# المكاملة المجرَّدة (التّكامل المجرَّد)

حوالي أواخر القرن التّاسع عشر بدا واضحاً لكثيرٍ من الرّياضيين أنَّ تكاملَ ريمان (الّذي يُدرَّس في مقررات حساب التّكامل) يجب أن يُستبدل أو يحلَ محله نماذجَ أُخرى من التّكاملات تكون أكثر عموميةً ومرونةً وأكثر ملاءمةً للتّعامل مع عمليات النّهاية.

ومن بين المحاولات المبذولة في هذا الاتجاه، نجد أنَّ محاولات كلٍ من جوردان، بوريل، يونغ ولوبيغ هي الأكثر بروزاً وجدارةً بالذّكر.

وبدا أنَّ إنشاء لوبيغ (أو ما قام به لوبيغ) هو الأكثر نجاحاً.

وتتلخص الفكرة الرئيسية في أنَّ تكامل ريمان لدالة $f$ على مجالٍ $[a,b]$ يمكن تفريقه إلى مجموعٍ من الشّكل $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)m(E_i)$ حيث $E_1, \dots, E_n$ فترات منفصلة ينتج عن اتحادها المجال $[a,b]$ و $m(E_i)$ ترمز لطول $E_i$ و $t_i \in E_i$ لأجل $i = 1,2,\dots,n$.

اكتشف لوبيغ أنَّ نظرية تامة ومُرضية تنتج إذا كانت المجموعات $E_i$ في المجموع أعلاه مأخوذةً بحيث تنتمي لصف ضخم من المجموعات الجزئية على المحور والمدعو صف المجموعات القيوسة وإذا كان صف الدّوال الموضوعة تحت البحث والدراسة يتّسع لما دعاه (الدّوال القيوسة).

إنَّ الخواص النّظرية المعتَمدة هي التّالية:

إنَّ اتحاد وتقاطع أي جماعة عدودة من المجموعات القيوسة هو مجموعة قيوسة، وكذلك مكملة كل مجموعة قيوسة. والأكثر أهمية هو فكرة **<u>الطّول</u>** يدعى الآن "قياس" إذ يمكن أن نكتب العلاقة:

$$m(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots$$

لأجل كل جماعة عدودة $\{E_i\}$ من المجموعات القيوسة المنفصلة مثنى، وهذه الخاصة لـ $m$ تُدعى خاصة الجمع عدّاً.

إنَّ الانتقال من نظرية ريمان للمكاملة إلى نظرية لوبيغ للمكاملة هو عبارة عن عملية إكمال (بمفهوم سيتّضح لاحقاً بدقةٍ أكثر) إنّها على نفس المستوى من الأهمية الأساسية في التّحليل وهي إنشاء نظام الأعداد الحقيقية بدءاً من النّسب.

إنَّ القياس $m$ المذكور سابقاً يرتبط بالطّبع ارتباطاً قوياً بهندسة المحور الحقيقي.

في هذا الفصل سنقدّم نسخةً مجرَّدةً لتكامل لوبيغ بالنّسبة لأي قياس جمعي عدّاً على أي مجموعة (التّعريف الدّقيق يُتبع ..)

هذه النّظرية المجرَّدة ليست على كل حال أصعب من الحالة الخاصة للمحور الحقيقي. إنها تُبيّن أنَّ القسم الأكبر من نظرية المكاملة مستقل عن أي هندسة أو تبولوجيا للفضاء الأساسي وبالتّالي يعطينا وسيلة لقابلية تطبيق أوسع.

إنَّ وجود صفٍ ضخمٍ من القياسات، ومن بينها قياس لوبيغ سوف يُوطَّد في الفصل الثاني.

## الرموز والمصطلحات المعتَمَدة:

1- قد توصف بعض المجموعات بسرد عناصرها، وهكذا فإنَّ $\{x_1, \dots, x_n\}$ هي المجموعة الّتي عناصرها $x_1, \dots, x_n$ و $\{x\}$ هي المجموعة الّتي عنصرها الوحيد $x$.

2- إنَّ الرمز $\phi$ يرمز للمجموعة الخالية. كما أنَّ الكلمات: جماعة، أسرة وصف ستُستعمل مرادِفة لكلمة مجموعة

3- إنّنا نكتب $x \in A$ إذا كان $x$ عنصراً من المجموعة $A$ وإلّا فإنَّ $x \notin A$.

4- إذا كانت $B$ مجموعة جزئية من $A$ أي إذا كان $x \in B$ فإنَّ $x \in A$ فإنّنا نكتب $B \subset A$. وإذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$ فإنَّ $A = B$، وإذا كان $B \subset A$ و $A \neq B$ فإنَّ $B$ مجموعة جزئية فعلية من $A$.

