25-11-2018

نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: التاسعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: زمر التماثلات

المحتوى العلمي : في هذه المحاضرة سوف ندرس أنواعا محددة من التماثلات الزمرية وسنتطرق بعد ذلك للحديث عن المجموع المباشر من خلال بعض المبرهنات والتعاريف و الأمثلة .. لنبدأ ☺

مراجعة :

لتكن G , G' زمرتين و $f : G \longrightarrow G'$ تشاكلاً زمرياً يكون f تماثل إذا كان متباين ،، وغامر إذا كان $G = G'$ نقول عن التماثل f أوتومورفيزم أو تماثل للزمرة G

أيضا ليكن $I : G \longrightarrow G'$ يكون تقابل $G \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} G'$ بحيث يوجد $f.f^{-1} = I_G$

تمهيدية : لتكن G زمرة . إن مجموعة تماثلات الزمرة G أي $Aut\,(G)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات العنصر المحايد فيها هو التطبيق المطابق .... **الإثبات وظيفة** .

هل يوجد ضمن التماثلات زمر جزئية ؟؟ للإجابة عن هذا السؤال لنرى النص التالي ...

خواص بعض عناصر في الزمرة $Aut(\,G)$

تمهيدية : لتكن G زمرة و a عنصر من G عندئذ العلاقة :

$$T_a : G \to G: \quad \forall\, x \in G \;;\; T_a(x) = a.x.a^{-1}$$

١) T_a تماثل للزمرة G.

٢) $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$

الإثبات :

١) إن T_a تطبيق و متباين لأنه

$$\forall\, x, y \in G;$$

$$x = y \;\Leftrightarrow a.x.a^{-1} = a.y.a^{-1} \Leftrightarrow T_a(x) = T_a(y)$$

T_a غامر لأنه :

فإن $Z \in \overset{\text{مستقر}}{\overbrace{G}}$: $a^{-1}.Z.a \in \overset{\text{منطلق}}{\overbrace{G}}$ لنأخذ الصورة المباشرة

$$T_a(a^{-1}.Z.a) = a(a^{-1}.Z.a)a^{-1} = a.(a^{-1}.Z.a).a^{-1} = Z$$

ومنه نجد أن T_a غامر .

T_a تشاكل لأنه :

$$T_a(x.y) = a(x.y)a^{-1}$$
$$= a.x.a^{-1}.a.y.a^{-1} = T_a(x).T_a(y)$$

مما سبق نجد أن T_a تماثل في G

٢) وجدنا حسب ١) أن $T_a \in Aut(G)$ عندئذ $(T_a)^{-1} \in Aut(G)$

وهو يحقق $T_a.(T_a)^{-1} = T_e$

$$\forall x \in G \; ; \; T_a.T_a^{-1}(x) = T_e(x) = exe^{-1} = x$$

$$T\left(\underbrace{T_a^{-1}(x)}_{\in G}\right) = x$$

$$a.T_a^{-1}(x).a^{-1} = x$$

$$(T_a)^{-1}(x) = a^{-1}x\;a = a^{-1}x(a^{-1})^{-1}$$

$$T_{a^{-1}}(x) \Longrightarrow T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$$

تعريف : لتكن G زمرة و $a \in G$ نسمي التماثل T_a **تماثلا داخلياً** للزمرة G

نرمز لمجموعة التماثلات الداخلية للزمرة G بالشكل :

$$Inn(G) = \{T_a \; : \; a \in G\}$$

ينتج من التعريف أن $\phi \neq Inn(G) \subseteq Aut(G)$

لأن $T_e \in Inn(G)$

مبرهنة : لتكن G زمرة عندئذ :

١) $I_{nn}(G)$ تشكل زمرة جزئية ناظمية في زمرة التماثلات $Aut(G)$.

٢) $G/Z(G) \cong I_{nn}(G)$

الاثبات :

١) لنبرهن أن $Inn(G)$ تشكل زمرة جزئية في الزمرة Aut(G) .

