v_0 و c مفردات ويوجد علاقة ثنائية $\simeq$
فإن $\simeq v_0 c$ صيغة وتسمى صيغة الذرية.
ملاحظة: إن $\simeq v_0 c$ هي نفسها $v_0 \simeq c$ وأيضاً علاقة $\simeq$
موجودة في اللغة حتى لو لم تكتب.

مثال: لتأخذ اللغة

$L = \{ R , f , g , c \}$

علاقة ثنائية، دالة وحيد، دالة ثلاثية، ثابت

- هل $R c v_0$ صيغة؟ كون v_0 و c مفردات و R علاقة ثنائية فإن $R c v_0$ صيغة
- هل $R v_4$ صيغة؟؟ لا، لأن R علاقة ثنائية ويجب أن تربط بين عنصرين.
- هل $f R v_4$ صيغة؟ لا
- هل $\forall v_1 R v_1 c$ صيغة؟ نعم وذلك حسب (*) في آخر الصفحة (2)
وأيضاً $f v_1 c \rightarrow c$ صيغة.
- $R g f v_1 v_2 c v_2 c$ هي صيغة.

تعريف آخر لـ $F(L)$: نضع $F_0(L) = At(L)$

$\Rightarrow \forall k \geq 0 : F_{k+1}(L) = F_k(L) \cup \{ \sim F : F \in F(L) \} \cup$
$\{ (F \alpha G) : F , G \in F_k(L) , \alpha \in \{ \vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow , \neg \} \} \cup$
$\{ Q v_n F : F \in F_k(L) , n \in \mathbb{N} , Q \in \{ \forall , \exists \} \}$

ويكون $F(L) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(L)$

تعريف: ارتفاع الصيغة: هو أصغر عدد صحيح k يتحقق من أجله $F \in F_k(L)$

مثال: لتكن اللغة $L = \{ R , f , g , h , I , c_1 , c_2 \}$

ثلاثية، أحادية، ثنائية، رباعية ثلاثية، ثابت، ثابتة

• $R c_1 c_2 c_1$ هي صيغة ذرية.

• $R g v_0 v_1 f v_0 v_1$ هي صيغة أيضاً

• $R I v_0 v_1 c_1 c_2 f v_0 g v_1 v_0$ هي صيغة

• $R c_1 c_2 v_0$ صيغة ذرية ارتفاعها صفر.

• $R c_1 c_2 v_0 \longrightarrow R f v_0 g c_1 c_2 v_0$ هي صيغة لأن كلاً من $R f v_0 g c_1 c_1 v_0$ و $R c_1 c_2 v_0$ هي صيغ وارتفاع الصيغة المعطاة هو واحد.

• إن ارتفاع الصيغة $(\sim(R c_1 c_2 v_0 \longrightarrow R f v_0 g c_1 c_2 v_0)) \wedge R c_1 c_2 c_1$ هو ثلاثة.

نظرية وحدانية القراءة للصيغ: بفرض $F \in F(L)$ صيغة اختيارية عندئذٍ واحدة فقط واحدة من الحالات التالية محققة:

• F صيغة ذرية

• $F = \sim G$ حيث G صيغة وحيدة

• يوجد زوج وحيد $(H, G) \in F^2(L)$ حيث α رابط ثنائي وحيد حيث $F = (H \alpha G)$

• $F = \forall v_k G$ حيث k عدد صحيح وحيد، G صيغة وحيدة

• $F = \exists v_k G$ حيث k عدد صحيح وحيد، G صيغة وحيدة

ملاحظة: نلاحظ بالمقارنة مع حساب القضايا بأن الصيغ الذرية هنا تلعب دور المتحولات المنطقية مع فرق أساسي هو أن المتحولات المنطقية (في حساب القضايا) أولية لا يمكن تحليلها، بينما الصيغ الذرية هنا قابلة للتحليل (تمتلك بناء معقد نوعاً ما).

