◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: العشرون ◄ عنوان المحاضرة: الجداء والمجموع المباشر للزمر

المحتوى العلمي : سنتحدث في هذه المحاضرة عن الجداء المباشر الخارجي أو ما يعرف بالجداء الديكارتي والمجموع المباشر الداخلي للزمر من خلال :

١) خواص الجداء الديكارتي
٢) مبرهنات وتعاريف

مراجعة : لتكن G_1 , G_2 زمرتان فإن :

$$G_1 \oplus G_2 = \{(g_1, g_2) : g_i \in G_i , \quad i = 1, 2 \}$$

$$(a_1 , a_2) \oplus (b_1 , b_2) = (a_1 . b_1 , a_2 . b_2)$$

لا يشترط أن يكون $A \times B = B \times A$

من أهم خواص الجداء الديكارتي أنه ليس تبديلي إنما يوجد تماثل بالشكل $A \times B \approx B \times A$

مبرهنة: لتكن G_1, G_2 زمرتين عندئذ :

١) $G_1 \oplus G_2 \cong G_2 \oplus G_1$
٢) $Z(G_1 \oplus G_2) = Z(G_1) \oplus Z(G_2)$
٣) كل من $G_2 \oplus < e_1 >$, $G_1 \oplus < e_2 >$ زمرة جزئية في الزمرة $G_1 \oplus G_2$
٤) $G_1 \cong G_1 \oplus < e_2 >$ و $G_2 \cong < e_1 > \oplus G_2$ حيث e_1 , e_2 حيادي كل من G_1 , G_2 على الترتيب
٥) $G_1 \oplus G_2$ هي زمره تبديليه $\Leftrightarrow$ كل من G_1 , G_2 زمرة تبديليه (وظيفه)

الاثبات :

١) لنعرف العلاقة : $f : G_1 \oplus G_2 \to G_2 \oplus G_1$ بالشكل التالي :

$$\forall (g_1 , g_2) \in G_1 \oplus G_2 \ ; \ f(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$$

إن العلاقة f هي تطبيق متباين لأنه :

$$\forall (a_1 , a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \oplus G_2$$

$$(a_1 , a_2) = (b_1 , b_2) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \ , a_2 = b_2$$

$$\Rightarrow (a_2, a_1) = (b_2, b_1) \in G_2 \oplus G_1 \Rightarrow f\big((a_1, a_2)\big) = f\big((b_1, b_2)\big)$$

ومنه f تطبيق متباين .
و f تشاكل لأن :

$$f[(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2)] = f\big((a_1.b_1, a_2.b_2)\big)$$
$$= (a_2.b_2 , a_1.b_1) = (a_2, a_1).(b_2, b_1) = f\big((a_1, a_2)\big).f\big((b_1, b_2)\big)$$

وهو أيضا غامر لان :

$$\forall c, d \in G_2 \oplus G_1 \ ; \ c \in G_2 , \ d \in G_1$$

بالتالي: $(d, c) \in G_1 \oplus G_2$

$$\Rightarrow f(d, c) = (c, d)$$

ومما سبق نجد أن f تماثل .

٢) ليكن $(a, b) \in Z(G_1 \oplus G_2)$

لنثبت ان : $a \in Z(G_1) , \ b \in Z(G_2)$

ليكن $x \in G_1$ لنبرهن ان $ax = xa$

ليكن $y \in G_2$ لنبرهن ان $by = yb$

ليكن $x \in G_1$, $y \in G_2$ إن :

$$(x, y) \in G_1 \oplus G_2 \Rightarrow (a, b)(x, y) = (x, y)(a, b)$$

(a, b)ينتمي للمركز فهو متبادل مع العناصر

$$\Rightarrow (a.x, b.y) = (xa, yb)$$
$$\Rightarrow ax = xa \ , \ by = yb \Rightarrow a \in Z(G_1), b \in Z(G_2)$$
$$\Rightarrow (a, b) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$$
$$\Rightarrow Z(G_1 \oplus G_2) \subseteq Z(G_1) \oplus Z(G_2) \ldots . (1)$$

