◄ دكتور المادة: محمد هاني الليس

◄ عنوان المحاضرة: الاسنادات

نظري ☑ عملي ☐

تحقق المفردات في البنية: إن المفردات في اللغة تشير في الدلالة على العناصر بينما الصيغ تشير إلى الحالات التي تصورها.

لتكن $L = \{c, f, g\}$ حيث c رمز ثابت و f رمز دالة الأحادية و g رمز دالة ثنائية. والمفردة بالبنية $\mathcal{M} = \langle M, \bar{R}, \bar{f}, \bar{c} \rangle$ عندئذٍ المفردة $f f c$ سوف يكون لها التفسير $\bar{f}(\bar{f}(\bar{c}))$ وهو عنصر من المجموعة M وتفسير المفردة $g f c g c c$ في النموذج $\mathcal{M}$ هو العنصر $\bar{g}(\bar{f}(\bar{c}), \bar{g}(\bar{c}, \bar{c}))$ في المجموعة M بينما تفسير المفردة $f v_1$ في النموذج $\mathcal{M}$ فيجب معرفة التفسير المعطى للمتحول v_1 في النموذج $\mathcal{M}$.

مثال: لتكن $L = \{c, f, g\}$ حيث c رمز ثابت و f رمز دالة أحادية و g رمز دالة ثنائية أوجد تفسير المفردة $t_1 = g f g v_2 c v_2$ حيث تفسير v_1 هو a وتفسير v_2 هو a

الحل: $\bar{g}(\bar{f}\bar{g}(a, \bar{c}), a)$

$t_2 = g c f v_1$ تفسيرها هو $\bar{g}(\bar{c}, \bar{f}(a))$

مثال: لتكن $L = \{R, f, g, h, k, c_1, c_2\}$ حيث R رمز علاقة ثنائية و f رمز دالة ثنائية و g رمز دالة أحادية و h رمز دالة ثلاثية و k رمز دالة أحادية و c_1, c_2 رموز ثوابت حيث تفسير v_1 هو 0 وتفسير v_0 هو 3

$\mathcal{M} = \langle M, \le, +, 0 \rangle \;:\; f v_0 v_1 \xrightarrow[\text{في } \mathcal{M}]{\text{تفسيرها}} \bar{f}(3, 0) \to +(3, 0)$

$\mathcal{N} = \langle M, \le, \div, 1 \rangle \;:\; f v_0 v_1 \xrightarrow[\text{في } \mathcal{N}]{\text{تفسيرها}} \div(3, 0)$

تعريف تحقق المفردة:

لتكن $t = t(v_0, \ldots)$ مفردة من اللغة L حيث $v_0, \ldots, v_{n-1}$ متحولات مختلفة مثنى مثنى حيث $n \in N$ بفرض $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ نموذج للغة L

ونفرض $a_0, \dots, a_{n-1}$ عناصر من المجموعة التحتية M، عندئذٍ إذا فسرت المتحولات $x_0, \dots, x_{n-1}$ بالعناصر $a_0, \dots, a_{n-1}$ على الترتيب فيكون تفسير الحدود t في النموذج M يرمز له بـ $t^M[x_0 \to a_0, \dots, x_{n-1} \to a_{n-1}]$ ويعرف بالاستقراء على t كما يلي

• $t^M[x_0 \to a_0, \dots, x_{n-1} \to a_{n-1}] = a_i \; (0 \le i \le n-1)$ $t = x_i$

• إذا كان $t = c$ فإن: $t^M[x_0 \to a_0, \dots, x_{n-1} \to a_{n-1}] = c^M$

• إذا كان $t = f t_1 \dots t_k$ فإن:

$t^M[x_0 \to a_0, \dots, x_{n-1} \to a_{n-1}] = f^M(t_1^M[x_0 \to a_0, \dots, x_{n-1} \to a_{n-1}], \dots, t_k^M[x_0 \to a_0, \dots, x_{n-1} \to a_{n-1}])$

بشكل مختصر نرمز $t^M[x_0 \to a_0, \dots, x_{n-1} \to a_{n-1}]$ بـ $t^M[a_0, \dots, a_{n-1}]$

مثال: لتكن $L = \{c, f, g\}$ حيث c رمز ثابت و f رمز دالة أحادية و g رمز دالة ثنائية ولنزودها بالنموذج $M = \langle R, +, \cos, \pi \rangle$ حيث تفسير x_0 هو a وتفسير x_1 هو b

عندئذٍ $g x_0 f x_1 \xrightarrow{\text{تفسيرها}} +a \cos b$ أي $a + \cos b$

$g x_1 f x_0 \xrightarrow{\text{تفسيرها}} + b \cos a$

تحقق الصيغ في البنية: لتكن L لغة معطاة، ولتكن $M = \langle M, \dots \rangle$ بنية للغة L وليكن لدينا n من المتحولات المختلفة مثنى مثنى $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ و n عنصر من عناصر M مثل $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ والصيغة $F = F[w_0, w_1, \dots, w_{n-1}]$ (صيغة من مجموعة صيغ اللغة $F(L)$)