وجدنا في التعريف السابق أن $Inn(G) \neq \emptyset$ وأن $Inn(G) \subseteq Aut(G)$

ليكن $T_a, T_b \in Inn(G)$ حيث $a, b \in G$ ولنبرهن أن $T^{-1}{}_b \in Inn(G)$ $\overset{\text{عملية تركيب تطبيقات}}{.}$ T_a

$$\forall x \in G \quad ; \quad \overbrace{T_a . T^{-1}{}_b}^{\text{تطبيق}}(x) = T_a\left(T^{-1}{}_b(x)\right)$$

$$= T_a\left(T_{b^{-1}}(x)\right) = a(b^{-1}.x.b)a^{-1}$$

$$(a.b^{-1})x(b.a^{-1}) = (a.b^{-1})x(a.b^{-1})^{-1} = \overbrace{T_{ab^{-1}}}^{\text{تطبيق}}(x)$$

بما أن $ab^{-1} \in G$ فإن $T_{ab^{-1}} \in Inn(G)$ وهذا يبين أن :

تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق: $T_a . T^{-1}{}_b = T_{ab^{-1}} \in Inn(G)$

ومنه $Inn(G)$ زمرة جزئية في الزمرة $Aut(G)$. ولنبرهن انها ناظمية في $Aut(G)$.

ليكن $g \in Aut(G)$ ولنبرهن على أن $g.Inn(G).g^{-1} \subseteq Inn(G)$

ليكن $f \in g.Inn(G).g^{-1}$ عندئذ يوجد $T_a \in Inn(G)$: $f = g.T_a.g^{-1}$

لدينا $f = g.T_a.g^{-1} \in Aut(G)$

ليكن $x \in G$ عندئذ :

$$f(x) = (g.T_a.g^{-1})(x) = g(T_a g^{-1}(x)) = g(a.(g^{-1}(x).a^{-1})$$

$$= g(a)g\left(g^{-1}(x)\right).g(a^{-1}) = g(a).x.g(a^{-1})$$

$$= g(a).x.\left(g(a)\right)^{-1} = T_{g(a)}(x)$$

وبالتالي $f = g.T_a.g^{-1} = T_{g(a)} \in Inn(G)$

وهكذا نجد أن $Inn(G)$ زمرة جزئية ناظمية في $Aut(G)$.

٢) لنعرف العلاقة : $\varphi : G \to Inn(G)$ بالشكل الاتي

$$\forall a \in G \ ; \ \varphi(a) = T_a$$

إن φ تطبيق لأن إذا كان $a, b \in G$: $a = b$ فإن $a^{-1} = b^{-1}$ و أن:

$$\forall x \in G \; ; \; a.x.a^{-1} = b.x.b^{-1}$$

$$\Longrightarrow T_a(x) = T_b(x)$$

ومنه $T_a = T_b$ لأنهما تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق .

$$\Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

إن φ تشاكل و لإثبات ذلك سنثبت أن : :

$$\varphi\left(\underbrace{ab}_{\in G}\right) = T_{ab}$$

$$\forall x \in G \; ; T_{ab}(x) = abx(ab)^{-1} = (ab)x(b^{-1}a^{-1})$$

$$= a(b.x.b^{-1})a^{-1} = T_a(b.x.b^{-1}) = \underbrace{T_{ab}}_{\text{تطبيق}}(x) = (T_a.T_b)(x)$$

ومنه : $T_{ab} = T_a.T_b$ تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق

ومنه : $\varphi(a.b) = T_{ab} = T_a.T_b = \varphi(a).\varphi(b)$

إن φ غامر لأنه :

أيا كان $T_d \in Inn(G)$ فإن $d \in G$

فإن $T_d = \varphi(d) = T_d$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى :

$$G/\ker\varphi \cong Inn(G)$$

ولنبرهن أن $\ker\varphi = Z(G)$

ليكن $a \in Z(G)$ عندئذ حسب التعريف $ax = xa$ $\underset{\text{نضرب بالعنصر } a^{-1}}{\Leftrightarrow}$ $a.x.a^{-1} = x$

