المحاضرة (24)

نظري
عملي

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: بعض الملاحظات + ثلاثية فرينيه

* ملاحظات :

1- إذا كان $\vec{r}''(s_0)=\vec{0}$ فإن المستوي الملاصق في P_0 سيكون إما غير موجود أو هناك عدد غير منته من المستويات الملاصقة عند P_0 وهذه الحالة إذا كان المنحني مستقيماً في جوار لـ P_0 أو هناك مستوٍ ملاصق وحيد يتعين بـ $\vec{r}'(s_0)$ وبأول مشتق لـ r غير معدوم (بعد المشتق الأول) عند s_0 وغير مرتبط خطياً مع $\vec{r}'(s_0)$

معادلة المستوي الملاصق:

$$[\overrightarrow{P_0Q}\ ,\ \vec{r}'(s_0)\ ,\ \vec{r}^{(n)}(s_0)] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z' \\ x^{(n)}(s_0) & y^{(n)}(s_0) & z^{(n)}(s_0) \end{vmatrix} = 0$$

حيث

$\vec{r}^{(n)}(s_0) = (x^{(n)}(s_0), y^{(n)}(s_0), z^{(n)}(s_0))$ هو أول مشتق لـ $\vec{r}(s)$ غير معدوم عند s_0 وغير مرتبط خطياً بـ $\vec{r}'(s_0)$.

بحيث في هذه الحالة سيكون المماس عند P_0 تلامس مع C من مرتبة عليا أي أن P_0 ستكون في هذه الحالة نقطة مقوّمة

2- ليكن $\vec{r}(t)$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C^2 لمنحني C (ليس بالضرورة طبيعياً) و P_0 نقطة نظامية في $\vec{r}$ موافقة لـ t_0 ولتكن s_0 الوسيط الطبيعي لـ P_0. سنفترض أن هناك جوار لـ t_0 بحيث تكون جميع النقاط الموافقة لقيم الوسيط في ذلك الجوار نقاط نظامية في $\vec{r}$ عندئذ

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \vec{r}'(t)\cdot t'(s)$$

في ذلك الجوار

$$\vec{r}''(s) = \vec{r}''(t).(t'(s))^2 + \vec{r}'(t).t''(s)$$

$$\vec{r}'(s)\wedge\vec{r}''(s) = (t'(s))^3 . \vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t) + 0$$

حيث $t'(s) > 0$ عند النقطة النظامية

$$\Rightarrow \vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0) = (t'(s_0))^3(\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0))$$

من هذه المساواة نستنتج:

$$\overbrace{r'(s_0)\wedge r''(s_0)}^{\text{مرتبطة خطياً}} \neq 0 \iff \underbrace{r'(t_0)\wedge \vec{r}''(t_0)}_{\text{مرتبطا خطياً}} \neq 0$$

حيث أن: $t'(s_0) = \dfrac{dt}{ds}(s_0) = \dfrac{1}{\frac{ds}{dt}(s_0)} = \dfrac{1}{\underbrace{\|\vec{r}'(t_0)\|}_{\neq 0}} > 0$

لأن p_0 نقطة نظامية

فإذا كانت النقطة p_0 غير منعطفة (المشتق الثاني $\vec{r}''(t_0)\neq 0$ لا يساوي الصفر)

$$\Rightarrow \vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0) \neq 0 \Rightarrow \vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0)\neq 0$$

وفوق ذلك: $r'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0) \parallel r'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0)$

فالمستوي الملاصق عند p_0 يعطى بالمعادلة

$$[\vec{p_0Q}, \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)] = 0$$

أو $$(\vec{p_0Q}).(\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0)) = 0$$

أو $$[\vec{R}-\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)] = 0$$

فتكون المعادلة الديكارتية

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0$$

★ مثال (إضافي) عن معادلة المستوي الملاصق للولب.

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

عند النقطة p_0 الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{2}$

... ثلاثة فرنيه ...

ليكن L منحنياً من الصف C_K حيث $(K \geq 2)$ عندئذٍ في كل نقطة نظامية وغير مقوسة نستطيع تعريف ثلاث متجهات واحدة ولتكن P_0 نقطة نظامية وغير مقوسة من المنحني L وسيطها الطبيعي s_0.

