المعادلات التفاضلية 1

السنة الثانية

29-11-2018

نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: الثامنة عشر

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية ذات الامثال الثابتة

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات الامثال الثابتة

٢ـ حالات ايجاد جذور هذه المعادلة

٣ـ امثلة

- المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة:

- نأخذ المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$A_0.y^{(n)} + A_1.y^{(n-1)} + A_2.y^{(n-2)} + \cdots + A_{n-1}.y' + A_n.y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من مراتب عليا ذات أمثال ثابتة.

وإذا كانت الأمثال لهذه المعادلة من الشكل:

$a_0.y^{(n)} + a_1.y^{(n-1)} + \cdots + a_n.y = 0$ حيث $a_i \; ; i = 0, \ldots, n$ ثوابت.

- الحلول الخاصة لهذه المعادلة من الشكل:

$$y = e^{\lambda x}$$

نشتق n مرة ثم نعوض بالمعادلة التفاضلية:

$$y' = \lambda.e^{\lambda x} \; , y'' = \lambda^2.e^{\lambda x} \; , \ldots \; , y^{(n)} = \lambda^n.e^{\lambda x}$$

فنحصل على:

$$a_0.\lambda^n.e^{\lambda x} + a_1.\lambda^{n-1}.e^{\lambda x} + \cdots + a_n.e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(a_0.\lambda^n + a_1.\lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

Syria Math Team

$$e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(a_0.\lambda^n + a_1.\lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0}$$

تسمّى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية ذات الأمثال المتجانسة وبالتالي هذه المعادلة المميزة تشكل

كثير حدود من الدرجة n في λ فهي تقبل n جذراً لها ونميز عدة حالات:

- **الحالة الأولى:**

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة مختلفة ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فنحصل على الحلول الخاصة:

$$y_1 = e^{\lambda_1.x}, y_2 = e^{\lambda_2.x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n.x}$$

عدد هذه الحلول هو n وهي مجموعة مستقلة خطياً وبالتالي تشكل جملة حلول أساسية للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

ويكون الحل العام معطى بالشكل التالي:

$$y = c_1.e^{\lambda_1.x} + c_2.e^{\lambda_2.x} + \cdots + c_n.e^{\lambda_n.x}$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ كلها ثوابت.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y'' - 3y' + 2 = 0} \dots (*)$$

الحل:

نفرض أن: $\boldsymbol{y = e^{\lambda x}}$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية (*) ومنه نجد:

$$\boldsymbol{y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda.e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2.e^{\lambda x}}$$

نعوض بالمعادلة (*) فنحصل على:

$$\boldsymbol{\lambda^2.e^{\lambda x} - 3\lambda.e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0}$$

$$\boldsymbol{(\lambda - 1).(\lambda - 2) = 0}$$

Syria Math Team

$$\lambda_2 = 2\,,\lambda_1 = 1\,,$$

$$\Rightarrow y_1 = e^x\,, y_2 = e^{2x}\,,$$

فيكون الحل العام هو :

$$y = c_1.e^x + c_2.e^{2x}$$

- الحالة الثانية:

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ إلا أن قسما منها جذوراً عقدية وبالتالي إذا كان: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ هو عبارة عن جذر للمعادلة المميزة (المساعدة) فإنّ مرافقه: $\overline{\lambda_2} = \alpha - \beta i$ هو أيضاً جذرا لها ويكون للمعادلة حلان خاصان هما:

$$y_1 = e^{\alpha+\beta i} \quad , \quad y_2 = e^{\alpha-\beta i}$$

وبالتالي:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i.\sin \beta x]$$

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}[\cos \beta x - i.\sin \beta\beta x]$$

مثال1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$$

الحل:

المعادلة المميزة:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0 \xrightarrow[\text{باستخدام القسمة المطولة}]{} (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

$$(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 4 - 4(1)(5) = -16 = 16i^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1 + 2i$$

Syria Math Team

$$\lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1 - 2i$$

$$y_1 = e^x \ , \qquad y_2 = e^{(1+2i)x} \ , \qquad y_3 = e^{(1-2i)x}$$

الحل العام:

$$y = c_1.y_1 + c_2.y_2 + c_3.y_3 = c_1.e^x + c_2.e^{(1+2i)x} + c_3.e^{(1-2i)x}$$
$$= c_1 e^x + e^x(c_2\ cos\ 2x + c_3\ sin\ 2x)$$

ملاحظة: عندما يكون جذور المعادلة المميزة عقدي $a \mp bi$ يمكن كتابة الشكل الأخير مباشرة

أي: $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

- الحالة الثالثة:

إذا كانت جذور المعادلة المميزة حقيقية ولكنها مكررة $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ فإن الحل لها :

$$y = e^{\lambda_i.x}$$

تمثل حل واحد من الشكل: $y = e^{bx}$.

ومنه فإن العلاقة :

$$y = c_1.e^{\lambda_1 x} + c_2.e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n.e^{\lambda_n x}$$

لا تعطي الحل للمعادلة التفاضلية وفي هذه الحالة تكون المعادلة المميزة من الشكل:

$$F(\lambda) = (\lambda - b)^n$$

حيث n هو عدد الجذور.

قد قام الدكتور بإعطاء وظيفة "سنقوم بإدراج حله فورا حرصا على تسلسل الأفكار"

أوجد الحل العام:

Syria Math Team

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

الحل

المعادلة المميزة : $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$$(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \mp i$$

جذر مكرر.

الحل العام لها:

$$y = (c_1 + c_2 x).(\cos x + i.\sin x) + (c_3 + c_4 x).(\cos x - i.\sin x)$$

◄ملاحظة: إذا قبلت المعادلة المميزة الجذر المركب $\alpha + \beta i$ مضاعفاً m مرة فيوجد للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة الحلول الخاصة المستقلة من الشكل:

$$e^{(\alpha+\beta i)x}, x.e^{(\alpha+\beta i)x}, \dots \dots$$

وهكذا قد نكون اوجدنا الحلول الخاصة ثم نكتب الحل العام☺

كل شيء يولد مع المطر . . . . . الفرح . . الشفاء . . البهجة . . وحتى الحياة . . . . لمجرد سماع صوت المطر "تشعر بأنك أفضل من قبل"

#ساعد غيرك

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عيد*علا الدلاتي

Syria Math Team