المحاضرة ((25)) والأخيرة

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: بعض التمارين + بعض مبرهنات

نظري

عملي

سؤال دورة 2014-2015 :

أن $\vec{r}(t) = (t-\sin t\ ,\ 1-\cos t\ ,\ 2t)\ ;\ t\in R$

هل الدالة $\vec{r}_1(\tau) = (\text{Arc}\sin\tau-\tau\ ,\ 1-\sqrt{1-\tau^2}\ ,\ 2\text{Arc}\sin\tau)$ حيث $\tau\in[-1,1]$

تمثيل لـ ℓ ؟؟ وإذا كان جوابك بالنفي، فهل هو تمثيل لقوس من ℓ ؟

وعلل إجابتك ؟؟

* الحل : لنفرض جدلاً أن $\vec{r}_1 \sim \vec{r}$ وهذا يعني وجود دالة غامرة ومستمرة ومتزايدة $\phi:[-1,1]\to R$ وتحقق

$$\vec{r}_1(\tau) = \vec{r}\circ\phi(\tau)$$

$$(\text{Arc}\sin\tau-\tau\ ,\ 1-\sqrt{1-\tau^2}\ ,\ 2\text{Arc}\sin\tau) = (\phi(\tau)-\sin\phi(\tau)\ ,\ 1-\cos\phi(\tau)\ ,\ 2\phi(\tau))$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Arc}\sin\tau-\tau = \phi(\tau)-\sin\phi(\tau) \\ 1-\sqrt{1-\tau^2} = 1-\cos(\phi(\tau)) \\ 2\text{Arc}\sin t = 2\phi(\tau) \quad \Longrightarrow \phi(\tau) = \text{Arc}\sin\tau \end{cases}$$

لكن

$$\text{Arc}\sin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\phi([-1,1]) = \text{Arc}\sin([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \neq R$$

وبالتالي ϕ ليست غامرة وبالتالي $\vec{r} \nsim \vec{r}_1$

نعم تمثيل لقوس من ℓ لأن

$$\vec{r}_1[-1,1] = \vec{r}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

ب) لتكن P_0 نقطة في $\mathbb{R}^3$ احداثيها الثالث $z_{P_0} = 2\pi$ ستكون P_0 منتمية للمجموعة النقطية لـ $\vec{r}$ لأن

$$\vec{r}(\pi) = \vec{OP_0}$$

لكنها لن تنتمي للمجموعة النقطية لـ $\vec{r}$ وذلك بسبب المتراجحة

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc}\sin \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq 2\,\text{Arc}\sin \leq \pi$$

*تمرين -2- سؤال دورة :

$\vec{r}(t) = (t,t,t^2) \,;\, t \in R$ عين عند النقطة الموافقة لـ $t=0$ ثلاثية فرينيه ،

$\vec{t} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{n}(0,0,1)$

طلب إضافي : أوجد معادلة كل من المستقيم المماس ، الناظم الأساسي ، ثنائي الناظم للمنحني عند النقطة الموافقة لـ $t=0$

، ثم معادلة كل من المستوي الملاصق ، المقوم ، الناظم

*الحل :

1) معادلة المماس

$$\vec{R} - \vec{r}(t_0) = u\vec{t}$$

$$(x,y,z) - (0,0,0) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

معادلات الوسيطية

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{u}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad z = 0$$

المعادلات الديكارتية $x = y$ و $z = 0$

2) المستقيم الناظم الأساسي :

$$\vec{R} - \vec{r}(t_0) = u\vec{n}$$

$$(x, y, z) = u(0, 0, 1)$$

$$\underbrace{x = 0 \quad , y = 0 \quad , z = 0}_{\text{المعادلات الوسيطة}}$$

3) المستقيم ثنائي الناظم

$$\vec{R} - \vec{r}(t_0) = u\,\vec{b}$$

$$(x, y, z) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

المعادلات الوسيطة:

$$x = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad , y = -\frac{u}{\sqrt{2}} \quad , z = 0$$

المعادلات الديكارتية: $x = -y$ و $z = 0$

4) المستوي الملاصق

$$[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{t}, \vec{n}] = 0$$

أو

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

5) المستوي الناظم

$$[\vec{R} - \vec{r}(t_0), n, \vec{b}] = 0$$

أو

$$[\vec{R} - \vec{r}(t_0)] \cdot \vec{t} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

ج) المستوي المقوم

$[\vec{R}-\vec{r}(t_0), b, t] = 0$

أي $(\vec{R}-\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{n} = 0$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 0}$$

تمرين : أوجد تقوس المنحني $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1-\cos t, t)$ أيّاً كانت قيمة t :

$$K = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

$\vec{r}'(t) = (1-\cos t, \sin t, 1)$

$\vec{r}''(t) = (\sin t, \cos t, 0)$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(1-\cos)^2 + \sin^2 t + 1} = \sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin t + 1}$$
$$= \sqrt{3-2\cos t}$$

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-\cos t & \sin t & 1 \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = -\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + (\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t)\,\vec{k}$$

$$= -\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + (\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t)\,\vec{k}$$

$$\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + (\cos t - 1)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + 1}$$
$$= \sqrt{2 - \cos t + \cos^2 t}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\sqrt{2 - 2\cos t + \cos^2 t}}{(3-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