* يجب عدم الخلط بين المتحولات في حساب القضايا وبين المتحولات اللغة في حساب الإسناديات حيث المتحولات في الإسناديات

هي المادة الخام لبناء المفردات والتي بدورها مكونات الصيغ الذرية

* شجرة التحليل للصيغ في حساب الإسناديات ستكون قريبة من مفهومها في حساب القضايا مع وجود اختلافات.
* الأوزان في حساب الإسناديات هي صيغ ذرية (قابلة للتحليل)
* يوجد ثلاثة فروع في حساب الإسناديات للفروع الأحادية

$\sim G \to G$ $\qquad$ $\exists x_k G \to G$ $\qquad$ $\forall x_k G \to G$

ملاحظة: الصيغ الجزئية $SF(F)$ للصيغة F هي تلك التي تظهر عند عقد شجرة التحليل لـ F.

سؤال (دورة): ما الفرق بين منطق الإسناديات ومنطق الدرجة الأولى؟؟

الحل: هو ذاته، لا يوجد فرق بينهم.

الصيغة: هو ربط المفردات بعلاقات أي وضع علاقات لربط المفردات.

* نصطلح على أن الصيغة التي لا تملك متغيرات حرة هي صيغة مغلقة.

تمرين: هل $Rfcc$ هي صيغة؟؟ نلاحظ أنه لا يوجد لغة لذلك نعرف اللغة $L=\{R, f, g, c\}$

أيضاً $Rfcc$ ليست صيغة لذلك يجب أن نحدد اللغة ومنه

$L=\{\underbrace{R}_{\text{علاقة ثنائية}}, \underbrace{f}_{\text{دالة أحادية}}, \underbrace{g}_{\text{دالة ثنائية}}, \underbrace{c}_{\text{ثابت}}\}$

إن $Rfcc$ صيغة مغلقة لا تحوي متغيرات.

سؤال: متى تكون الصيغة مغلقة في لغة لا تحوي ثوابت؟؟

الحل: إذا كانت المتغيرات مقيدة.

تعريف العلاقة الشمولية: لتكن الصيغة

$F = F[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ من مجموعة صيغ اللغة L و $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ متحولات تملك ظهور حر واحد على الأقل في F

عندئذٍ الصيغة $\forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_n} f$

وكل الصيغ المشابهة لها بتبديل ترتيب ظهور المتحولات المكممة $\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_n}$ ندعوها الغلاقة الشمولية للصيغة f.

نماذج اللغة) تعريف نموذج اللغة:

نموذج اللغة L هو عبارة عن بنية $\mathcal{M}$ تتكون من:

1) مجموعة غير خالية M تدعى المجموعة التحتية للبنية $\mathcal{M}$

2) لكل c رمز ثابت من اللغة L يوجد عنصر $\bar{c}^{\mathcal{M}}$ من المجموعة التحتية M ندعوه تفسير الرمز c في النموذج $\mathcal{M}$

3) لكل f رمز دالة من اللغة L بـ k موقع، يوجد تطبيق $\bar{f}^{\mathcal{M}}$ من M^k إلى M $(k \geq 1)$ أي مؤثر بـ k موقع على المجموعة M ندعوه تفسير الرمز f في النموذج $\mathcal{M}$

4) لكل R رمز علاقة من اللغة L بـ k موقع، يوجد مجموعة جزئية $\bar{R}^{\mathcal{M}}$ من M^k أي علاقة بـ k موقع على المجموعة M ندعوها تفسير الرمز R في النموذج $\mathcal{M}$.

* من الآن فصاعداً لا نميز بين البنية والنموذج.
* إذا كانت علاقة المساواة موجودة ندعوه نموذج يحترم المساواة.

مثال: لتكن اللغة $L = \{R, f, c\}$

رمز علاقة ثنائية، رمز دالة أحادية، ثابت

نموذج أول $\mathcal{N} = < \mathbb{R}, \leq, \cos, \pi >$

تفسير رمز الثابت هو العدد الحقيقي π

تفسير رمز R علاقة حيث

مجموعة تحتية (أعداد الحقيقية)

$\bar{R}^{\mathcal{N}} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b\}$

تفسير دالة f حيث $\bar{f}^{\mathcal{N}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$

نموذج آخر: $\mathcal{M} = < M , \bar{R}^{\mathcal{M}} , \bar{f}^{\mathcal{M}} , \bar{c}^{\mathcal{M}} >$

M: مجموعة الأعداد الحقيقية التي لا تقبل القسمة على 5

$\bar{R}^{\mathcal{M}}$: تفسير رمز العلاقة R

$\bar{R}^{\mathcal{M}} = \{(a,b) \in M^2 : gcd(a,b) = 5\}$

$\bar{f}^{\mathcal{M}} : M \to M$

و $\bar{c}^{\mathcal{M}}$ تفسير رمز الثابت هو أول عدد من M أولي مؤلف من أكثر رقم.

