10-12-2018

نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: التاسعة عشر

◄ عنوان المحاضرة: التكاملات التابعة لوسيط

المحتوى العلمي:

امثلة على التكامل البيتاوي.

تعريف التكاملات التابعة لوسيط.

قاعدة لايبتنز.

مثال: أوجد التكامل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,.cos^n x\ dx \quad ; \quad m,n \in \mathbb{N}$$

حسب الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2p-1}\theta\,.cos^{2q-1}\theta\ d\theta$$

$$m = 2p-1 \Rightarrow 2p = m+1 \Rightarrow p = \frac{m+1}{2}$$

$$n = 2q-1 \Rightarrow 2q = n+1 \Rightarrow q = \frac{n+1}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x\,.cos^n x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

و لنأخذ مثال عن حالة خاصة عندما $m = 6\,, n = 4$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6 x \, . cos^4 x \ dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{5.4.3.2.1} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

تم حساب $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ و $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ و $\Gamma(6)$

من القانون $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

حيث:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma(6) = 5!$$

وبالتالي بالاختصار نجد:

$$I = \frac{3\pi}{2^9} = \frac{3\pi}{512}$$

مثال: أوجد التكامل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tan^n x \ dx$$

بتغيير المتحول: نفرض :

$$x = arctan \, t^{\frac{1}{2}} \Leftarrow tan \, x = t^{\frac{1}{2}}$$

ومنه:

$$dx = \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}dt$$

نغير حدود التكامل:

$$x = 0 \Longrightarrow t = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \infty$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}}.t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}\,dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t}\,dt$$

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, 1-\frac{n+1}{2}\right)$$

تم الحصول على $B\left(\frac{n+1}{2}, 1-\frac{n+1}{2}\right)$ من الأسس

حيث:

$$\frac{n-1}{2} = p - 1 \Longrightarrow p = \frac{n+1}{2}$$

و $p + q = 1 \Longrightarrow q - 1 = -p \Longrightarrow q = 1 - p$

$$q = 1 - \frac{n+1}{2} = \frac{2-n+1}{2} = 1 - \frac{n+1}{2}$$

ومنه:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, 1-\frac{n+1}{2}\right)$$

نلاحظ أن $B\left(\frac{n+1}{2}, 1-\frac{n+1}{2}\right)$ من الشكل $B(p, 1-p)$ ونحن نعلم واستنتجنا سابقاً أن:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

ومنه:

$$I = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{n+1}{2}.\pi}$$

التكاملات التابعة لوسيط

تعريف: ليكن لدينا التابع $f(x,t)$ معرف من أجل $x \in [a,b]$ و على المجال $t \in [t_1,t_2]$ من أجل كل قيمة مثبتة ل t يكون $f(x,t)$ قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، حيث التابع معرف على المستطيل R

$$R = \{(x,t) \quad ,a \le x \le b \quad , \quad t_1 \le t \le t_2\}$$
$$= [a,b] \times [t_1,t_2]$$

- نسمي التكامل من الشكل:

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

بالتكامل التابع للوسيط t

حيث $a = a(t), b = b(t)$

خواص :

مبرهنة (١) :

إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ مستمر على المستطيل المغلق

$$[a,b] \times [t_1,t_2] = \{(x,t): x \in [a,b], t \in [t_1,t_2]\}$$

حيث a,b,t_1,t_2 ثوابت حقيقية ، فإن التكامل

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

هو تابع مستمر بالنسبة للوسيط t.

البرهان :

$$F(t) - F(t_0) = \int_a^b [f(x,t) - f(x,t_0)]\,dx \qquad ; \; t_0 \in [t_1,t_2]$$

لتكن $\varepsilon > 0$ بما أن التابع $f(x,t)$ مستمراً بالنسبة ل t على $[t_1,t_2]$ ، فإنه يقابل على $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$ عدد موجب δ بحيث يتحقق:

$$|t-t_0| < \delta \Rightarrow |f(x,t)-f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

بما أن التابع $f(x,t)$ مستمر على المستطيل المغلق R فهو مستمر بانتظام على R فيكون اختيار δ مستقلاً عن x من المجال $[a.b]$.

ليكن t من المجال $[t_1,t_2]$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد δ مستقل عن x بحيث يتحقق:

$$|t-t_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(t)-F(t_0)| = \left|\int_a^b \left(f(x,t)-f(x,t_0)\right)dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x,t)-f(x,t_0)|dx < \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

أي أن $F(t)$ مستمر عند t_0 و بما أن $t_0 \in [t_1,t_2]$ اختيارية من $[t_1,t_2]$ إذاً التابع مستمر بالنسبة ل t على كامل المجال $[t_1,t_2]$.