1) متجه واحدة المماس: يعرف بالمساواة $\vec{t} = \vec{r}'(s_0)$

P_0 نقطة نظامية من تمثيل $\vec{r}$ (ليس بالضرورة طبيعياً) وموافقة لـ t_0 فيكون متجه واحدة المماس

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0)\|}$$

2) متجه واحدة الناظم الأساسي: هو متجه واحدة عامودي على $\vec{t}$ والواقع في المستوي الملاصق للمنحني عند النقطة P_0 والذي له اتجاه $\vec{r}''(s_0)$ وهي جهة تقعر المنحني وبالتالي يعرف بالمساواة:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}''(s_0)}{\|\vec{r}''(s_0)\|}$$

وبالتالي أصبح المستوي الملاصق موازي لـ $\vec{t}$ و $\vec{n}$ أي أصبح بإمكاني تعيين معادلة المستوي الملاصق من خلال $\vec{t}$ و $\vec{n}$ بالشكل

$$[\vec{P_0Q}, \vec{t}, \vec{n}] = 0$$

3) متجه واحدة ثنائي الناظم:

عند نقطة من منحني: هو متجه واحدة عامودي على المستوي الملاصق فهو يوازي $\vec{t} \wedge \vec{n}$ وله جهة $\vec{t} \wedge \vec{n}$ حيث:

$$\|\vec{t} \wedge \vec{n}\| = \|\vec{t}\| . \|\vec{n}\| . \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

وبالتالي فإن متجه واحدة ثنائي الناظم الذي نرمز له بـ $\vec{b}$ يعطى بالمساواة

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

إن $\vec{n}, \vec{t}, \vec{b}$ ثلاثية مباشرة تحقق قاعدة اليد اليمنى أي

$$\vec{t} = \vec{n} \wedge \vec{b} \quad \text{و} \quad \vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$$

- قيمة ثلاثية فرينيه في نقطة نظامية وغير معقوفة باستخدام تمثيل وسيطي له (غير طبيعي بالضرورة):

وجدنا أن $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0)\|}$ لنرى كيف سوف نعين $\vec{n}$ و $\vec{b}$

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{r}'(s) \cdot s'(t)$$

$$\vec{r}''(t) = \vec{r}''(s)\,(s'(t))^2 + \vec{r}'(s) \cdot s''(t)$$

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = (s'(t))^3 \cdot \vec{r}'(s) \wedge \vec{r}''(s) + 0$$

$$\Longrightarrow \vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0) = (s'(t_0))^3 \cdot \vec{r}'(s_0) \wedge \vec{r}''(s_0)$$

لنأخذ نظيم الطرفين مع العلم أن $\|\vec{t}\| = \|\vec{r}'(s_0)\| = 1$

$$\|\vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0)\| = (s'(t_0))^3 \cdot \|r'(s_0)\| \|r''(s_0)\| \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \|\vec{r}''(s_0)\| = \frac{\|\vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0)\|}{(s'(t_0))^3}$$

$$s'(t_0) = \frac{ds}{dt}(t_0) = \|\vec{r}'(t_0)\|$$

$$\Longrightarrow \vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{r}'(s_0) \wedge \frac{\vec{r}''(s_0)}{\|\vec{r}''(s_0)\|} = \frac{\dfrac{\vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0)}{(s'(t_0))^3}}{\dfrac{\|\vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0)\|}{(s'(t_0))^3}}$$

$$\Longrightarrow \vec{b} = \frac{\vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0)\|}$$

نعين أولاً $\vec{t}$ ثم $\vec{b}$ ثم $\vec{n}$ من القانون $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ تسمى ثلاثية فرينيه عند نقطة t الموافقة لـ P_0

- عند كل نقطة نظامية وغير متوقفة P_0 من منحني L نستطيع تعيين ثلاث مستقيمات وثلاثة مستويات هي :

1) المستقيم المماس للمنحني عند P_0 :

هو مستقيم يوازي متجه واحدة المماس أو يوازي المتجه الموازي لـ $\vec{t}$ وهو $\vec{r}'$ تمثيله الوسيطي

$$\vec{R}(u) = \vec{r}(t_0) + u\vec{r}'(t_0)$$

أو

$$\vec{R}(u) = \vec{r}(t_0) + u\,\vec{t}$$

متجه موضع نقطة كيفية من المماس — الوسيط

$$\Rightarrow \quad X = x_0 + u x_0'$$
$$Y = y_0 + u y_0'$$
$$Z = z_0 + u z_0'$$

في حال كانت $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$ عندئذ يصبح التمثيل الوسيطي للمستقيم المماس بالشكل

$$\vec{R} - \vec{r}(t_0) = u\,\vec{r}^{(k)}(t_0)$$

حيث $\vec{r}^{(k)}(t_0)$ أول مشتق غير معدوم

أو $(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \wedge \vec{r}'(t_0) = 0$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \end{vmatrix} = 0$$

