نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄ المحاضرة: السابعة عشر

◄ عنوان المحاضرة: حالات خاصة للمعادلات التفاضلية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ ـ امثلة

٢ ـ المعادلة التفاضلية التي لاتحوي x

٣ ـ المعادلات التفاضلية الحاوية على المشتق فقط

٤ ـ معادلات لاتحوي الدالة المجهولة y

تمرين: اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية:

١- $y = 2px - p^2$

الحل:

- نشتق بالنسبة ل x :

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow p - 2p = 2(x-p)\frac{dp}{dx}$$

$$-p = 2(x-p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2(x-p)}{-p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2x}{-p} + 2$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2$$

و هي معادلة خطية نوجد الحل بدون طرف ثانٍ: $\frac{dx}{dp} = \frac{-2}{p}x$

و هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات ☺

$$\frac{dx}{x} = \frac{-2}{p}dp \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{c}\right| = \ln\frac{1}{p^2} \Rightarrow x = \frac{c}{p^2}$$

نجعل c تابعة ل p:

$$c = \frac{2}{3}p^3 \underset{\text{نوجد}}{\Rightarrow} x = \frac{c}{p^2} \dots . (1)$$

ومنه نعوض (1) في المعادلة التفاضلية

$$y = 2p\left(\frac{c}{p'}\right) - p^2 \dots . (2)$$

ونلاحظ ان $(1) \,\&\, (2)$ هما الحل العام

$xy'^2 + y'^2 = 0$ -٢

الحل:

$$y = xp^2 + p^2$$

نشتق بالنسبة ل x:

$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$p - p^2 = 2p(x+1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow p(1-p) = 2p(x+1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}$$

$$\ln\left|\frac{x+1}{c}\right| = \ln\left|\frac{1}{(1-p)^2}\right| \Rightarrow x + 1 = \frac{c}{(1-p)^2} \Rightarrow x = \frac{c}{(1-p)^2} - 1$$

المعادلات التفاضلية الحاوية على المشتق فقط

وهي من الشكل: $F(y') = 0$ ولنفرض ان لهذه المعادلة عددا منتهيا او غير منتهي من الجذور الحقيقية:

$$y_i = p_i \quad ; i = 1,2, \dots . , n$$

عندئذٍ يكون: $F(p_i) = 0 \quad ; \quad i = 1,2, \dots . , n$

وبالمكاملة: $y = p_i x + c$ ومنه يكون: $\frac{y-c}{x} = p_i$

وبتعويض هذه القيمة ل p_i في $F(p_i) = 0$ نحصل على العلاقة $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$

وهي تمثل التكامل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^3 - y'^2 + y' - 1 = 0$$

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3-\left(\frac{y-c}{x}\right)^2+\left(\frac{y-c}{x}\right)-1=0$$

المعادلة التفاضلية التي لا تحوي على x

الشكل العام لهذه المعادلة هو $F(y,y')=0$ لنفرض ان لهذه المعادلة تمثيلا وسيطيا على الشكل:

$$y=\varphi(t)\quad \& \quad y'=\psi(t)$$

باستخدام العلاقة الأساسية $dy=y'dx$ نجد:

$$\varphi'(t)dt=\psi(t)dx \Rightarrow dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}dt$$

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}dt+c$$

ومنه تم تعريف الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال: $y'^3-y=0$

الحل:

نفرض ان $y'=t \Rightarrow y=t^3$ باستخدام العلاقة الأساسية:

$$dy=y'dx \Rightarrow 3t^2=t\,dx \Rightarrow x=\frac{3}{2}t^2+c \quad \& \quad y=t^2$$

"وهو الحل وسيطيا"

المعادلات التي لا تحوي الدالة المجهولة y

هذه المعادلة التفاضلية لها الشكل: $F(x,y')=0$ نفرض الحل العام على الشكل الوسيطي:

$$y'=\psi(t)\quad \& \quad x=\varphi(t)$$

ومن العلاقة الأساسية: $dy=y'\,dx \Rightarrow dy=\psi(t)+\varphi(t)dt$ وهي معادلة تفاضلية في المتحول t والدالة y بالمكاملة: $y=\int\psi(t)+\varphi(t)dt$ وبالتالي جملة المعادلتين هي

$$y=\psi(t,c)\quad , \quad x=\varphi(t)$$

"تؤلف الحل العام وسيطيا"

تمارين الوظائف لهذه المحاضرة سنقوم بإدراج حلهن ☺

اوجد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين التاليتين:

-١ $x = e^{y'} - y'$

الحل:

نفرض ان $y' = t$ ومنه $x = e^t - t$ ومن العلاقة الأساسية: $dy = y'dx$

$$\Rightarrow dy = t(e^t - 1)dt \Rightarrow y = t.e^t - e^t - \frac{t^2}{2} + c$$

ومنه: $y = t.e^t - e^t - \frac{t^2}{2} + c \quad \& \quad x = e^t - t$

"وهو الحل العام وسيطيا"

-٢ $y = y' + \ln|y'|$

الحل:

نفرض ان $y' = t$ ومنه $y = t + \ln t$ ومن العلاقة الأساسية نجد $dy = y'dx$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} \Rightarrow dx = \frac{1 + \frac{1}{t}}{t}dt \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \underset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} x = \ln|t| - \frac{1}{t} + c$$

ومنه: $x = \ln|t| - \frac{1}{t} + c \quad \& \quad y = t + \ln|t|$

"وهو الحل العام وسيطيا"

"تصرف كما لو انه من المستحيل ان تفشل"

إعداد: ماريا عيد*علا الدالاتي