لنثبت الاحتواء المعاكس:

ليكن $(s, t) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$ عندئذٍ :

$$\forall (x, y) \in G_1 \oplus G_2 \ ; (s, t)(x, y) = (sx, ty)$$
$$= (xs, yt) = (x, y).(s, t) \Rightarrow (s, t) \in Z(G_1 \oplus G_2)$$
$$\Rightarrow Z(G_1) \oplus Z(G_2) \subseteq Z(G_1 \oplus G_2) \ldots . . (2)$$

من الاحتوائين : $\Rightarrow Z(G_1) \oplus Z(G_2) = Z(G_1 \oplus G_2)$

٣) لدينا $G_1 \oplus < e_2 > = \{(a, e_2) \ ; \ a \epsilon \ G_1\} \subseteq G_1 \oplus G_2$

"وهي مجموعة جزئية من $G_1 \oplus G_2$ وغير خالية لأن :

$$(e_1, e_2) \epsilon G_1 \oplus < e_2 >$$

ليكن $(a, e_2)(b, e_2) \epsilon \ G_1 \oplus < e_2 >$ حيث $a, b \ \epsilon \ G_1$

فإن : $(a, e_2)(b, e_2)^{-1} = (a, e_2)(b^{-1}, e_2^{-1})$

Syria Math Team

$$= \left(\underbrace{ab^{-1}}_{\epsilon\, G_1}, e_2 \right) \epsilon\, G_1 \oplus < e_2 >$$

وهذا يبين أن المجموعة $G_1 \oplus < e_2 >$ زمرة جزئية في $G_1 \oplus G_2$ وبنفس الطريقة نبرهن المجموعة الثانية.

٤) لنعرف العلاقة : $\varphi : G_1 \to G_1 \oplus < e_2 >$ بالشكل الاتي:

$$\forall a \epsilon\, G_1 \quad ; \varphi(a) = (a, e_2)$$

إن φ تطبيق ومتباين لان :

$$\forall\, a, b\ \epsilon\, G_1 \ : a = b\ ;\ (a, e_2) = (b, e_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

وإن φ تشاكل لأن:

$$\varphi(a\,.\,b\,) = (a.\,b\,, e_2) = (a, e_2).\,(b, e_2) = \varphi(a).\varphi(b)$$

كما أن φ غامر لأنه إذا كان $(d, e_2) \epsilon\, G_1 \oplus < e_2 >$ فإن $d \epsilon\, G_1$ ومنه: $\varphi(d) = (d.\, e_2)$

ومنه φ تماثل .

مبرهنة : لتكن G_2 , G_1 , H_2 , H_1 زمر اختيارية ، إذا كان $G_1 \approx H_1$ و $G_2 \approx H_2$ عندئذ فإن $G_1 \oplus G_2 \approx H_1 \oplus H_2$..... **الإثبات وظيفة .**

الإثبات

لنفرض أن $f_1 : G_1 \to H_1$, $f_2 : G_2 \to H_2$ هما التماثلان المفروضان

ولنعرف العلاقة $f : G_1 \oplus G_2 \longrightarrow H_1 \oplus H_2$ بالشكل التالي

أيا كان $(x , y\,) \in G_1 \oplus G_2$ فإن $f\big((x, y)\big) = \big(f(x), f(y)\big)$

فنجد أن f تماثل .

" وجدنا من المبرهنات السابقة أن كل زمرة يمكن النظر إليها على أنها جداء خارجي لزمرتين أو أكثر .

