◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الثامنة عشر ◄ عنوان المحاضرة: تطبيق مبرهنات التماثل

**المحتوى العلمي:** أصدقائي سنأخذ في هذه المحاضرة مبرهنة ومجموعة من التمارين ..

## مراجعـــــة:

- لتكن $H \subseteq G$ زمرة جزئية ناظمية وهي نواة لتشاكل زمري غامر

$$H = Ker\,(w)$$

$$w : G \longrightarrow G/H$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f \text{ غامر}"] \arrow[dr, "w \text{ تشاكل}"'] & f(G) \subseteq G' \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ & \dfrac{G}{Ker(f)} \end{tikzcd}$$

- $H\,, K \subseteq G$ ، $K$ ناظمية في $G$

$$K\,.H/K \approx H/H \cap K$$

- $H \subseteq K \subseteq G$

$$\frac{G/H}{K/H} \approx G/K$$

- $G = \langle a \rangle$ ، العلاقة $\varphi : Z \longrightarrow G$

$$\forall\, n \in Z\ ;\ \varphi(n) = a^n$$

تطبيق غامر دوما كما ناقشنا حالتين

ـ $\varphi$ متباين $G \Leftrightarrow$ غير منتهية .

ـ $\varphi$غير متباين $\Leftrightarrow$ $G$ منتهية .

$G = \{e\ ,a\ ,a^2\ ,\dots ,a^{n-1}\}$عناصر مختلفة منى مثنى

التطبيق $\varphi$ سيكون تشاكل

- تكون الزمرة قابلة للعد إذا كان بينها وبين $\mathbb{N}$ تقابل

سنبرهن من خلال النص الآتي أنه لدراسة الزمر الدوارة غير المنتهية يكفي دراسة $\mathbb{Z}$

---

**مبرهنة :** القضايا التالية صحيحة.

١) كل زمرة دوارة وغير منتهية تماثل الزمرة $Z$ .
٢) جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة .
٣) كل زمرة دوارة منتهية ومرتبتها $n$ تماثل الزمرة $Z_n$ .
٤) جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها متماثلة .

## البرهان :

١) لتكن $G$ زمرة دوارة غير منتهية عندئذ :

يوجد $a \in G$ حيث $G = < a >$

وجدنا سابقا أن العلاقة : $\varphi : Z \to G$المعرفة بالشكل :

$$\forall n \in Z\ ;\ \ \varphi(n) = a^n$$

وجدنا سابقا أن $\varphi$ غامر و قد تم إثبات ذلك في محاضرات سابقة وإن $\varphi$ متباين لأن $G$ غير منتهية

لنبرهن أن $\varphi$تشاكل : ليكن $n, m \in Z$

$$\varphi(n+m) = a^{n+m} = a^n . a^m = \varphi(n). \varphi(m)$$

وهذا يبين أن $\varphi$ تماثل أي ان $Z \cong G$

٢) لتكن $G, G'$ زمرتين دوارتين غير منتهية

عندئذ حسب ١ يوجد تماثل

$$g : Z \to G$$

$$f : Z \to G'$$

كلاً منهما تماثل ومنه :

$$g^{-1} : G \to Z$$

ايضا تماثل لآنه تقابل وايضاً هو تشاكل

٣) لكن $G = < a >$ زمرة دوارة منتهية ومرتبتها $n$

لنعرف العلاقة $\varphi : Z_n \longrightarrow G$ بالشكل :

$$\forall\, m \in Z \,;\ \varphi(m) = a^m$$

$\varphi$ تطبيق لأن : ليكن $s , t \in Z_n$ بحيث $\varphi(s) = \varphi(t)$

عندئذ $a^s = a^t \implies a^{s-t} = e = a^0$

ولما كانت $G$ زمرة دوارة منتهية نجد أن $s - t = 0 \implies s = t$

لنبرهن أن التطبيق $\varphi$ متباين: $\forall s , t \in Z_n$ فإن $0 < s , t < n$

$$\varphi(s) = \varphi(t) \iff a^s = a^t \iff s = t$$

لنبرهن أن $\varphi$ غامر : ليكن $y \in G$ فإن $y = a^s$ حيث $0 \le s < n$

أي أن $s \in Z_n$ وبالتالي $\varphi(s) = a^s = y$

لنبرهن أن $\varphi$ تشاكل : ليكن $s, t \in Z_n$ فإن $\varphi(s + t) = a^{s+t}$

$$= a^s \,.\, a^t = \varphi(s) \,.\, \varphi(t)$$

ومنه فإن $\varphi$ تماثل .

٤) ينتج مباشرة من ٢)

---

من خلال ٣) و ٤) نرى أن دراسة $Z_n$ تغني عن دراسة كل الزمر الدوارة المنتهية

" يمكن إثبات ٢ من خلال إثبات أن التماثل علاقة متعدية "

" تذكر : الصورة المباشرة لأي زمرة دوارة هي زمرة دوارة "

**تمرين :** أثبت أن $U(5) \approx Z_4 \approx U(10)$

**الحـــل :**

نعلم أن $Z_4 =< 3 > = < 1 >$

وجدنا سابقا أن $U(10)$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر $3$ و مرتبتها $4$ ومنه $Z_4 \approx U(10)$

$$U(5) = \{1 , 2 , 3 , 4 \}$$

$$U(5) =< 2 > \quad \Leftarrow \quad 2^0 = 1 \;,\; 2^1 = 2 \;,\; 2^2 = 2 \;,\; 2^3 = 3$$

$$U(5) = < 3 > \quad \Leftarrow \quad 3^0 = 1 \;, 3^1 = 3 \;,\; 3^2 = 4 \;,\; 3^3 = 2$$

أي أن $U(5)$ دوارة مرتبتها $4$ ، $U(5) \approx Z_4$

إذا $U(10) \approx Z_4 \approx U(5)$

---

**تمرين :** أثبت أن $U(10)$ ، $U(12)$ غير متماثلين .

## الحـــــل :

$$U(12) = \{1 , 5 , 7 , 11 \}$$

$$5^0 = 1 \;,\; 5^1 = 5 \;,\; 5^2 = 1 \;\Longrightarrow\; U(12) \neq < 5 >$$

$$7^0 = 1 \;,\; 7^1 = 7 \;,\; 7^2 = 1 \;\Longrightarrow\; U(12) \neq < 7 >$$

$$11^0 = 1 \;,\; 11^1 = 11 \;,\; 11^2 = 1 \;\Longrightarrow\; U(12) \neq < 11 >$$

إذا $U(12)$ ليست دوارة $\forall x \in U(12) \;;\; x^2 = 1$

لنفرض جدلا أن $U(12) \approx U(10)$ عندئذ يوجد تشاكل متباين وغامر

وليكن $\varphi : \mathrm{U}(10) \longrightarrow \mathrm{U}(12)$

ولما كانت $U(10)$ دوارة فإن $\varphi\big(\mathrm{U}(10)\big) = U(12)$ فنجد أن الزمرة $U(12)$ دوارة

وهذا غير ممكن إذا $U(10) \neq U(12)$

**تمرين:** ليكن $f : A \longrightarrow B$ . تطبيق $f$ تقابل $\Leftrightarrow$ يوجد $g : B \longrightarrow A$

بحيث $f \,.\, g = I_B \;,\; g \,.\, f = I_A$

## الحـــــل :

" $\Leftarrow$ " لنفرض ان $f$ تقابل ولنعرف $g$ بالشكل $g : B \longrightarrow A$

ولما كان $f$ غامر يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = b$ لنضع $g(b) = a$ فنجد أن $g$ تطبيق لأنه إذا كان $b', b \in B$ بحيث $b = b'$ فإنه يوجد $a, a' \in A$ بحيث $f(a) = b$، $f(a') = b'$ ومنه $f(a) = f(a')$ وبالتالي $a = a'$ وذلك كون $f$ تقابل

وأن $g(b) = a = a' = g(b')$ إذا $g$ تطبيق ومتباين لأنه إذا كان $g(b) = g(b')$ نجد أن $a = a'$ فيكون $b = f(a) = f(a') = b'$ فهو متباين

أيضا $g$ غامر لأنه إذا كان $x \in A$ فإن $f(x) \in B$

لنفرض أن $f(x) = y$ حيث $y \in B$ فإن $g(y) = x$ أيا كان $a \in A$ فإن $f(a) \in B$

لنفرض ان $f(a) = b$ حيث $b \in B$ فنجد أن $g(b) = a$ فيكون $f(a) = f\big(g(b)\big)$

$$g.f(a) = g\big(f(a)\big) = g(b) = a = I_a$$

$$g\,.f = I_A$$

بطريقة مشابهة نجد أن $f.g = I_B$

" $\Rightarrow$ " لنبرهن على أن $f$ متباين وغامر

ليكن $a, a' \in A$ بحيث $f(a) = f(a')$

$g\big(f(a)\big) = g(f(a'))$ $\Leftarrow$ $a = a'$ أي أن $f$ متباين

ليكن $y \in B$ فإن $f.g(b) = I_B(b) = b$

$$f\left(\underbrace{g(b)}_{=a\in A}\right) = b$$

ومنه $f$ غامر .

**تمرين:** ليكن $n > 1$ عدد صحيح و $k$ قاسم موجب للعدد $n$ عندئذ يوجد تشاكل زمري

$$\varphi: U(n) \to U(k) \quad \text{نواته} \quad U_k(n)$$

## البرهان :

لدينا $U(n) = \{x \ ; x \ \in Z : \ 1 \le x < n \quad : gcd(x,n) = 1\}$

وحسب خوارزمية القسمة لأجل $x, k$ فإن $0 \le r < k \qquad x = qk + r : q, r \in Z$

لنفرض أن $r = 0$ عندئذ $x = qk$ وهذه يبين أن k يقسم $x$ ولما كان $k$ يقسم $n$ نجد ان $k$

قاسم مشترك للعددين $x, n$ وهذا يناقض كون $gcd(x,n) = 1$ اي أن $r \neq 0$ ومنه $1 \le r < k$

لنفرضجدلا ان $gcd(r,k) = d > 1$ عندئذ $s,t \in z \quad : \quad k = td \qquad r = sd,$

$$x = qtd + sd = (qt + s)d$$

ومنه $d$ يقسم $x$

من جهة اخرى لما كان $d$ يقسم $k$ و $k$ يقسم $n$ فإن $d$ يقسم $n$ وهذه يناقض كون $gcd(x,n) = 1$

مما سبق نجد ان $gcd(r,k) = 1$ ومنه $r \in U(n)$ والأن لنعرف العلاقة :

$$\varphi: U(n) \ \to U(k)$$

بالشكل الاتي $\forall x \in U(n): \varphi(x) = x \, mod - k = r$

واضح أن $\varphi$ تطبيق

وإن $\varphi$ تشاكل لأنه إذا كان $x, y \ \in \ U(n)$ فإن :

$$\varphi(x.y) = (x.y) mod - k$$

$$= (x \, mod - k).(y \, mod - k)$$

$$= \varphi(x).\varphi(y) \quad \Longrightarrow \quad \text{تشاكل } \varphi$$

لدينا $U_k(n) = \{x : x \in U(n) \ : x \, mod - k = 1\}$

ليكن $x \in ker(\varphi)$ عندئذ $x \in U(n)$

$$\varphi(x) = x \, mod - k = 1 \Longrightarrow x \in U_k(n)$$

ومنه $ker(\varphi) \subseteq U_k(n)$

ليكن $y \in U_k(n)$ عندئذ $y \in U(n)$ وأن $y \, mod - k = 1$ وبالتالي $\varphi(y) = 1$

ومنه $y \in ker(\varphi)$ عندئذ $U_k(n) \subseteq ker(\varphi)$ من الاحتوائين نجد أن $U_k(n) = ker(\varphi)$

" انتهت المحاضرة ولكن يوجد نقص في مبرهنة بالمحاضرة السادسة سوف ندرج تصحيحها الآن "

**مبرهنة :**كل مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة قابلة للعد تكون ايضاً قابلة للعد.

## البرهان

لنفرض أن $A$ مجموعة قابلة للعد حسب التعريف يوجد تقابل $f: A \to \mathbb{N}^*$

لتكن $K$ مجموعة جزئية غير منتهية في $A$ .. نعرف العلاقة $\varphi : K \to A$ بالشكل :

$\varphi(K) = K \ , \ \forall k \in K$ حيث $k \subset A$

هي تطبيق متباين ومنه التطبيق $f.\varphi : k \to \mathbb{N}^*$ متباين أيضا

لنفرض أن $D = f.\varphi(A)$

فنجد أن $f.\varphi: K \longrightarrow D$ تطبيق متباين وغامر

حسب التعريف فإن $card\ D = card\ K$

لما كانت المجموعة $K$ غير منتهية فإن $D$ غير منتهية بسبب تساوي القدرتين ..

أصبح لدينا $D \subset \mathbb{N}^* \ , \ D$ غير منتهية وحسب النص السابق نجد أن :

$$card\ D = card\ \mathbb{N}^*$$

ومنه : $card\ K = card\ \mathbb{N}^*$ أي أن $k$ قابلة للعد وهو المطلوب ..

**انتهت المحاضرة**

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي