نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: العشرون ◄ عنوان المحاضرة: قاعدة لايبنتز

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مبرهنة (٤) قاعدة لايبنتز.

٢ـ مبرهنة (٥).

٣ـ مبرهنة (٦) تعميم قاعدة لايبنتز .

٤ـ أمثلة .

مبرهنة (٤) (قاعدة لايبنتز)

إذا كان التابعان $f(x,t)$ و $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمرين من أجل $x \geq a$ و $t_1 \leq t \leq t_2$ و كان التكامل $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$ متقارب ، فإن قاعدة لايبنتز صحيحة أي يكون :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

من أجل t تحقق أن $t_1 \leq t \leq t_2$ شريطة أن يكون التكامل الأيمن $\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$ متقارب بانتظام بالنسبة لـ t من $[t_1,t_2]$

تمرين (١): أحسب التكامل $I(x) = \int_\eta^\infty e^{-x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ ثم أحسب $I(1)$:

الحل : لنتحقق من شروط المبرهنة (٤) :

لنثبت أن التكامل المعتل متقارب بانتظام $\forall \varepsilon > 0$ فإنه يوجد $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ بحيث يكون :

$$I(x) = \left|\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\beta x}{x}dx\right| \leq \int_\eta^\infty \frac{e^{-x}}{\eta}dx = \left[\frac{-e^{-x}}{\eta}\right]_\eta^\infty = \frac{e^{-x}}{\eta}$$

$$\frac{1}{\eta e^{x}} < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{k_{\varepsilon}} < \varepsilon$$

محققة من أجل $\eta > k_{\varepsilon}$ بالتالي التكامل المعتل متقارب بانتظام .

لنثبت أن التكامل متقارب بانتظام

$$\left|\int_{\eta}^{\infty} \frac{df(x,\beta)}{d\beta} dx\right| = \left|\int_{\eta}^{\infty} e^{-x} cos\beta x\right| \leq \int_{\eta}^{\infty} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_{\eta}^{\infty} = \frac{1}{e^{\eta}} < \varepsilon$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{e^{-x} sin\beta x}{x} = \frac{e^{-x} cos\beta x}{x}$$

$$\frac{1}{e^{\eta}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < e^{\eta} \Rightarrow ln\frac{1}{\varepsilon} < \eta$$

نجد أن $ln\frac{1}{\varepsilon} < k_{\varepsilon} < \eta$ إذاً لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $ln\frac{1}{\varepsilon} < k_{\varepsilon}$

بحيث لأجل $k_{\varepsilon} < x$, $\left|\int_{x}^{\infty} e^{-x} cos\beta x\right| < \varepsilon$

التكامل متقارب بانتظام بالنسبة ل β.

حسب قاعدة لايبتنز(مبرهنة٤) نجد أن :

$$\boldsymbol{\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \int_{0}^{\infty} \frac{d}{d\beta}\left(e^{-x}\frac{sin\beta x}{x}\right) dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} cos\beta x\, dx}$$

و من أجل التكامل الناتج نطبق طريقة التجزئة إذ نفرض :

$$\boldsymbol{u = cos\beta x \Rightarrow du = -\beta sin\beta x\, dx}$$
$$\boldsymbol{dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}}$$

و عليه يكون :

$$\boldsymbol{= \underbrace{[-e^{-x} cos\beta x]_{0}^{\infty}}_{=1} - \beta \int_{0}^{\infty} e^{-x} sin\beta x\, dx}$$

و مرة أخرى :

$$\boldsymbol{u = sin\beta x \Rightarrow du = \beta cos\beta x dx}$$
$$\boldsymbol{dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}}$$

و يكون :

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta}=1-\beta\left(\underbrace{\left[-e^{-x}\sin\beta x\right]_0^{\infty}}_{=0}+\beta\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\beta x\,dx}_{\frac{dI(\beta)}{\beta}}\right)=1-\beta^2\frac{dI(\beta)}{d\beta}$$

$$(1+\beta^2)\frac{dI(\beta)}{d\beta}=1\Longrightarrow\frac{dI(\beta)}{d\beta}=\frac{1}{1+\beta^2}$$

