◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: السادسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: معادلة لاغرانج

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ حل وظيفة من المحاضرة الرابعة عشر
٢ـ معادلة لاغرانج وطريقة ايجاد الحل العام لها.

لقد قام الدكتور في بداية المحاضرة بحل تمرينين وظيفة وقد قمنا بإدراجهم في المحاضرة الرابعة عشر تحت عنوان "مثال" وهما:

١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \dots (1)$$

إذا علمت أنّ لها حلولاً خاصة من الشكل: $y = e^{ax}$

٢) أوجد الحل العام:

$$(x-1).y'' - x.y' + y = 0 \dots (1)$$

علماً أنّ تقبل حلين خاصين من الشكل: $y_1 = x, y_2 = e^x$

معادلة لاغرانج

نسمي كل معادلة تفاضلية خطية في x, y من الشكل: $y = x.f(P) + g(P)$ بمعادلة لاغرانج

حيث $f(P), g(P)$ هما تابعان ل $y' = P$ هذه المعادلة محلولة بالنسبة ل y ومعادلة كليرو هي حالة خاصة منها.

لحلها نشتق بالنسبة ل x :

$$P = f(P) + [x.f'(P) + g'(P)].\frac{dP}{dx}$$

إذا اعتبرنا x التابع و P هو المتحول نجد أنّ:

$$\frac{dx}{dP} - \frac{f'(P)}{P.f(P)}.x = \frac{g'(P)}{P - f(P)}$$

حيث: $P - f(P) \neq 0$

فيكون الحل العام تابع ضمني في x : $x = c.\varphi(P) + \varphi(P)$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية: $y = c.\varphi_1(P) + \varphi_2(P)$

وبالتالي الحلين x, y هما الحل العام للمعادلة التفاضلية وسيطيا حيث الوسيط هو φ

وقد قام الدكتور بإعطاء وظيفة ولكننا سنقوم بادراج حلها:

$$y = 2px - p^2 \Leftarrow$$

الحل:

١- نشتق بالنسبة ل x:

$$p = 2p = [2x - 2p]p' \Rightarrow -p = (2x - 2p)\frac{dp}{dx}$$

٢- نجعل x هو التابع و p هو المتحول ومنه نجد:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2x - 2p}{-p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} + 2$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 2 \ldots . (*)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة ولنوجد الحل العام

أولا: نوجد الحل العام دون طرف ثانٍ

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 0$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p} \underset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} ln\left|\frac{x}{c}\right| = -2\,ln|p| \Rightarrow ln\left|\frac{x}{c}\right| = ln|p^{-2}|$$

$$\frac{x}{c} = p^{-2} \Rightarrow x = c.p^{-2} \dots (**)$$

نجعل c تابع ل p فنجد:

$$x = c(p).p^{-2}$$

$$x' = c'(p).p^{-2} - 2.c(p).p^{-3}$$

نعوض في $(*)$:

$$c'(p).p^{-2} - 2.c(p).p^{-3} + 2.c(p).p^{-3} + 2.c(p).\frac{p^{-2}}{p} = 2$$

ومنه بعد الاختصار:

$$c'(p) = 2p^2 \Rightarrow c(x) = \frac{2}{3}p^3 + c_1$$

نعوض في الحل العام بدون طرف ثانٍ $(**)$:

$$x = \left(\frac{2}{3}p^3 + c_1\right)p^{-2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}p + c_1p^{-2}$$

نعوض في المعادلة الأساسية:

$$y = 2p\left(\frac{2}{3}p + c_1p^{-2}\right) - p^{-2} \Rightarrow y = \frac{1}{3}p^2 + c_1p^{-1}$$

ومنه x, y حل عام وسيطيا لمعادلة لاغرانج.

$$y = xy'^2 + y'^2 \Leftarrow$$

الحل:

أولا: نبدل كل $y' = p$ لسهولة التعامل بها ومنه $y = xp^2 + p^2$

نشتق بالنسبة ل x:

$$p = p^2 + [2xp + 2p]p' \Rightarrow p - p^2 = 2p(x+1)\frac{dp}{dx}$$

نجعل x هو التابع و p هو المتحول ومنه نجد

$$\frac{dx}{dp} = \frac{[2(x+1)]}{p-1} \quad \Rightarrow \frac{dx}{x+1} = 2\frac{dp}{p-1}$$

وهي معادلة منفصلة المتحولات بمكاملة الطرفين:

$$ln|x+1| - 2\,ln|1-p| + ln|c|$$

$$ln|x+1| = ln\left|\frac{c}{(1-p)^2}\right| \to x+1 = \frac{c}{(1-p)^2} \to x = \frac{c}{(1-p)^2} - 1$$

نعوض في المعادلة الأساسية:

$$y = \left(\frac{c}{(1-p)^2} - 1\right)p^2 + p^2$$

ومنه x, y حل عام وسيطيا لمعادلة لاغرانج.

انتهت المحاضرة

"كُن مصمم على بلوغ هدفك فإما ان تنجح . . . . اوإما ان تنجح"

إعداد: ماريا عيد*عُلا الدالاتي