◄ دكتور المادة: محمد جمال اللبن

◄ عنوان المحاضرة: المؤثر المنطقي

نظري ☑
عملي ☐

خواص المؤثر المنطقي NOR : نفرض أن $(B,+,\times,-)$ جبراً بوليانياً.

عندئذٍ: $a,b\in B$

1) المؤثر «↓» تبديلي أي $a\downarrow b = b\downarrow a$

2) المؤثر «↓» ليس تجميعي

3) يمكن التعبير عن العمليات الأساسية الثلاثة $-,\times,+$ في أي جبر بولياني بدلالة المؤثر «↓» وذلك كما يلي:

* $a+b \underset{\text{خاصية اللانمو للعنصر}}{=} (a+b)(a+b) = \overline{\overline{(a+b)(a+b)}}$

$= \overline{\overline{(a+b)}+\overline{(a+b)}} = (a\downarrow b)\downarrow(a\downarrow b)$

$\Rightarrow a+b = (a\downarrow b)\downarrow(a\downarrow b)$

* $a\cdot b = \overline{\overline{a\cdot b}} = \overline{\bar a + \bar b} = \overline{(\bar a\cdot\bar a)+(\bar b\cdot\bar b)} = \overline{\overline{(a+a)}+\overline{(b+b)}}$

$= (a\downarrow a)\downarrow(b\downarrow b) \Rightarrow a\cdot b = (a\downarrow a)\downarrow(b\downarrow b)$

* $\bar a = \overline{a+a} = (a\downarrow a) \Rightarrow \bar a = (a\downarrow a)$

خواص المؤثر المنطقي NAND : نفرض أن $(B,+,\times,-)$ جبراً بوليانياً

عندئذٍ: $a,b\in B$ 1) المؤثر «↑» تبديلي أي $a\uparrow b = b\uparrow a$

2) المؤثر «↑» ليس تجميعي

3) يمكن التعبير عن العمليات الأساسية الثلاثة $-,\times,+$ في أي جبر بولياني بدلالة المؤثر «↑» وذلك كما يلي:

* $a+b = (a\cdot a)+(b\cdot b) = \overline{\overline{(a\cdot a)+(b\cdot b)}} = \overline{\overline{(a\cdot a)}\cdot\overline{(b\cdot b)}}$

$= (a\uparrow a)\uparrow(b\uparrow b) \Rightarrow a+b = (a\uparrow a)\uparrow(b\uparrow b)$

* $a\cdot b = \overline{\overline{(a\cdot b)}} = \overline{\overline{(a\cdot b)}\;\overline{(a\cdot b)}} = (a\uparrow b)\uparrow(a\uparrow b)$

$*\ \bar{a} = \overline{a\cdot a} = (a\uparrow a)$

تنويه: $a\uparrow b\uparrow c \neq (a\uparrow b)\uparrow c$ أي يجب الانتباه جيداً إلى الأقواس

تعريف الدالة البوليانية Maj: بفرض أن $(B,+,\times,-)$ جبراً بوليانياً

عندئذ نقول دالة الـ Maj هي دالة بوليانية متناظرة (أي إذا غيرت المتغيرات في دالة Maj سوف تبقى ذاتها) وذاتية الثنوية (أي ثنويتها مساوية لها)

وتعطى بالعلاقة $Maj(a,b,c) = ab+bc+ca$

ملاحظة: ثنوي مؤثر NAND هو مؤثر NOR

* كل عبارة بوليانية يمكن التعبير عنها وبشكل وحيد بدلالة المؤثر NAND

ويمكن القول بنفس الشكل ثنوية NAND هو مؤثر NOR

أمثلة: أكتب كلاً من الدوال البوليانية التالية بدلالة مؤثر الـ $\uparrow$ فقط.

* $S = a\oplus b = a\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot b$ "دالة التفارقية"

$S = \overline{\overline{a\bar{b} + \bar{a}b}} = \overline{(\overline{a\cdot\bar{b}})\,(\overline{\bar{a}\cdot b})} = (a\uparrow(b\uparrow b))\uparrow((a\uparrow a)\uparrow b)$

* $S = a\otimes b = a\cdot b + \bar{a}\bar{b}$ "دالة التكافؤ"

$S = \overline{\overline{ab + \bar{a}\bar{b}}} = \overline{(\overline{a\cdot b})\cdot(\overline{\bar{a}\bar{b}})} = (a\uparrow b)\uparrow((a\uparrow a)\uparrow(b\uparrow b))$

قاعدة هامة: كل عبارة بوليانية في الشكل $(\Sigma\Pi)$ مجموع جداءات تحوي حدين على الأقل وكل حد منها مؤلف من حدين بسيطين على الأقل تبقى مساوية لنفسها ولا تتغير عند إجراء التحويلين الآتيين:

1) نضع كل حد من حدود المجموع بين قوسين

2) نبدل كل إشارات "+" وكل إشارات "." في العبارة $\Sigma\Pi$ بالإشارة "$\uparrow$".

أمثلة: أكتب كلاً من الدوال البوليانية التالية بدلالة مؤثر الـ $\uparrow$ فقط.