لقد حصلنا على معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات إذ نكتب :

$$I(\beta)=\frac{1}{1+\beta^2}d\beta\Longrightarrow I(\beta)=\arctan(\beta)+c$$

من الناتج الأخير

من التكامل الأصلي

و لنحسب الثابت c بفرض $\beta=0$:

$$0=I(0)=\arctan(0)+c\Longrightarrow c=0$$

$$\boxed{\Longrightarrow f(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\arctan(\beta)}$$

و يمكن أن نستنتج أن:

$$I(1)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

مبرهنة (٥): إذا كان التابع $f(x,t)$ تابع مستمر على المستطيل $R=[a,b]\times[t_1,t_2]$ بالإضافة إلى أن $a(t),b(t)$ تابعين مستمرين من أجل $t_1\le t\le t_2$ و لهما مشتقان مستمران بالنسبة لـ t على المجال المذكور فإن التكامل $F(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}f(x,t)dx$ تابع مستمر بالنسبة لـ t من المجال $[t_1,t_2]$

الإثبات : لنضع $x=a(t)+[b(t)-a(t)]y$ عندئذٍ نلاحظ أن :

$$x_1=a(t)\Rightarrow a(t)=a(t)+[b(t)-a(t)]y\Rightarrow y_1=0$$
$$x_2=b(t)\Longrightarrow b(t)=a(t)+[b(t)-a(t)]y\Longrightarrow y_2=1$$

$$F(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}f(x,t)dx=\int_0^1 g(y,t)dy$$

Syria Math Team

$$: g(y,t) = f(a(t) + [b(t) - a(t)]y, t)$$

و لما كان $g(y,t)$ تابعاً تابعاً مستمراً على المستطيل $[t_1, t_2] \times [0,1]$ فإنه و حسب المبرهنة (١) يكون $F(t)$ مستمر بالنسبة للوسيط t.

مبرهنة (٦) :(تعميم قاعدة لايبنتز)(هام في الامتحان <اذكر نص تعميم قاعدة لايبنتز>): إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً و كان له مشتقاً جزئياً مستمراً $\frac{df}{dt}$ في المستطيل المغلق $[a,b] \times [t_1, t_2]$ و كان التابعان $a(t), b(t)$ معرفين و قابلين للاشتقاق و مشتقاتهما مستمرة على المجال $[t_1, t_2]$ فإن مشتق التابع $F(t)$ يعطى بالدستور :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{df(x,t)}{dt} dx - \underbrace{f(a(t),t)\frac{da(t)}{dt}}_{\text{قيمة التابع عند الحد الأدنى}} + \underbrace{f(b(t),t)\frac{db(t)}{dt}}_{\text{قيمة التابع عند الحد الأعلى}}$$

تمرين(١):

احسب التكامل : $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

الحل:

لنعرف التابع : $F(t) = \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx$

فنلاحظ أن $F(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \mathrm{J}$

و $F(0) = \int_0^0 \frac{\ln(1)}{1+x^2} dx = 0$

و لكون شروط لايبنتز محققة نكتب :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\right) dx + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} - 0$$

$$= \int_0^t \left(\frac{x}{1+tx}\right) \frac{dx}{1+x^2} + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

و لنفرق الكسر في دالة المكاملة إذ نكتب :

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}=\frac{A}{1+tx}+\frac{Bx+c}{1+x^2}$$

$$A=\lim_{x\to-\frac{1}{t}}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}=-\frac{t}{1+t^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+tx)(1+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{Ax}{1+tx}+\lim_{x\to\infty}\frac{Bx^2+Cx}{1+x^2}$$

$$0=\frac{A}{t}+B\Longrightarrow B=-\frac{A}{t}=\frac{1}{1+t^2}$$

لحساب C نضع $x=0$:

$$0=A+C\Longrightarrow C=\frac{t}{1+t^2}$$

إذن :