ومن خلال المبرهنة التالية سنجد طريقة لحساب مرتبة عنصر من الجداء المباشر للزمر وذلك بالاعتماد على مراتب المركبات .. "

Syria Math Team

مبرهنة:

لتكن G_1, G_2 زمرتين ولنفرض ان $(g_1, g_2) \epsilon\ G_1 \oplus G_2$ عندئذ:

$$o(g_1, g_2) = Icm\big(o(g_1), o(g_2)\big)$$

البرهان :

لنفرض أن :

$$o(g_1) = n, o(g_2) = m, o((g_1, g_2)) = t \ , \ Icm(n, m) = S$$

لنبدأ من مرتبة الثنائية : لما كان $o((g_1, g_2)) = t$ فإن :

$$(g_1, g_2)^t = (e_1, e_2)$$

$$\Rightarrow (g_1^t, g_2^t) = (e_1, e_2) \Rightarrow g_1^t = e_1 \ , \ g_2^t = e_2$$

وبالتالي فإن n يقسم t و m يقسم t

ومنه t مضاعف لكل من n, m ومنه $s \leq t$

ومن جهة أخرى: لما كان $s = Icm(m, n)$ فإن : s يقبل القسمة على كل من n, m

ومنه يوجد $\alpha, \beta \epsilon Z$:

$$s = \beta . m$$

$$s = \alpha . n$$

وبالتالي: $(g_1, g_2)^s = (g_1^s, g_2^s) = \left(g_1^{\alpha.n}, g_2^{\beta.m}\right) = \left((g_1^n)^\alpha, (g_2^m)^\beta\right) = (e_1, e_2)$

بما ان $o((g_1, g_2)) = t$ و $(g_1^s, g_2^s) = (e_1, e_2)$ وحسب مبرهنة سابقة نجد ان:

t يقسم $s \Leftarrow t \leq s$; $g^s = e \ : \forall s \in Z$ ومنه $t = s$

وذلك بناءً على علاقة الترتيب وخاصة التخالف

" وهكذا وجدنا أن مرتبة كل عنصر من الجداء المباشر لزمرتين يساوي المضاعف المشترك الأصغر لمراتب المركبات "

مبرهنة : لتكن H, K زمر دوارة منهية الشروط الآتية متكافئة :

١) $H \oplus K$ زمره دوارة .
٢) مرتبتي كل من H, K أعداد أولية فيما بينهما .

Syria Math Team

الإثبات :

لنفرض ان $K=<k>$ و $H=<h>$

$$(K:1)=m \quad , \quad h\in H \quad , \quad k\in K \quad , \quad (H:1)=n$$

$$O(k)=m \quad , \quad O(h)=n$$

"(1) $\Rightarrow$ (2)"لنفرض جدلاً أن $gcd(n,m)=d>1$ عندئذ فإن dيقسم كلاً من n,m

$$O\left(h^{n/d}\right)=d \quad , \quad h^{n/d}\in H$$

$$h^{n/d}\neq e_H$$

$$k^{m/d}\neq e_k \quad , \quad O\left(k^{m/d}\right)=d \quad , \quad k^{m/d}\in K$$

$$\left(h^{n/d},e_k\right),\left(e_H,k^{m/d}\right)\in H\oplus K$$

وأن $<\left(h^{n/d},e_k\right),\left(e_H,k^{m/d}\right)>$

زمرة جزئية من $H\oplus K$وأن

$$\left(<h^{\frac{n}{d}},e_k>:1\right)=O\left(\left(h^{\frac{n}{d}},e_k\right)\right)=Icm\left(h^{\frac{n}{d}},e_k\right)=d$$

$$\Rightarrow\left(<e_H,k^{\frac{m}{d}}>:1\right)=d$$

وهذا غير ممكن فإن $d=1$

"(2) $\Leftarrow$ (1)"لدينا $(h,k)\in H\oplus K$وأن

$$O((h,k))=Icm\left(O(h),O(k)\right)$$

$$=Icm(n,m)=n.m$$

ومنه $H\oplus K=<(h,k)>$

" يمكن تعميم النص السابق من أجل أي عدد منتهٍ من الزمر الدوارة "

