5-12-2018

نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄ المحاضرة: التاسعة عشر

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية ذات المتحولات الثابتة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة وحالاتها

٢ـ كيفية إيجاد الحل العام لها

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المتحولات الثابتة

الشكل العام لهذه المعادلات من الشكل

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots \dots + a_{n-1}y' + a_ny = g(x) \dots (1)$$

لايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) نقوم بما يلي:

١. نوجد حلا عاما للمعادلة التفاضلية المتجانسة $a_0y^n + a_1y^{(n-1)} + \cdots . + a_ny = 0$

وبعد ذلك نوجد حلا خاصا للمعادلة التفاضلية العير متجانسة وليكن y_p

٢. نجمع الحلين فيكون لدينا حلا عاما للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) أي: $Y = y + y_p$

١. نفرض ان $g(x)$ هو جداء كثير حدود من الدرجة m بدالة اسية:

أي من الشكل: $g(x) = p_m(x)e^{ax}$ أي بمعنى اخر: $l(y) = p_m(x)e^{ax}$

حيث $a \in R$ و c & $m \geq 0$ عندئذ *لايجاد الحل الخاص نميز حالتين:*

١. الحالة الأولى:

a ليس جذرا للمعادلة المميزة في هذه الحالة سنبحث عن الحل الخاص y_p من الشكل:

$y_p = q_m(x)e^{ax}$ حيث q كثير حدود من الدرجة m بامثال: q_1 , q_2 , q_m يجب تعيينها عن طريق الاشتقاق والتعويض والمطابقة مع الطرف الثاني مع أمثال x ذات الأسس المتماثلة

٢. الحالة الثانية:

a جذر للمعادلة المميزة من المرتبة k حيث $k \geq 1$ عندئذ نبحث عن حل خاص من الشكل

$y_p = x^k q_m(x) e^{ax}$ حيث q_m كثير حدود من الدرجة m بامثال $q_1 , q_2 , \dots , q_m$ يجب تعيينها عن طريق الاشتقاق والتعويض والمطابقة مع الطرف الثاني مع أمثال x ذات الأسس المتماثلة

مثال: $$y'' - 7 = 6e^{6x}$$

الحل:

١. نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة $y'' - 7y' = 0$

٢. نفرض الحل الخاص لها من الشكل $y = e^{\lambda x}$

٣. نشت مرتين نجد $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad \& \quad y' = \lambda e^{\lambda x}$

٤. نعوض في المعادلة الأساسية:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 7\lambda e^{\lambda x} = 0$$

بإخراج عامل مشترك $$e^{\lambda x}[\lambda^2 - 7\lambda] = 0$$

نقسم المعادلة على $e^{\lambda x} \neq 0$: $\lambda^2 - 7\lambda = 0$ وهي المعادلة المميزة نوجد حلها بالتحليل المباشر

$\lambda(\lambda - 7) = 0$ ومنه الحلول الخاصة هي $y_2 = e^{7x} \quad \& \quad y_1 = e^{0x} = 1$

والحل العام بدون طرف ثاني: $y = c_1 + c_2 e^{7x}$

١. <u>نوجد الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثان:</u>

نلاحظ ان $a = 6$ ليست جذرا للمعادلة المميزة اذا الحل الخاص من الشكل $y_p = Ae^{6x}$

نشتق مرتين لنجد $y_p'' = 36Ae^{6x} \quad \& \quad y_p' = 6Ae^{6x}$

نعوض في المعادلة الغير متجانسة:

$$36Ae^{6x} - 42Ae^{6x} = 6e^{6x} \Rightarrow -6Ae^{6x} = 6Ae^{6x} \Rightarrow A = -1 \Rightarrow y_p = -e^{6x}$$

<u>فيكون الحل العام للمعادلة الخطية "بجمع الحلين الخاص والعام"</u>

$$Y = y + y_p \Rightarrow c_1 + c_2 e^{7x} - e^{6x}$$

مثال2: $y'' - 4y' + y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة $y'' - 4y' + y = 0$

ومنه المعادلة المميزة $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(1) = 12 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 2 + \sqrt{3} \quad \& \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 2 - \sqrt{3}$$

والحلول الخاصة هي من الشكل:

$$y_1 = e^{(2+\sqrt{3})x} \qquad \& \qquad y_2 = e^{(2-\sqrt{3})x}$$

والحل العام بدون طرف ثان هو :

$$y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x}$$

الحل الخاص: نلاحظ ان: $a = 0$ ليس جذرا للمعادلة المميزة $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

بالاشتقاق: $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C \qquad \& \qquad y_p'' = 6Ax + 2B$

نعوض في المعادلة المتجانسة:

$$6Ax + 2B - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\left.\begin{array}{l} A = 2 \\ -12A + B = 3 \\ 6A - 8B + C = 0 \\ 2B - 4C + D = -1 \end{array}\right\}$$

$A = 2\,, B = 27\,, C = 204$

$D = 761$

ومنه الحل الخاص: $y_p = 2x^3 + 27x^2 + 204x + 761$

وبالتالي يكون الحل العام من الشكل:

$$Y = c_1 e^{\left(2+\sqrt{3}\right)x} + c_2 e^{\left(2-\sqrt{3}\right)x} + 2x^3 + 27x^2 + 204x + 761$$

تمارين الوظيفة

$$y'' - 7y' = (3 - 36x)e^{4x} \quad (١$$

الحل:

١) نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة: $y'' - 7y' = 0$

المعادلة المميزة: $y'' - 7\lambda = 0$

$$\lambda(\lambda - 7) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ , \quad \lambda = 7$$

٢) الحلول الخاصة هي: $y_1 = e^{0x} = 1 \quad \& \quad y_2 = e^{7x}$

٣) الحل العام دون طرف ثان: $y = c_1 + c_2 e^{7x}$

٤) نوجد الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثانٍ نلاحظ ان $a = 4$ ليست جذرا للمعادلة المميزة

$$\Rightarrow y_p = (A + Bx)e^{4x} \Rightarrow y_p = Ae^{4x} + Bxe^{4x}$$

بالاشتقاق: $y_p' = 4Ae^{4x} + Be^{4x} + 4Bxe^{4x} \quad \& \quad y_p'' = 16Ae^{4x} + 4Be^{4x} + 16Bxe^{4x}$

نعوض في المعادلة الغير متجانسة:

$$16Ae^{4x} + 4Be^{4x} + 16Be^{4x} - 7(4Ae^{4x} + Be^{4x} + 4Bxe^{4x}) = (3 - 36x)e^{4x}$$

$$-12Ae^{4x} + Be^{4x} - 12Bxe^{4x} = (3 - 36x)e^{4x}$$

$$\left.\begin{aligned} -12A + B &= 3 \\ -12B &= -36 \end{aligned}\right\} \quad B = 3 \ \& \ A = 0$$

$$\Rightarrow y_p = 3xe^{4x} \xrightarrow[\text{الحل العام}]{} y = c_1 + c_2 e^{7x} + 3xe^{4x}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عيد*علا الدالاتي