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}=\frac{\left(-\frac{t}{1+t^2}\right)}{1+tx}+\frac{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)x+\frac{t}{1+t^2}}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\left[-\frac{t}{1+tx}+\frac{x+t}{1+x^2}\right]$$

نعوض في التكامل و نكامل :

$$\frac{dF}{dt}=-\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}+t\frac{arctan(t)}{1+t^2}+\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}+t\frac{arctan(t)}{1+t^2}$$

نكامل : $F(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt+\int_0^t\frac{t}{1+t^2}\underbrace{arctant}_{u}\,dt$

لحساب التكامل الأخير نطبق التكامل بالتجزئة إذ نفرض $u=arctant$ و $dv=\frac{t}{1+t^2}$ فنجد أن :

$$F(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt+\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,arctant\right]_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt$$

Syria Math Team

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\, arctant$$

الآن :

$$J = F(1) = \frac{1}{2}\ln(2)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ln(2)$$

تمرين (٢) :

$$\boldsymbol{I(\alpha) = \int_0^1 (lnx)^n x^\alpha dx \quad : n \in N \ , \alpha > -1}$$

الحل: لدينا :

$$\boldsymbol{\int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha}}$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ $\boldsymbol{\alpha}$ و ذلك حسب قاعدة لايبتنز :

$$\boldsymbol{\int_0^1 x^\alpha (lnx) dx = -\frac{1}{(1+\alpha)^2}}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\boldsymbol{\int_0^1 x^\alpha (lnx)^2 dx = \frac{1.2}{(1+\alpha)^3}}$$

و أيضاً مرة ثالثة :

$$\boldsymbol{\int_0^1 x^\alpha (lnx)^3 dx = -\frac{1.2.3}{(1+\alpha)^4}}$$

حتى إذا وصلنا إلى المشتق من المرتبة $\boldsymbol{n}$ نجد :

Syria Math Team

$$\boxed{\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n}{(1+\alpha)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+\alpha)^{n+1}}}$$

و هو المطلوب.

تمرين(٣): انطلاقاً من المساواة : $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{a}} \ldots\ldots\ldots..(1)\;,\quad a > 0$

احسب التكامل : $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,x^{2n} dx$

الحل: و هو تكامل معتل حسب مبرهنة قاعدة لايبنتز

$$\left(e^{g(a)}\right)'_a = g'(a)e^{g(a)}$$

نشتق طرفي العلاقة (١) بالنسبة للوسيط a:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)'_a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-ax^2}x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}(-x^2)x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)a^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2.2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

نشتق مرة أخرى فنجد :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2.3}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{1}{a^3\sqrt{a}}$$

و نكمل اشتقاق لـ n مرة فنجد :

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2.n}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \frac{(2n-1)!!}{a^n\sqrt{a}}}$$

تمرين(٤) : انطلاقاً من المساواة : $, a > 0 \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{a}} \ldots\ldots(1)$

احسب :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$$

الحل: نشتق طرفي العلاقة (١) بالنسبة للوسيط a :

$$\int_0^{\infty} \frac{-1}{(a+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{(a+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

نشتق مرة أخرى :

$$\int_0^{\infty} \frac{-1.2}{(a+x^2)^3} dx = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{1.2}{(a+x^2)^3} dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$$

و نكمل حتى نشتق n مرة فنجد أن :

$$\int_0^{\infty} \frac{n!}{(a+x^2)^{n+1}} dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{a^n\sqrt{a}}$$

نقسم الطرفين على $n!$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^n n!}\frac{1}{a^n\sqrt{a}}$$

Syria Math Team

لكن :

$$2^n.n! = \underbrace{2.2.2 \dots .2}_{\text{مرة } n} \ 1.2.3.4 \dots n = (1.2)(2.2)(3.2)\dots(n.2) = 2.4.6\dots 2n$$

$$= (2n)!!$$

إذاً يكون :

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n)!!}\frac{1}{a^n\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2(2n)!!\,a^n\sqrt{a}}}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو

Syria Math Team