*تمرين: أوجد تقوس منحني اللولب:

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad ; -\infty < t < \infty$$

$$K = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

$$\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\vec{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)\vec{k} - b(-a\sin t)\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}$$

$$= ab\sin t\,\vec{i} - ab\cos t\,\vec{j} + a^2\vec{k}$$

$$\|\vec{r}'(t) \wedge r''(t)\| = \sqrt{(ab\sin t)^2 + (ab\cos t)^2 + a^4}$$

$$= \sqrt{a^2b^2 + a^4} = \sqrt{a^2(b^2+a^2)} = a\sqrt{b^2+a^2}$$

$$K = \frac{a\sqrt{b^2+a^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{a}{b^2+a^2}$$

*"محاضرة نظري":

*مبرهنة: ليكن لمنحني $S \longrightarrow \vec{r}(s)$ تمثيلاً طبيعياً لمنحني من الصف C^3 عندئذ المشتقات لمتجهات فرينيه عند النقطة نظامية وغير منعدمة تحقق المعادلات

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \quad , \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -kt + \tau\vec{b} \quad , \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n}$$

تسمى هذه المساويات بعلاقات (دساتير) أو معادلات فرينيه

حيث K عدد حقيقي غير سالب يثبت انه تقوس المنحني

و τ عدد حقيقي غير سالب يثبت انه الفتل للمنحني

K هو سرعة دوران متجه واحدة المماس $\vec{T}$ (معدل تغيير زاويته) في جوار تلك نقطة

τ هو سرعة دوران المستوي الملاصق للمنحني في جوار تلك النقطة

* مبرهنة :

في كل نقطة من المنحني النظامي (جميع نقاطه نظامية) من الصف C_2 تقوس يعطى بالعلاقة $K = \|\vec{r}''(s)\|$

قد لا استطيع أن أجد المشتق الثاني بالنسبة للوسيط الطبيعي لذلك نلجأ الى المبرهنة التالية :

* مبرهنة : اذا كان $t \to \vec{r}(t)$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C_2 للمنحني L فإن التقوس لـ L عند كل نقطة نظامية P في $\vec{r}$ يعطى بالمساواة التالية :

$$K = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

* مبرهنة : ليكن L منحنياً نظامياً في الصف C_2 عندئذ L مستقيم $\Longleftrightarrow$ التقوس معدوم في جميع نقاطه

* تعريف : يسمى مقلوب تقوس المنحني عند نقطة P بنصف قطر تقوس ذلك المنحني عند تلك النقطة .

كما تسمى النقطة الموافقة على المستقيم الناظم عند النقطة P من المنحني ومن جهة واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$ والتي تبعد بعداً يساوي نصف قطر تقوس المنحني عند تلك النقطة

* مبرهنة : ليكن L منحنياً مستوياً جميع نقاطه نظامية وغير معدومة من الصف C_2 (النقطة غير معدومة $\Longleftrightarrow K \neq 0 \Longleftrightarrow \vec{r}''(s) \neq 0$) عندئذ :

- L دائرة مركزها مركز تقوس $\Longleftrightarrow$ والتقوس ثابت في جميع نقاط L
- ونصف قطرها هو مقلوب التقوس الثابت

* مبرهنة: ليكن L_1 و L_2 منحنيين من الصنف C_2 و P نقطة مشتركة بينهما عندئذ L_1 و L_2 تلامس عند P من المرتبة الثانية على الأقل $\Leftrightarrow$ L_1 و L_2 متجه واحدة مماس مشترك ومتجه واحدة ناظم أساسي مشترك وتقوس مشترك عند نقطة P

* تعريف: دائرة التقوس (الدائرة الملاصقة) لمنحني في نقطة منه:
نسمي الدائرة التي لها تلامس مع منحني L من المرتبة الثانية على الأقل عند نقطة P بدائرة التقوس (الدائرة الملاصقة) لـ L عند P

* مبرهنة: يوجد في كل نقطة نظامية وغير مقومة $(K \neq 0)$ من منحني من الصنف C_3 دائرة تقوس واقعة في المستوي الملاصق للمنحني عند النقطة (مركزها مركز التقوس للمنحني عند تلك النقطة ونصف قطرها نصف قطر تقوس المنحني عند تلك النقطة)

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0C}$$

مركز تقوس لمنحني عند P_0 $\left[\overrightarrow{R_c} = r(t_0) + \frac{1}{K(t)} \overrightarrow{n}(t_0)\right]$

* تمرين: أوجد التقوس ومركز التقوس ودائرة التقوس للولب في نقطة كيفية منه.