1) $f(a,b,c) = a\cdot c + b\cdot c = (a\uparrow c)\uparrow(b\uparrow c)$

2) $f(a,b,c,d) = d = d+d = (d\cdot d) + (d\cdot d)$

$= (d\uparrow d)\uparrow(d\uparrow d)$

3) $f(a,b,c,d) = (\bar{a}\,\bar{c} + a) + \bar{b}c$

$= ((\bar a \bar c) + (a a)) + \bar b c = ((\bar a \uparrow \bar c) \uparrow (a \uparrow a)) \uparrow (\bar b \uparrow c)$

$= (((a \uparrow a) \uparrow (c \uparrow c)) \uparrow (a \uparrow a)) \uparrow ((b \uparrow b) \uparrow c)$

$* \; Maj(a,b,c) = (ab + bc) + (ca) = ((a \uparrow b) + (b \uparrow c)) \uparrow (c \uparrow a)$

قاعدة عامة: كل عبارة بوليانية من الشكل $\Pi\Sigma$ جداء مجاميع تحوي مجموعين بسيطين على الأقل، ويتألف كل مجموع بسيط فيها من حدين بسيطين على الأقل وتبقى صالحة لنفسها ولا تتغير عند إجراء التحويل التالي:

نبدل كل إشارات «+» وكل إشارات «×» في العبارة $\Pi\Sigma$ بإشارة «↓»

مسألة ١: صمم دارة منطقية تستقبل عدد ثنائي مكون من أربع خانات $x_4x_3x_2x_1$ ويكون لها مخرج F يأخذ القيمة 1 إذا وفقط إذا كان العدد المدخل يقبل القسمة إما على 4 أو على 5

- استخدم مخطط كارنوف للحصول على صيغة مبسطة لـ F
- أوجد التحليل القانوني الجمعي لـ F (وظيفة كله راجع المحاضرة ١٣)

الحل: إن الدالة F تأخذ القيمة 1 إذا كان العدد المدخل يقبل القسمة إما على 4 أو على 5 إن العدد المدخل مكون من 4 خانات $x_4x_3x_2x_1$

لننشئ مخطط كارنوف الذي عدد خلاياه $2^4=16$ ونقوم بوضع العلامة 1 ضمن الخلايا الممثلة للعدد المدخل الذي يقبل القسمة إما على 4 أو على 5

x_2

1	1		
1		1	
1			1

x_3 ، x_4 ، x_1

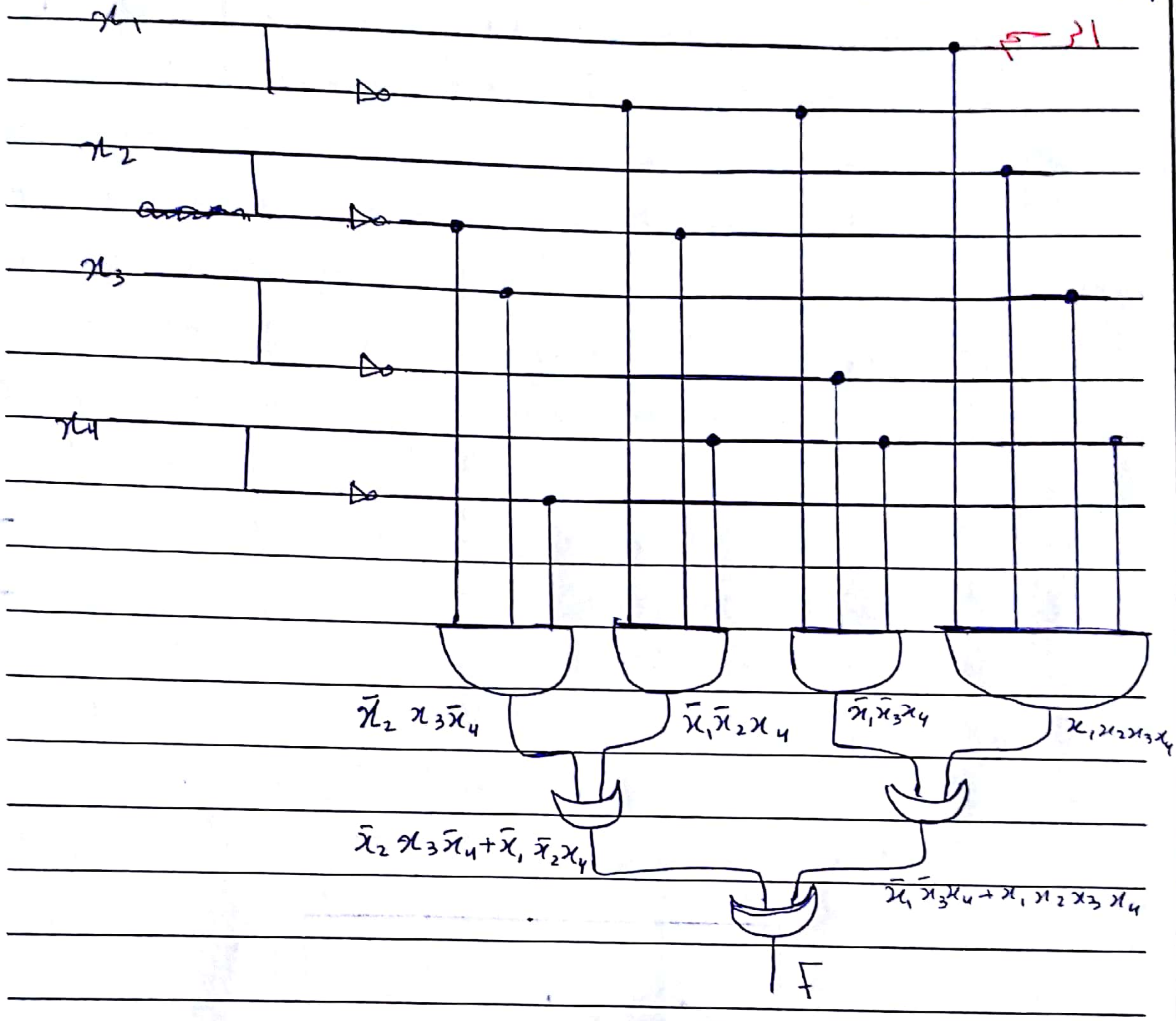
يمكن ضم الخلايا الموضحة بالعلامة • في المخطط وناتج الضم يمثل بـ $\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4$ " " " " " " " " " " " " "