"الصيغة F تكون محققة في البنية M عندما تفسر المتحولات $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ بالعناصر $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ على الترتيب" سنرمز للجملة السابقة

$\langle M, w_0 \to a_0, \dots, w_{n-1} \to a_{n-1} \rangle \models F$

حيث سنقرأ الرمز $\models$ بـ محققة

بطريقة أخرى نكتب الرمز

$M \models F[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$

1- M يحقق F بـ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$

2- النونية $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ تحقق الصيغة F في M

3- الصيغة F محققة بـ M من أجل النونية $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$

4- النونية $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ تحقق الصيغة $F[w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}]$ في M

في القراءة الأخيرة يتضح لنا أن $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ تقترن بـ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ على الترتيب بينما القراءات الثلاث الأولى لا توضح ذلك ويظهر فيها بعض الغموض حول تفسير هذه المتحولات هذا الغموض واجهناه في المفردات أيضاً وكيفية تفسير متحولاتها.

ولكن غالباً ما يتضح طريقة تفسير هذه المتحولات في سياق الكلام يجب علينا أن نتذكر دائماً أن الرمز $M \models F[a_1, \ldots, a_{n-1}]$ هو مجرد اختصار بمعنى أنه حتى الآن وبعد كل ما عرفناه لا يجوز لنا اعتبار $F[a_1, \ldots, a_{n-1}]$ صيغة ولكن قد نجيز ذلك فيما بعد وربما نراه لاحقاً.

* نفي $\langle M : w_0 \to a_0, \ldots, w_{n-1} \to a_{n-1} \rangle \models F$ يكتب بالشكل:

$$\langle M : w_0 \to a_0, \ldots, w_{n-1} \to a_{n-1} \rangle \not\models F$$

أو ببساطة أكثر

$$M \not\models F[a_0, \ldots, a_{n-1}]$$

تعريف: نقول عن الصيغة المغلقة من اللغة L بأنها محققة شمولياً (صائبة كلياً) إذا كانت محققة في كل نموذج من اللغة L (تحت أي بنية)

(نستبدل كلمة صائبة كلياً (شمولياً) بـ صائبة (محققة)).

نرمز للصيغة المحققة شمولياً بـ $\models F$

* نقول عن الصيغة المغلقة من اللغة L بأنها تناقض contradiction (أو نقول إنها متناقضة أو غير مترابطة منطقياً) إذا كان نفيها صيغة محققة شمولياً.

* نقول عن صيغة ذات متحولات حرة بأنها محققة شمولياً إذا كان انغلاقها الشمولي محققة شمولياً (صائبة كلياً)

نثبت أن جميع هذه الانغلاقات الشمولية متكافئة

(الصيغة التي لا تحوي أي متحول حر بالصيغة المغلقة)

نقول عن صيغتين G, F من اللغة L (سواء كانتا مغلقتين أم لا) إنهما متكافئتان منطقياً إذا "الصيغة $(F \Leftrightarrow G)$ صحيحة منطقياً" أي

$(F \sim G)$ إذا $(\vdash F \Leftrightarrow G)$

مثال: لتكن $L = \{c, f, g\}$ حيث c رمز الثابت و f رمز دالة أحادية، g رمز دالة ثنائية لغة من المرتبة الأولى المزودة بالنموذج $M = \langle R, \leq, \cos, \pi \rangle$ نقدم عدة أمثلة عن الصيغة $F[x_0]$ من اللغة حيث نعرف كل منها بمجموعة من الأعداد الحقيقية a بحيث $M \vDash F[x_0]$ أي أن $\langle M ; x_0 \to a \rangle \vDash F$

$\{a \in R ; M \vDash F[x_0]\}$	الصيغة $F[x_0]$
$[\pi, +\infty[$	$\pi \leq x_0 \xleftarrow{\text{تفسيرها}} R c x_0$
$[-1, 1]$	$\cos a = a \xleftarrow{\text{تفسيرها}} \exists x_0 \, f x_0 \sim x_0$
	$\cancel{\cos x_0 = \pi \xleftarrow{\text{تفسيرها}} f x_0 \simeq c}$
	$\cancel{\pi \leq a \wedge \cos a = x_1 \leftarrow \exists x_1 (R c x_0 \wedge f x_1 \simeq x_0)}$

وظيفة

$f x_0 \simeq c$

$\exists x_1 (R c x_0 \wedge f x_0 \simeq x_0)$

$\forall x_1 R \, x_0 f x_1$

$\forall x_1 R f x_0 f x_1$

$\forall x_1 \exists x_2 (R x_1 x_2 \wedge f x_2 \simeq x_0)$

انتهيت الجزء