* الحل: اللولب يعطى بالمعادلات التالية:

$$\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad ; t \in R$$

وجدنا سابقاً $K = \frac{a}{a^2+b^2}$

$$\overrightarrow{R_c} = \overrightarrow{r}(t) + \frac{1}{K(t)} \overrightarrow{n}(t)$$

$$t = \frac{\overrightarrow{r'}(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{(-a\sin t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\overrightarrow{r''}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$\overrightarrow{r'}(t) \wedge \overrightarrow{r''}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\|\vec{r'}(t)\wedge\vec{r''}(t)\| = \sqrt{a^2b^2+a^4} = a\sqrt{b^2+a^2}$$

$$k = \frac{\|\vec{r'}\wedge\vec{r''}(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{b^2+a^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{r'}(t)\wedge\vec{r''}(t)}{\|\vec{r'}(t)\wedge\vec{r''}(t)\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\sin t, -\cos t, \frac{a}{b}\right)$$

$$\vec{n} = \vec{b}\wedge\vec{t} = \frac{ab}{a^2-b^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin t & -\cos t & \frac{a}{b} \\ -\sin t & \cos t & \frac{b}{a}\end{vmatrix} = \frac{ab}{a^2+b^2}\left(-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\cos t, -\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\sin t, 0\right)$$

$$= -\frac{b+a^2}{a^2+b^2}(\cos t, \sin t, 0) = -(+\cos t, \sin t, 0)$$

$$\vec{R_c} = (a\cos t, a\sin t, bt) - \frac{1}{\frac{a}{a^2+b^2}}(\cos t, \sin t, 0)$$

$$= \left(\frac{-b}{a}\cos t, \frac{-b^2}{a}\sin t, bt\right)$$

دائرة التقوس عند النقطة ما (عند النقطة موافقة لـ $t=\frac{\pi}{2}$)

$$\vec{R_c} = \left(0, \frac{-b}{a}, \frac{b\pi}{2}\right)$$

$$P_0 = \left(0, a, \frac{b\pi}{2}\right)$$

المعادلة الأولى من معادلة الدائرة هي :

$$(x-0)^2+\left(y+\frac{b^2}{a}\right)+\left(z-\frac{b\pi}{2}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2} \quad \bigstar$$

لنوجد معادلة المستوي الملاصق:

$$\vec{r}'(\tfrac{\pi}{2}) = (-a, 0, b) \quad , \quad \vec{r}''(\tfrac{\pi}{2}) = (0, -a, 0)$$

$$[\overrightarrow{P_0Q}, \vec{r}'(\tfrac{\pi}{2}), \vec{r}''(\tfrac{\pi}{2})] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-a & z-\frac{b\pi}{2} \\ -a & 0 & b \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$abx + a^2\left(z - \frac{b\pi}{2}\right) = 0 \quad \star\star$$

المعادلات الديكارتية لدائرة التقوس هي ★ و ★★

* مبرهنة: اذا كان p نقطة نظامية وغير معدومة من منحني C ممثل بـ $s \mapsto \vec{r}(s)$ من الصف C_3 فإن الالتفاف عند p يعطى بالعلاقة التالية

$$\tau = \frac{[\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s)]}{K^2}$$

* مبرهنة:

اذا كان $t \mapsto \vec{r}(t)$ تمثيلاً من الصف C_3 لمنحني C وكانت p نقطة نظامية وغير معدومة فإن الالتفاف عند p يعطى بالعلاقة التالية

$$\tau = \frac{[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)]}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|^2}$$

* مثال: أوجد الالتفاف للولب عند النقطة الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{2}$

$$(\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t))(\tfrac{\pi}{2}) = (ab, 0, a^2)$$

$$\vec{r}'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

$\vec{r}'''(\frac{\pi}{2}) = (a, 0, 0)$

$[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)]\Big|_{\frac{\pi}{2}} = (ab, 0, a^2) \cdot (a, 0, 0) = a^2 b$

$\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|\Big|_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}$

$\tau = \dfrac{a^2 b}{a\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

* مبرهنة : ليكن L منحنياً نظامياً جميع نقاطه غير معدومة ومن الصف C_3 عندئذ فإن L منحن مستو $\Longleftrightarrow$ التفافه معدوم في جميع نقاطه

* المعادلتان الذاتيتان لمنحني :

* مبرهنة : اذا كان $S \longrightarrow K(S)$, $S \longrightarrow \tau(S)$ دالتين مستمرتين على مجال مفتوح I (محدود أو غير محدود) فيوجد منحني وسيطه الطبيعي S وتمثل الدالتان K و τ التقوس والالتفاف له على الترتيب .

واذا كان لمنحنيين التقوس والالتفاف نفسه عند جميع نقاطهما فإن المنحنيين طبوقان

تسمى الدالتان $S \longrightarrow \tau(S)$ و $S \longrightarrow K(S)$ اللتان تعينان التقوس والالتفاف لمنحني (بدلالة طول التقوس) دون تحديد موضعه في الفضاء بالمعادلتين الطبيعيتين أو الدالتين المميزتين للمنحني

فهما كافيتان لمعرفة شكل المنحني الهندسي وليس موضعه

* تمرين : عين المعادلتين الذاتيتان لمنحني اللولب .

اي عين التقوس والالتفاف في كل نقطة

★★ انتهت محاضرة ★★

الى هنا أصدقائي نكون قد وصلنا الى نهاية مقررنا ونعتذر عن وجود اي خطأ .

-----IOM-Syria Math فريق ....