$\bar{x}_1 x_3 x_4$ " " " " " " " " " " " " "

الخلية P تمثل $x_1x_2x_3x_4$ ومنه ناتج ضم الخلايا هو:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_1x_2x_3x_4$$



«الحد المتضمن»

لتكن $a_1,a_2,\dots,a_n$ عناصر مستقلة من جبر بوليان β

تعريف: نقول عن μ مكونة من جداء واحد أو أكثر من الحدود البسيطة $a_1,\dots,a_n,\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$ أنه متضمن للعبارة البوليانية $f(a_1,\dots,a_n)$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\mu \le f(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow \mu\cdot f(a_1,\dots,a_n)=\mu$$

تعريف: نقول عن حد مقتضٍ للعبارة البوليانية $f(a_1,\dots,a_n)$ أنه مقتضٍ أولي في الحالتين التاليتين: 1) عندما يكون μ حداً بسيطاً.
2) μ ليس حداً بسيطاً ولكن إذا انتزعنا منه أياً من الحدود البسيطة التي تكونه فإن الحد الناتج μ' لن يكون مقتضياً للعبارة $f(a_1,\dots,a_n)$

مبرهنة: كل عبارة بوليانية بالمتحولات المستقلة $a_1,a_2,\dots,a_n$ وغير معلومة تكتب وبطريقة وحيدة ~~مجموع~~ كمجموع لكافة الحدود المقتضية الأولية لها.

مثال: $f(a,b,c,d)=ab+bc+a\bar{c}+\bar{a}cd+\bar{a}\bar{b}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}c$

* لنرى هل الحد ab حداً مقتضياً ولذلك لنرى هل

$(ab)f(a,b,c,d)\overset{?}{=}(ab)$

$\ell_1=(ab)(ab+bc+a\bar{c}+\bar{a}cd+\bar{a}\bar{b}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}c)$

$=ab+abc+ab\bar{c}=a.b=\ell_2$

مضاعفات لـ

$\Leftarrow$ ab حد مقتضٍ لـ f.

* لنرى الحد $a\bar{c}$ حداً مقتضياً لـ f

$(a\bar{c})f(a,b,c,d)=ab\bar{c}+a\bar{c}=a\bar{c}\Rightarrow$ $a\bar{c}$ حداً مقتضٍ

* a وليس مقتضٍ لـ f لأن:

$a.f(a,b,c,d)=ab+abc+a\bar{c}+0+0+0\neq a$

* $\bar{c}$ ليس حد مقتضٍ لـ f

* $a\bar{c}$ مقتضٍ أولي لأنه لو نزعنا الحد البسيط a نتج لدينا الحد $\bar{c}$ وهو ليس مقتضٍ ولو نزعنا $\bar{c}$ نتج لدينا الحد a وهو ليس مقتضٍ.

* $\bar{a}$ ليس حداً مقتضٍ لـ f * $\bar{a}c$ ليس أولياً.

* c حداً مقتضٍ لـ f

* $\bar{a}c$ حداً مقتضياً لـ f لأن:

$(\bar{a}c)f(a,b,c,d)=\underbrace{\bar{a}bc+\bar{a}cd+\bar{a}b\bar{c}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}c}_{\text{جميعهم مضاعفات لـ } \bar{a}c}=\bar{a}c\Rightarrow$ مقتضياً $\bar{a}c$

نظرية: خاصة (1) $\forall a,b \in \beta \quad a \leq a+b$

خاصة (2) $\forall a,b,c,d \in \beta$

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c \leq b+d$$

~~تمرين~~ أثبت صحة الخاصتين (1) و (2)

انتهت المحاضرة