ومنه $\mathrm{T}_a = \mathrm{T}_e = \varphi(a)$ $\underset{\text{تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{T}_a(x) = \mathrm{T}_e(x)$

اي أنه $Z(G) \subseteq \ker\varphi$

ليكن $b \in \ker\varphi$ عندئذ :

$$T_b = T_e \Longleftarrow \begin{cases} \varphi(b) = T_e \text{ حسب التعريف النواة} \\ \varphi(b) = T_b \text{ حسب التعريف} \end{cases}$$

وكون المنطلق لكل منهما هو G إذا يتساوا عند كل عنصر من عناصر G فإن :

$$\forall x \in G \quad \text{فإن} T_e(x) = T_b(x)$$

$$b.x.b^{-1} = exe^{-1} = x$$

$$\overset{b\text{ نضرب بالعنصر}}{\Longrightarrow} \quad bx = xb$$

إن b يتبادل مع جميع العناصر فإن $b \in Z(G)$ ومنه $\ker\varphi \subseteq Z(G)$

ومن الاحتوائين $Z(G) = \ker\varphi$

" لأجل كل عدد صحيح $n > 1$ لدينا تماثلابعدد العناصر الأولية في n .. لإثبات هذه الحقيقة لابد لنا من المبرهنة التالية "

مبرهنة :

ليكن $n \geq 1$ عدد صحيح و $0 < r < n$ اذا كان : $gcd(n,r) = 1$ عندئذ يوجد تماثل للزمرة Z_n.

الاثبات :

ليكن $0 < r < n$ و $gcd(n,r) = 1$

ولنعرف العلاقة :

$$\varphi : Z_n \to Z_n$$

بالشكل الاتي : $\varphi(x) = r.x mod - n$ فإن $\forall x \in Z_n$

إن φ تطبيق لأنه إذا كان $x, y \in Z_n$ بحيث $x = y$ عندئذ :

$$rx = ry \quad \overset{\text{باقي القسمة متساويين لأن العددين متساويين}}{\Longrightarrow} \quad r.x.mod - n = r.y.mod - n$$

ومنه $\varphi(x) = \varphi(y)$

لنبرهن على أن φ متباين :

ليكن $x, y \in Z_n$ بحيث $\varphi(x) = \varphi(y)$

$r.x.mod - n = r.y.mod - n$ حسب تعريف ال φ .

حيث $rx = q_1.n + \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$

$ry = q_2.n + \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$

$0 \le \lambda < n$ و $\lambda, q_1, q_2 \in Z$

من العلاقتين (١) و(٢) لنشكل $x - y$: $r(x-y) = (q_1 - q_2)\, n \quad (*)$

لنفرض جدلا أن $x \neq y$ عندئذ $x - y \neq 0$

ومن جهة أخرى بما أن $gcd(n,r) = 1$ فإنه يوجد $s, t \in Z$ بحيث

$$1 = sr + nt \quad \Rightarrow nt = 1 - sr$$

نضرب $(*)$ بـ t: نجد

$$rt(x-y) = (q_1 - q_2)nt$$

$$= (q_1 - q_2)(1 - sr) = q_1 - q_1rt - q_2 + q_2rt$$

لنعزل $q_1 - q_2$

$$(q_1 - q_2) = r\left[\underbrace{t(x-y) + s(q_1 - q_2)}_{\alpha}\right] = r\alpha$$

نعوض في $(*)$ نجد :

$$r(x-y) = r.\alpha.n$$

وكون $r \neq 0 \Longrightarrow (x-y) = \alpha.n$

طالما $x - y < n$ لانه ينتمي لـZ_n

ومن جهة اخرى نرى أن n تقسم $x - y$ اي أن $x - y > n$ وهذه غير ممكن وبالتالي الفرض خاطئ ومنه

$x = y$ أي ان التطبيق φ متباين .

φ تشاكل لأن :

$$\varphi(x+y) = [r(x+y)mod - n] = [(rx + ry)mod - n]$$

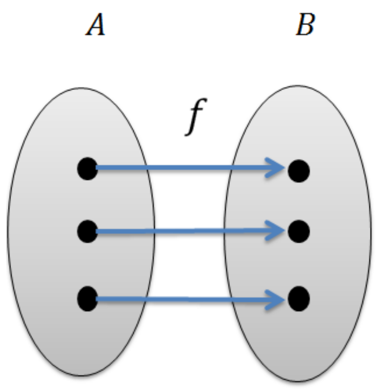
$$= [(rx)mod - n] + [(ry)mod - n] =$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) \quad \Longrightarrow \varphi \text{ تشاكل}$$

وأن φ غامر لان المجموعة Z_n منتهية .

مما سبق نجد أن φ تماثل .

" أي تطبيق متباين بين مجموعين منتهيتين هو تطبيق غامر ... فمثلاً لنأخذ التطبيق f المتباين :



واضح أنه غامر ..

إلى هنا أصدقائي نكون قد انتهينا من الفصل السابع من مقررنا " بنى جبرية (١) " وسنبدأ الآن بالفصل الثامن وسنأخذ القليل منه في هذه المحاضرة ..

" الجداءات والمجموع المباشران لزمر "

مقدمة : في هذا الفصل سوف نعالج طريقتين للتعامل مع الزمر ، الأولى هي كيفية تركيب مجموعة من الزمر للحصول على زمرة أكبر منها والثانية هي كيفية تجزئة زمرة للحصول على زمر أصغر منها وهذه الطرق سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة للزمر المنتهية .

الجداء المباشر للزمر :

تعريف: لتكن $G_1, G_2,,,, G_n$ مجموعة منتهية من الزمر يعرف الجداء المباشر (الخارجي) للزمر السابقة على أنه المجموعة $\{(g_1 , g_2 , \dots , g_n), \quad g_i \in G \quad ; \quad 1 \le i \le n \ \}$

والذي نرمز له بـ $G_1 \oplus G_2 \oplus,,,,,,,,,,,,\oplus G_n$ أي أن :

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \dots \dots \oplus G_n = \{(g_1, \dots \dots, g_n) \quad ; \quad g_i \in G_i \quad ; \quad 1 \le i \le n\}$$

تمهيدية: لتكن G_1, G_2 مجموعة منتهية من الزمر إن الجداء المباشر :

$$G_1 \oplus G_2 = \{(g_1, g_2) : \ a_i \in G_i \ , \qquad i = 1 , 2 \quad \}$$

هو زمرة بالنسبة إلى العملية (.) المعرفة كما يلي :

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \oplus G_2$$

فإن :
$$(a_1,a_2).(b_1,b_2)=(a_1\underbrace{.}_{G_1\text{معرف على }}b_1\,,a_2\underbrace{.}_{G_2\text{معرف على }}b_2\,)$$

يشكل زمرة الحيادي فيها هو $(e_1\,,e_2)$ حيث أن e_i هو حيادي الزمرة G_i وذلك لأجل كل $1\le i\le n$ ومقلوب العنصر $(a_1\ ,a_2\ )$ هو

$$(a_1\,,a_2)^{-1}=({a_1}^{-1}\,,{a_2}^{-1})$$

مثال : أوجد الجداء المباشر للزمرتين $U(8)\,,U(10)$.

$$U(8)=\{1,3,5,7\}$$

$$U(10)=\{1,3,7,9\}$$

الحـــل :

الجداء المباشر للزمرتين $U(8)\,,U(10)$ هو :

$$U(8)\oplus U(10)=\{(1,1),(1,3),(1,7),(1,9),(3,1),(3,3),(3,7),(3,9),$$
$$(5,1),(5,3),(5,7),(5,9),(7,1),(7,3),(7,7),(7,9)\}$$

كما أن :

$$\left(\overbrace{3}^{U(8)}\,,\underbrace{7}_{U(10)}\right).\left(\overbrace{5}^{U(8)}\,,\underbrace{9}_{U(10)}\right)=(3.7.mod-8\,,7.9.mod-10)=(5,3)$$

وأيضا :

$$(3,9).(3,3)=(3.3.mod-8\,,9.3.mod-10)=(1,7)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي

تنسيق: ولاء الأخضر