نتيجة:ليكن $n>1$ عدد صحيح بحيث $n=n_1.n_2.\ldots\ldots.n_i$ عندئذ

$$Z_n\approx Z_{n_1}\oplus Z_{n_2}\oplus\ldots\ldots\oplus Z_{n_i}$$

عندما وفقط عندما تكون الاعداد n_i,n_j أولية فيما بينها وذلك أيا كان $i\neq j:i\leq n,j\leq 1$

Syria Math Team

مثال: بما أن العددين $2\ ,3$ أوليان فيما بينهما فإن $Z_2 \oplus Z_3 \approx Z_6$

بما ان العددين $5\ ,6$ أوليان فيما بينهما فإن $Z_5 \oplus Z_6 \approx Z_{30}$ ومنه

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \approx Z_2 \oplus Z_6 \oplus Z_5 \approx Z_2 \oplus Z_{30}$$

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \approx Z_2 \oplus Z_5 \oplus Z_6 \approx$$

$$Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z_5 \approx Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_{10} \approx Z_6 \oplus Z_{10}$$

لكن : $Z_2 \oplus Z_{30} \not\approx Z_{60}$

((المجموع المباشر الداخلي للزمر))

تعريف:

لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظمية في G ، نقول ان G مجموع مباشر للزمرتين H, K اذا كان :

١) $G = H.K$.
٢) $H \cap K =< e >$

" بعض المراجع ترمز للجداء المباشر بـ $\oplus$ وللجموع المباشر بـ $\times$ وهذا ما نتبعه في مقررنا ..
وبعضها يرمز للجموع بـ $\times$ و الجداء بـ $\oplus$ وكلاهما صحيح "

يفيد المجموع الداخلي المباشر في وحدانية الكتابة أي من خلاله نحصل على تطبيق وحيد ...
وسنرى ذلك في ما سندرسه .

مبرهنة : لتكن G زمرة و $H\ ,K$ زمر جزئية ناظمية في G .. الشروط التالية متكافئة :

١) $G = H \times K$
٢) كل عنصر $g \in G$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل $g = h\,.k$ حيث :

$$k \in K\ ,h \in H$$

الإثبات :

" (1) $\Leftarrow$ (2) " لدينا حسب الفرض $G = H.K$

ليكن $g \in G$ عندئذ يوجد $h \in H\ ,\ k \in K$ بحيث $g = h\,.k$

لنفرض أن $g = h_1\,.k_1$ حيث $h_1 \in H\ ,\ k_1 \in K$ عندئذ

$$h\,.\,k = h_1\,.\,k_1$$

$$h_1{}^{-1}h = k_1\,k^{-1} \in H \cap K = < e >$$

ومنه $h_1{}^{-1} = h$, $k_1{}^{-1} = k$

" $(2) \Leftarrow (1)$ " لدينا $H\,.\,K$ زمرة جزئية في G و $H.K \subseteq G$

ليكن $g \in G$ حسب الفرض يوجد

$$k \in K\ , h \in H$$

بحيث $g = h.k \in H.K$ ومنه $G \subseteq H.K$

$$G = H.K$$

ليكن $x \in H \cap K$ عندئذ $x = h_1\ , h' \in H$ ، $x = k_1\ , k' \in K$

إذا $e = h_1 k_1{}^{-1}$ ولدينا $e = e.e$

وحسب الفرض فإن $x = e\ , k_1 = e\ , h_1 = e$

" من فوائد المجموع الداخلي أنه يماثل الجداء الخارجي أي $H \times K \approx H \oplus K$ "

انتهت محاضرتنا لليوم ولكن سندرج إليكم تصحيح الأخطاء التي وردت معنا في المحاضرات السابقة ☹

محاضرة 12 : صفحة 7 الطلب 5

الخطأ : وردت الأقواس بهذا الشكل <>

التصحيح : ( )

محاضرة 12 : صفحة 7 سطر 3 من نهاية الصفحة

الخطأ : $k < t$

التصحيح : $k \leq t$

محاضرة 13 : صفحة 3 سطر 9

الخطأ $\frac{m}{n}$

التصحيح : $\frac{n}{m}$

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي

Syria Math Team