ملاحظة: نرمز بـ $\bar{R}^{\mathcal{M}}$ تفسير علاقة R في نموذج $\mathcal{M}$ هذا الترميز نستخدمه عند انتقال من اللغة إلى النموذج لكننا نستخدم ترميز آخر وهو $\underline{R}^{\mathcal{M}}$ عند انتقال من النموذج إلى اللغة.

النماذج الجزئية والمقصورات:

تعريف توسيع نموذج: لتكن L لغة من المرتبة أولى محددة بنموذجين $\mathcal{M} = < M , \ldots >$, $\mathcal{N} = < N , \ldots >$

نقول عن النموذج $\mathcal{M}$ هو توسيع للنموذج $\mathcal{N}$ (أو نقول $\mathcal{N}$ هو نموذج جزئي من $\mathcal{M}$) إذا تحقق الشروط التالية:

1) N مجموعة جزئية من M

2) من أجل كل رمز ثابت من اللغة L فإن $\bar{c}^{\mathcal{N}} = \bar{c}^{\mathcal{M}}$

3) من أجل كل رمز دالة بـ k مقط من اللغة L فإن $\bar{f}^{\mathcal{N}} = \bar{f}^{\mathcal{M}}|_{N^k}$

4) من أجل كل رمز علاقة بـ k مقط من اللغة L فإن $\bar{R}^{\mathcal{N}} = \bar{R}^{\mathcal{M}} \cap N^k$

بعبارة أخرى: يعني القول أن تفسيرات رموز اللغة في النموذج $\mathcal{N}$ هي مقصورات تفسيراتها في النموذج $\mathcal{M}$.

مثال 1: النموذج $\mathcal{N}$ الذي قاعدته التحتية $[-1,1]$ هل هو نموذج جزئي من $\mathcal{M}$ حيث $\mathcal{M} = < \mathbb{R} , \leq , \cos , \pi >$

طريقة أخرى للسؤال: هل يشكل $\mathcal{M}$ توسيعة لـ $\mathcal{N}$ الذي قاعدته تحتية $[-1,1]$

الحل: لا، لأن $\pi \notin [-1,1]$ اختل الشرط الثاني.

مثال 2: نفس المثال السابق لكن بدل $[-1,1]$ نضع $[-\pi,\pi]$ إن الحل نعم هو نموذج جزئي

مثال ③ نفس المثال ① لكن بدل [-1,1] نضع [0,π] (وظيفة).

إغناء نموذج: L, L' لغتين من المرتبة الأولى حيث $L \subseteq L'$

(نقول أن L' تمديد أو إغناء لـ L وندعو L مقصور L')

وليكن M نموذج للغة L و M' نموذج للغة L' نقول أن M' تمديداً (إغناء) لـ M إذا تحققت الشروط التالية:

1) M و M' تمتلكان نفس المجموعة التحتية.

2) كل رمز لثابت أو لدالة أو لعلاقة في اللغة L لها ذات التفسير في M و M'

بعبارة أخرى: M' اغناء لـ M إذا وفقط إذا أمكن الحصول على M' من M بإضافة تفسيرات رموز الثوابت، الدوال، الملاقات في اللغة L' التي ليس لها وجود في اللغة L.

مثال: لتكن لدينا اللغة $L = \{R\}$ والنموذج المعرف عليها $M = <\mathbb{R}, <>$

ولغة أخرى $L' = \{R, f, c\}$ والنموذج المعرف عليها هو

$M' = <\mathbb{R}, <, \cos, \pi>$

نلاحظ أن L' اغناء لـ L.

انتهت المحاضرة