2) المستقيم الناظم الرئيسي لـ L عند P_0 : وهو مستقيم يمر من P_0 ويوازي $\vec{n}$ تمثيله الوسيطي هو :

أو $(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \wedge \vec{n} = 0$

$\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

المعادلات الديكارتية الرئيسية عند $P(x_0, y_0, z_0)$

والمعادلات الوسيطية هي :

$$X = x_0 + u\alpha$$
$$Y = y_0 + u\beta$$
$$Z = z_0 + u\gamma$$

3) المستقيم ثنائي الناظم لـ l عند P_0 : هو مستقيم يمر من النقطة P_0 ويوازي متجه الواحدة $\vec{b}$ تمثيله الوسيطي :

$$\vec{R}(u) = \vec{r}(t_0) - u\vec{b}$$

أما المستويات فهي :

1) المستوي الملاصق لـ l عند P_0 :
هو المستوي المار من النقطة P_0 والحاوي $\vec{t}$ ، $\vec{n}$ وأحد التمثيلات :

$$\vec{R}(u,v) = \vec{r}(t_0) + u\vec{t} + v\vec{n}$$

أو $[\vec{P_0Q}, \vec{t}, \vec{n}] = 0$

أو $\vec{P_0Q} \cdot \vec{b} = 0$

2) المستوي الناظم لـ L عند P_0 : هو المستوي المار من النقطة P_0 والحاوي لـ $\vec{b}$ و $\vec{n}$ فهو عامودي على $\vec{t}$ وأحد تمثيلاته :

$$\vec{R}(u,v) = r(t_0) + u\vec{b} + v\vec{n}$$

أو $[\vec{P_0Q}, b, \vec{n}] = 0$

أو $\vec{P_0Q} \cdot \vec{t} = 0$

3) المستوي المقوم لـ L عند P_0 : هو المستوي المار من النقطة P_0 والحاوي لـ $\vec{b}$ ، $\vec{t}$ تمثيله الوسيطي

$$\vec{R}(u,v) = \vec{r}(t_0) + u\vec{t} + v\vec{b}$$

أو $[\vec{P_0Q}, \vec{t}, \vec{b}] = 0$

أو $\vec{P_0Q} \cdot \vec{n} = 0$

هو يحاول أن يمنع خروج المنحني من المستوي (يحاول أن يقوّمه)

تدعى المستويات الثلاثة بوجوه فرينيه .

★ ★ ★ انتهت محاضرة ★ ★ ★

*ملاحظة: وقد تم تصحيح حل التمرين الذي تم إعطاؤه في المحاضرة الثامنة وأليكم التصحيح أدناه:

تمرين: أثبت أن كل منحنٍ مفتوح يقبل تمثيلاً وسيطاً مستوعباً معرفاً على مجال $]0,1[$.

*الحل:

ليكن L منحنٍ مفتوح $\overset{\text{تعريفاً}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \vec{r} :]a,b[\longrightarrow R^3$, $\vec{r}(]a,b[) = \sigma L$

$\emptyset :]0,1[\longrightarrow]a,b[$

$\tau \longmapsto \emptyset(\tau) = (b-a)\tau + a$

إن $\emptyset$ مستمرة على المجال $]0,1[$ لكونها كثير حدود وأيضاً متزايدة تماماً على نفس المجال $]0,1[$ لأن:

$\emptyset'(\tau) = (b-a) > 0$

وأيضاً $\emptyset$ غامرة لأن: ليكن $t \in]a,b[$ وليكن $(b-a)\tau + a = t$

$(b-a)\tau = t-a$

$0 < \tau = \dfrac{t-a}{b-a} < 1$

وللتأكد من ذلك: $\emptyset(\tau) = \emptyset\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right) = (b-a)\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right) + a = t$

وليكن $\vec{r} :]0,1[\longrightarrow R^3$ بحيث $\vec{r}^* = \vec{r} \circ \emptyset$ ومنه:

$\vec{r}^*(]0,1[) = \vec{r}(\emptyset(]0,1[)) = \vec{r}(]a,b[) = \sigma L$

أي $\vec{r}^*$ تمثيل وسيطي لمجموعة النقطية L وواضح أن $\emptyset$ غامر ومستمر ومتزايد تماماً ومن بناء $\vec{r}^*$ نلاحظ أن $\emptyset$ يحفظ الخط البياني ومنه $\vec{r}^* \sim \vec{r}$

*ملاحظة: لإثبات أن منحنٍ مراصي يتم بنفس طريقة إثبات المنحنى المفتوح السابقة.