◄**نتيجة :** إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ مستمر على المستطيل المغلق $[a,b]\times[t_1,t_2]$ يمكن التبديل بين رمزي النهاية و التكامل فنكتب :

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t_0)dx$$

الوسيط هو t والمكاملة بالنسبة ل x

مبرهنة(٢) قاعدة لايبنتز :

: إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ و مشتقه الجزئي بالنسبة للوسيط t أي $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمرين على المستطيل $[a,b]\times[t_1,t_2]$ فإن التكامل $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ قابل للاشتقاق بالنسبة لـ t على المجال $[t_1,t_2]$ و يكون :

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(t)}{\partial t}dx$$

من أجل t تحقق أن $t_1 \le t \le t_2$ شريطة أن يكون التكامل الأيمن $\int_a^{\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx$ متقارب بانتظام بالنسبة لـ t من $[t_1, t_2]$.

مثال :

أوجد $\frac{dF(t)}{dt}$ حيث : $F(t) = \int_0^1 \ln(x^2 + t^2)\, dx$

لنتحقق بدايةً من شروط مبرهنة لايبتنز :

لدينا التابع المكامل : $f(x,t) = \ln(x^2 + t^2)$ مستمر على المستطيل $[t_1, t_2] \times [0,1]$ حيث $0 < t_1$

كذلك فإن المشتق الجزئي $\frac{2t}{x^2+t^2} = \frac{\partial \ln(x^2+t^2)}{\partial t} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ و هذا التابع أيضاً مستمر على المستطيل المذكور سابقاً ، فشروط قاعدة لايبتنز محقق. لذلك نكتب :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^1 \ln(x^2 + t^2)\, dx = \int_0^1 \frac{\partial \ln(x^2 + t^2)}{\partial t} dx = \int_0^1 \frac{2\mathrm{t}}{x^2 + t^2} dx$$

$$= \left[2\, arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = 2\, arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

و لكي نعرف تماماً ما هي فائدة قاعدة لايبتنز ، سنعيد حل التمرين السابق دون الاستفادة من قاعدة لايبتنز و ذلك بأن نجري المكاملة أولاً ثم نوجد المشتق.

$$F(t) = \int_0^1 ln(x^2 + t^2)\, dx$$

نكامل بالتجزئة فنفرض :

$$u = \ln(x^2 + t^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2 + t^2} dx$$
$$dv = dx \Longrightarrow v = x$$

إذن يكون :

$$F(t) = [xln(x^2 + t^2)]_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 \frac{x^2 + t^2 - t^2}{x^2 + t^2} dx$$

$$= \ln(1 + t^2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{x^2 + t^2}\right) dx = \ln(1 + t^2) - 2[x]_{x=0}^{x=1} + 2\left[tarctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{F(t)} = \ln(1+t^2) - 2 + 2\,arctan\frac{1}{t}$$

الآن و قد أوجدنا F(t) نوجد مشتقه بالنسبة للمتحول المستقل t

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(ln(1+t^2) - 2 + 2t\,arctan\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{2t}{1+t^2} - 0 + 2\,arctan\left(\frac{1}{t}\right) + 2\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}.t = 2\,arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

نلاحظ أنه حصلنا على نفس النتيجة و لكن بكلفة أكبر بسبب الحاجة لإجراء المكاملة أولاً بطريقة التجزئة .. لذا استخدام قاعدة لايبتنز كان مفيداً جداً .

تعريف : نقول عن التكامل المعتل التابع لوسيط $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$ حيث $x \geq a, t_1 \leq t \leq t_2$ إنه متقارب بانتظام بالنسبة لـ t إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد K_ε بحيث يكون :

$$\left|\int_a^\infty f(x,t)dx - \int_a^\eta f(x,t)dx\right| = \left|\int_\eta^\infty f(x,t)dx\right| < K_\varepsilon$$

و ذلك لكل $\eta > K_\varepsilon$.

مبرهنة (٣): إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً من أجل $x \geq a$ و $t_1 \leq t \leq t_2$ و كان التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x,t)dx$ متقارب بانتظام بالنسبة لـ $t \in [t_1,t_2]$ فإن التابع $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$ يكون مستمراً على المجال $[t_1,t_2]$.

مثال: أثبت أن $F(t)$ تابع مستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث :

$$F(t) = \int_1^\infty \frac{t^2 - x^2}{(x^2+t^2)^2}dx$$

الحل:

لدينا $f(x,t) = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$ تابع مستمر من أجل كل $t \in [t_1,t_2]$ و $x \in [1,\infty[$ و نثبت أن التكامل المعطى متقارب بانتظام بالنسبة لـ t :

ليكن $\varepsilon > 0$ فيوجد $K_\varepsilon \geq \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{نضعها بعد الحل}}$ بحيث :

$$\left|\int_{\eta}^{\infty} f(x,t)dx\right| = \left|\int_{\eta}^{\infty} \frac{t^2 - x^2}{(t^2+x^2)^2}dx\right| = \left|\left[\frac{x}{t^2+x^2}\right]_{x=\eta}^{\infty}\right| = \frac{\eta}{\eta^2+t^2} < \frac{1}{\eta} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \eta > \frac{1}{\varepsilon}$$

إذاً $F(t)$ هو تكامل متقارب بانتظام بالنسبة لـ t من R ومنه وحسب المبرهنة ٣ يكون $F(t)$ مستمر بالنسبة لـ t من $[t_1, t_2]$ $\quad 1 \le x < \infty$

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو