نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الواحد والعشرون

◄ عنوان المحاضرة: النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية

المحتوى العلمي : : سنكمل ما بدأناه في هذه المحاضرة عن الجموع و الجداء المباشران للزمر وثم سنبدأ بالجزء العملي من مقررنا ..

أولا : المجموع المباشر الداخلي والخارجي للزمر

تذكرة :الجداء الخارجي $G_1 \oplus G_2 = \{(g_1 , g_2); g_i \in G_i\}$

$$o\big((g_1, g_2)\big) = lcm\,\big(o(g_1), o(g_2)\big)$$

$$G_1 \approx G_2 \oplus < e > \subseteq G_1 \oplus G_2$$

الزمرة $K \oplus H$ دوارة $\Leftrightarrow$ أن h , k أعداد أولية

المجموع المباشر الداخلي : $G = H \times K$ عندما وفقط عندما $\forall g \in G ; g = h . k$

حيث H , K زمرتين جزئيتين ناظميتين غير متقاطعين

سندرس العلاقة بين الجداء الداخلي والخارجي من خلال المبرهنة التالية :

مبرهنة : لتكن K , H زمر جزئية ناظمية من الزمرة G عندئذٍ $K \times H \approx K \oplus H$

الـــحـــل

لنعرف العلاقة $f : K \times H \longrightarrow K \oplus H$ بالشكل

$\forall k \in K , h \in H$ فإن $f(k\,h) = (k , h)$ حيث $kh \in K.H$

إن f تطبيق لأنه أيا كان $k_1 , k_2 \in K$, $h_1 , h_2 \in H$ بحيث $k_1 h_1 = k_2 h_2$

$$\Leftrightarrow k_2^{-1} k_1 = h_2 h_1^{-1} \in K \cap H = < e > \Leftrightarrow$$

$$k_1 = k_2 \quad , h_1 = h_2 \quad \Leftrightarrow (k_1 , h_1) = (k_2 , h_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(k_1 \; h_1) = f(k_2 \; h_2)$$

و f متباين أيضا

f تشاكل لأنه $f\big((k_1h_1).(k_2h_2)\big) = f\ (k_1(h_1k_2)h_2)$

$$= f(k_1(k_2h_1)h_2) = f((k_1k_2)(h_1h_2)) = (k_1k_2, h_1h_2) =$$

$$(k_1,h_1)(k_2,h_2) = f\big((k_1h_1)\big), f\big((k_2h_2)\big)$$

أيضا f غامر لأنه إذا كان $h.k \in H \times K$ فإن $h \in H$, $k \in K$ وأن

$$(h,k) \in H \oplus K$$

وبالتالي $f\big((h,k)\big) = h,k$

مما سبق نجد أن $H \times K \approx H \oplus K$

إذاً إذا كان لدينا زمرة جزئية ناظمية من زمرة ما فإن تعاملنا مع المجموع الداخلي أو الجداء الخارجي نحصل على نفس النتيجة .

ثانياً : النظرية الأساسية التبديلية المنتهية

في هذا الفصل سوف ندرس الزمر التبديلية المنتهية والمنتهية التوليد وخواصها و تمثيلها ونهدف من هذه الدراسة الوصول إلى النتيجة : " لو أخذنا مجموعة كل الزمر المنتهية نهدف إلى إثبات أن الزمر الدوارة المنتهية تشكل مجموعة مولدة لمجموعة الزمر الدوارة المنتهية

وسنحصل على هذه النتيجة بعد مجموعة من الدراسات وقبل أن نبدأ لنتذكر معاً مبرهنة لاغرانج :

لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية من G عندئذٍ $(G:1) = (G:H)(H:1)$

أي ان مرتبة أي زمرة جزئية من G تقسم مرتبة الزمرة G

كذلك دليل أي زمرة جزئية من G تقسم مرتبة G

مبرهنة: لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي P عندئذ يوجد في G عنصر مرتبته P

الاثبات :

لتكن G زمرة تبديلية منتهية ولنفرض ان :

لنفرض أن $m \in Z$: $(G:1) = n = m.P$ حيث p عدد اولي.

سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب m

اولاً: اذا كان $m = 1$ نجد ان $(G:1) = P$

عندئذ فإن G دوارة ويوجد فيها عنصر مرتبته P

ثانياً : لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية Hو **المحتواة تماماً** في G .اي $H \nsubseteq G$

وتحقق شروط المبرهنة وهنا نميز حالتين :

١) يوجد في G زمرة جزئية $D \subsetneq G$ دليلها لا يقبل القسمة على P عندئذٍ :

$$m.P = (G:1) = (G:D)(D:1)$$

وبما أن $(G:D)$ لاتقبل القسمة على P ومنه $(D:1)$ تقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في D عنصر مرتبته P وبالتالي Gتحوي عنصر مرتبته P .

٢) جميع الزمر الجزئيةHالمحتواة تماما في G ادلتها تقبل القسمة على P .
لنفرض أنl هي مجموعة الزمر الجزئية H. ولنفرض أن k هو العنصر الأكبر في l من حيث عدد العناصر .

اي ان k اكبر زمرة جزئية في G مرتبتها تقبل القسمة على P وان $k \neq G$

وهنا نميز حالتين :

١- $(k:1)$ يقبل القسمة على p عندئذٍ وحسب الفرض الاستقرائي فإن k تحوي عنصر مرتبته p وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته p

٢- $(k:1)$ لا تقبل القسمة على p بما ان $k \neq G$ فإنه يوجد:
$x \in G \;\; : x \notin k$

ولنفرض ان $T =< x >$ وان $(T:1) = t$

ان $k.T$ زمرة جزئية في G وان $k \subsetneq k.T$ ومنه فإن $G = k.T$

وحسب مبرهنة التماثل الثانية :

$$G = \frac{k.T}{k} \cong \frac{T}{k \cap T}$$

طالما الزمرتين متماثلتين فالمراتب لهما هي نفسها.

مرتبته

$$\left(\frac{k.T}{k}:1\right) = \left(\frac{T}{k \cap T}:1\right)$$

دليل

$$\Rightarrow (k.T:k) = (T:k \cap T)$$

نناقش جميع الزمر الجزئية التي ادلتها تقبل القسمة على P أي

- لما كان $(k.T:k)$ يقبل القسمة على P فإن : $(T:k\cap T)$ يقبل القسمة على P

ولما كان $(T:1)=(T:k\cap T)(k\cap T:1)$

فإن $(T:1)=t$ يقبل القسمة على P

أي ان t يقبل القسمة على P .

أي $\frac{t}{P}\in Z$ ومنه فإن :

$$O\left(x^{\frac{t}{P}}\right)=P\ ,\qquad x^{\frac{t}{P}}\in T\subset G\Longrightarrow x^{\frac{t}{P}}\in G$$

ومنه G تحوي عنصر مرتبته P .

بالاعتماد على المبرهنة السابقة نستنتج ان : $\left(<x^{\frac{t}{P}}>:1\right)=P$

نتيجة: ان كل زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الاولي P . تحوي زمرة جزئية مرتبتها P

مبرهنة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها $m.P^n$ حيث P أولي و $n,m\in\mathbb{Z}^*$ و m لا تقبل القسمة على P عندئذ :

١) $K=\{x: x\in G\ : x^m=e\}$ تشكل زمرة جزئية في G.

٢) $H=\{x: x\in G\ : x^{P^n}=e\}$ تشكل زمرة جزئية في G.

٣) $G=H\times K$

٤) $(H:1)=P^n$

الاثبات :

١) واضح $G\ \supseteq K\neq\emptyset$ لأن $e\in K$، ليكن $x,y\in K$ عندئذ وحسب تعريف الـ K فإن :

$$x^m=e$$

$$y^m=e\quad ,\quad y^{-m}=e$$

$$(x.y^{-1})^m=\underbrace{x^m.y^{-m}}_{\text{كون } G \text{ تبديلية فإنه ننزل القوة على المضاريب}}=e$$

٢) بنفس طريقة الـ (1) .

٣) لما كانت الزمرة G تبديلية فإن كلا من K,H زمر جزئية ناظمية في G ومنه فإن $K\times H\ \subseteq G$ زمرة جزئية في G ووجدنا سابقا أنه كي تتحقق $G=H\times K$ يجب أن يتحقق

$G = K \times H$ و $K \cap H =< e >$

لنثبت الاحتواء المعاكس

لدينا حسب الفرض $gcd(m,P) = 1$ لأنه طالما العدد الأولي ليس قاسم لـ m فإن القاسم المشترك الأعظم لهما هو 1

ومنه $gcd(m,P^n) = 1$ لأنه إذا $gcd(m,P^n) = d > 1$ فإن d يقسم P^n ومنه $d = P^t$ حيث $n > t$

وأيضاً d يقسم m ومنه $s \in Z$: $m = s.d$ و هذا يبين أن m يقبل القسمة على P و هذا مرفوض ومنه

$$gcd(m,P^n) = 1$$

ومنه يوجد $q,r \in Z$ فإن $1 = qm + rP^n$

ليكن $g \in G$ عندئذ :

$$g = g^1 = g^{qm+rP^n} = g^{qm}.g^{rP^n}$$
$$\Longrightarrow (g^{qm})^{P^n} = \left(g^{mP^n}\right)^q = e^q = e$$

ومنه $(g^{qm}) \in H$ وأيضا $\left(g^{rP^n}\right) \in G$ وأن

$$\left(g^{rP^n}\right)^m = \left(g^{mP^n}\right)^r = e^r = e$$

ومنه $g^{rP^n} \in K$

ومنه $g^{qm}.g^{rP^n} \in H.K$

ومنه نجد أن

$$G \subseteq K.H$$

وبالتالي $G = K.H$ لنثبت أن $H \cap K =< e >$

ليكن $y \in k \cap H$ وأن $o(y) = \lambda$ عندئذ :

$$y \in k \Longrightarrow y^m = e$$

$$y \in H \Longrightarrow y^{P^n} = e$$

ومنه نجد أن λ يقسم كل من $m\,,P^n$ وطالما $gcd(m,P^n) = 1$ نجد أن $\lambda = 1$

أي أن $y^\lambda = y^1 = e$ ومنه $K \cap H =< e >$ وبالتالي نجد مما سبق أن

$$G = K \times H$$

٤) بما ان $H \cap K =< e >$ فإن :

$$\boxed{(H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)} = (H:1).(K:1) = P^n.m}$$

إن $(K:1)$ لا تقبل القسمة على P لانه اذا كانت $(K:1)$ تقبل القسمة على P فإن $(K:1) = a.P$ حيث $a \in \mathbb{Z}$

ومنه الزمرة K تحوي عنصر مرتبته P لنرمز لهذا العنصر x وبما أن $x \in K$ فإن $x^m = e$ ومنه m يقبل القسمة على P و هذا يناقض الفرض اذاً $(K:1)$ لاتقبل القسمة على P ومنه $(H:1)$ تقبل القسمة على P^n و هذا يثبت أن $(H:1) = P^n$

انتهت المحاضرة

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي

تنسيق: ولاء الأخضر ♥