5- لاحظ أنَّ $\phi \subset A$ لأجل كل مجموعة $A$.

6- $A \cup B$ , $A \cap B$ هما اتحاد وتقاطع $A$ و $B$ على التّرتيب.

7- إذا كانت $\{A_\alpha\}$ جماعة مجموعات، حيث $\alpha$ تمسح مجموعة أدلة ما $I$. فإننا نكتب $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ و $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ لأجل الاجتماع والتّقاطع لـ $\{A_\alpha\}$.

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \left\{x \ : \ x \in A_\alpha \ \text{لأجل } \alpha \in I \text{ واحدة على الأقل}\right\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \left\{x \ : \ x \in A_\alpha \ \text{لأجل كل } \alpha \in I\right\}$$

8- وإذا كانت $I$ مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة فإنَّ التّرميز المألوف هو:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_\alpha \ , \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_\alpha$$

وإذا لم نجد عنصرين في $\{A_\alpha\}$ مشتركين بعنصر فإنَّ الجماعة $\{A_\alpha\}$ هي جماعة مجموعات منفصلة مثنى.

9- ونكتب $A - B = \{x \ : \ x \in A \ , \ x \notin A\}$

10- نرمّز لمكملة $A$ بـ $A^c$ متى كان واضحاً من سياق الكلام بالنّسبة لأي مجموعة كبرى تُؤخَذ المكملة.

11- الجداء الديكارتي $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ للمجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ هو مجموعة كل المرتّبات ذات الرتبة $n$ : $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ حيث $a_i \in A_i$ لأجل $i = 1, \dots, n$.

- إنَّ المحور الحقيقي (أو نظام الاعداد الحقيقية) هو $\mathbb{R}^1$ و $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$ ($k$ عامل)

- ونظام الأعداد الحقيقية الموسع هو $\mathbb{R}^1$ مع ضم الرمزين $\infty$ و $-\infty$ مع التّرتيب الواضح ..

إذا كان $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ فإنَّ الفترة $[a,b]$ والجزء $(a,b)$ يُعرَّفان بحيث:

$$[a,b] = \{x \ : \ a \leq x \leq b\} \quad , \quad (a,b) = \{x \ : \ a < x < b\}$$

كما نكتب أيضاً:
$$[a,b) = \{x \ : \ a \leq x < b\} \quad , \quad (a,b] = \{x \ : \ a < x \leq b\}$$

12- إذا كان $E \subset [-\infty,\infty]$ و $E \neq \phi$ فإنَّ أصغر حد أعلى (الحد الأعلى الأدنى – $supremum$) وأكبر حد ادنى (الحد الأدنى الأعلى – $infimum$) لـ $E$ موجودان في $[-\infty,\infty]$ ويرمَّزان بـ $\sup E$ و $\inf E$ في بعض الأحيان، (لكن فقط عندما $\sup E \in E$) نكتب $\max E$ عوضاً عن $\sup E$.

13- إنَّ الرمز $f: X \longrightarrow Y$ يعني أنَّ $f$ دالة (أو تطبيق أو تحويل) للمجموعة $X$ إلى المجموعة $Y$ أي أنَّ $f$ يعيّن لكل $x \in X$ عنصراً $f(x) \in Y$.

- إذا كان $A \subset X$ و $B \subset Y$ فإنَّ صورة $A$ والصورة العكسية لـ $B$ هما:

$$f(A) = \left\{y \ : \ y = f(x) \ , \ x \in A \text{ لأجل}\right\} \quad , \quad f^{-1}(B) = \{x \ : \ f(x) \in B\}$$

لاحظ أنَّ $f^{-1}(B)$ قد تكون خالية حتّى ولو كانت $B \neq \phi$.

- إنَّ منطلق $f$ هو $X$ ومستقر $f$ هو $Y$. وإذا كان $f(X) = Y$ فنقول إنَّ $f$ يُطبّق $X$ على $Y$ ونكتب $f^{-1}(y)$ بدلاً عن $f^{-1}(\{y\})$ لأجل كل $y \in Y$.
- وإذا كانت $f^{-1}(y)$ تحتوي على نقطة واحدة على الأكثر لأجل كل $y \in Y$ فنقول إنَّ $f$ متباين.
- إذا كان $f$ متبايناً فعندئذٍ تكون $f^{-1}$ دالة بمنطلق هو $f(X)$ و مستقر $X$.
- إذا كان $f: X \longrightarrow [-\infty,\infty]$ و $E \subset X$ فمن المألوف أن نكتب $\underset{x\in E}{sup}\, f(x)$ فضلاً عن $\sup f(E)$.
- إذا كان $f: X \longrightarrow Y$ و $g: Y \longrightarrow Z$ فإنَّ دالة التّركيب $gof: X \longrightarrow Z$ تُعرَّف بالصيغة:

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) \ : \ x \in X$$

- إذا كان مستقر $f$ في المحور الحقيقي (أو في المستوي العقدي) فإنَّ $f$ عندئذٍ تدعى دالة حقيقية (أو عقدية) ولأجل $f$ دالة عقدية فإنَّ العبارة " $f \geq 0$ " تعني أنَّ القيم $f(x)$ لـ $f$ هي أعداد حقيقية غير سالبة.

## مفهوم قابلية القياس:

إنَّ الدوال القيوسة تلعب دوراً أساسياً في نظرية المكاملة، إنَّ لها خواصاً أساسيةً مشتركةً مع صف الدوال الأكثر أهمية ألا وهو صف الدّوال المستمرة، ومن المفيد تذكُّر هذه التشابهات على الدوام. وبناءً على ذلك فإنَّ عرضنا منظَّم بحيث يلقي الضوء ويؤكد على التشابهات بين مفاهيم: الفضاء التبولوجي – مجموعة مفتوحة – تابع مستمر، من ناحية ومن ناحية أخرى الفضاء القيوس – المجموعة القيوسة – الدوال القيوسة من ناحية أخرى.

(بيد أنَّ العلاقات بين هذه المفاهيم تظهر أكثر وضوحاً عندما يتم العرض بشكلٍ مجردٍ تماماً) وهذا يحثُّ بحثَنا ويحرّضه للوصول إلى الموضوع.

**تعريف:**

1- تدعى جماعةٌ $\tau$ من المجموعات الجزئية من مجموعة $X$ تبولوجيا على $X$ إذا تميّزت بالخواص الثلاث التّالية: $i-$ $\phi \in \tau \;,\; X \in \tau$

$ii-$ إذا كانت $V_i \in \tau$ لأجل $i = 1, \dots, n$ فإنَّ $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$

$iii-$ إذا كانت $\{V_\alpha\}$ مجموعة اختيارية من عناصر $\tau$ (منتهية، عدودة أو غير عدودة) فإنَّ $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$

2- إذا كانت $\tau$ تبولوجيا على $X$ فعندئذٍ يُدعى $X$ فضاءً تبولوجياً وتدعى عناصر $\tau$ مجموعات مفتوحة في $X$.

3- إذا كان $X, Y$ فضاءين تبولوجيين وكان $f$ تطبيقاً لـ $X$ في $Y$، عندئذٍ:

يدعى $f$ مستمراً إذا كانت $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في $X$ لأجل كل مفتوحة $V$ في $Y$.

*** • ***

**تعريف:**

أ- تدعى الجماعة $\mathfrak{M}$ من المجموعات الجزئية في $X$ $\sigma$ - جبر في $X$ (جبر تام) إذا تميَّزت $\mathfrak{M}$ بالخواص التّالية: $i-$ $X \in \mathfrak{M}$

$ii-$ إذا كانت $A \in \mathfrak{M}$ فإنَّ $A^c \in \mathfrak{M}$ حيث $A^c$ مكملة $A$ في $X$

$iii-$ إذا كانت $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_n \in \mathfrak{M}$ لأجل $i = 1, \dots, n$ فإنَّ $A \in \mathfrak{M}$

ب- إذا كانت $\mathfrak{M}$ $\sigma$ - جبر في $X$ تدعى $X$ عندئذٍ فضاءً قيوساً وتدعى عناصر $\mathfrak{M}$ مجموعات قيوسة في $X$.

جـ- إذا كانت $X$ فضاءً قيوساً و $Y$ فضاءً تبولوجياً و $f$ تطبيق لـ $X$ في $Y$، عندها يُدعى $f$ قيوساً إذا كانت المجموعة $f^{-1}(V)$ قيوسة في $X$ لأجل كل مفتوحة $V$ في $Y$.

قد يكون من الأنسب استخدام المصطلح "فضاء قيوس" للتّعبير عن الزّوج المرتّب $(X, \mathfrak{M})$ عِوضاً عن $X$. فبعد ذلك كله $X$ عبارة عن مجموعة ولم تتغير بشكلٍ من الأشكال رغم تعريفنا لـ $\sigma$ - جبر من مجموعاتها الجزئية. والأمر نفسه بالنسبة للفضاء التبولوجي فهو أيضاً الزّوج $(X, \tau)$.

لكن إذا تبعا هذا الأسلوب كتصنيف في الرياضيات فإنَّ لمصطلحات ستصبح أكثر تعقيداً، وسنناقش ذلك بشكلٍ أطول في الفقرة 12.

**تعليقات على التّعريف:**

إنَّ أكثر الفضاءات التبولوجية أُلفةً هي الفضاءات المترية ، سنفترض أنّها مألوفة بالنسبة لنا لكن مع ذلك سنعطي التّعاريف اللازمة بقصد الإتمام:

الفضاء المتري هو مجموعة $X$ عُرَّفت عليها دالة المسافة $\rho$ الّتي تتمير بالخواص التّالية:

$(a)$ لأجل كل $x$ و $y$ من $X$: $0 \leq \rho(x,y) < \infty$

$(b)$ $x = y \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0$

$(c)$ $\forall\, x,y \in X \;\; ; \;\; \rho(x,y) = \rho(y,x)$

$(d)$ $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,x) \;\; , \;\; \forall\, x,y,z \in X$

تُدعى الخاصة $(d)$ متراجحة المثلّث.

- إذا كانت $x \in X$ و $r \geq 0$ فإنَّ الكرة المفتوحة ذات المركز $x$ ونصف القطر $r$ هي:

$$\{\, y \in X \;:\; \rho(x,y) < r \,\}$$

- إذا كان $X$ فضاءً مترياً و $\tau$ جماعة كل المجموعات الجزئية $E \subset X$ المكوّنة من اتحادات كيفية لكرات مفتوحة فإنَّ $\tau$ تدعى عندئذٍ تبولوجيا على $X$، وهذا ليس صعب الإثبات: إنَّ خاصة التقاطع تتعلّق بكون $x \in B_1 \cap B_2$ (حيث $B_1, B_2$ كرات مفتوحة) يقتضي كون $x$ مركز لكرة مفتوحة $B \subset B_1 \cap B_2$ وسنترك هذا بمثابة تمرين.

فعلي سبيل المثال: في المحور الحقيقي $\mathbb{R}^1$ تكون مجموعة ما مفتوحة إذا وفقط إذا كانت اتحاداً لفتراتٍ مفتوحة $(a,b)$. وفي المستوي $\mathbb{R}^2$: المجموعات المفتوحة هي تلك الّتي تُكتب كاتحاد لأقراص دائرية مفتوحة.

- والفضاء التبولوجي الآخر الّذي سنصادفه كثيراً هو المحور الحقيقي الموسّع $[-\infty,\infty]$ ذو التبولوجيا المعرّفة على النّحو التّالي: المجموعات المفتوحة في $X$ هي الفترات ذات الشّكل $(a,\infty]$ و $[-\infty,b)$ و $(a,b)$ وأي مجموعة تُكتب كاتحاد لفترات لها الشّكل نفسه.

إنَّ تعريف الاستمرار الوارد في $\boxed{3}$ هو تعريف شمولي وما سنحتاجه كثيراً هو **تعريف الاستمرار الموضعي:**

نقول عن تطبيقٍ $f$ لـ $X$ في $Y$ إنّه مستمر في النّقطة $x_0 \in X$ إذا وُجد لكل جوار $V$ لـ $f(x_0)$ جوار مقابل $W$ لـ $x_0$ بحيث $f(W) \subset V$.

(جوار نقطة $x$ هو بالتّعريف مجموعة مفتوحة تحوي $x$) وعندما يكون $X, Y$ فضاءين متريين فإنَّ هذا التّعريف الموضعي هو بالطّبع نفس تعريف $\varepsilon - \delta$ المألوف ويكافئ الطّلب:

$\lim\limits_{n} f(x_n) = f(x_0)$ كلما كان $\lim\limits_{n} x_n = x_0$ في $X$.

إنَّ المسالة السّهلة التّالية ستربط بين التّعريفين الشّمولي والموضعي للاستمرار.

**مسألة:** ليكن $X,Y$ فضاءين تبولوجيين. إنَّ تطبيقاً مثل $f$ لـ $X$ في $Y$ يكون مستمراً إذا وفقط إذا كان مستمراً في كل نقطة $x$.

**الإثبات:** • إذا كان $f$ مستمراً و $x_0 \in X$ فإنَّ $f^{-1}(V)$ جوار لـ $x_0$ لأجل كل جوار $V$ لـ $f(x_0)$.

بما أنَّ $f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$ ينتج أنَّ $f$ مستمر في $x_0$.

• إذا كان $f$ مستمراً في كل نقطة $x$ وكانت $V$ مجموعة مفتوحة في $Y$ فإنَّ كل نقطة $x \in f^{-1}(V)$ لها جوار $W_x$ بحيث يكون $f(W_x) \subset V$ ومن جهةٍ أخرى $W_x \subset f^{-1}(V)$ ومنه ينتج أنَّ $f^{-1}(V)$ هي اتحاد المجموعات المفتوحة $W_x$، ولذلك فإنَّ $f^{-1}(V)$ نفسها مفتوحة. وهكذا فإنَّ $f$ مستمر.

## تعليقات على التّعريف:

لتكن $\mathfrak{M}$ $\sigma$ – جبر لمجموعة $X$، بالعودة إلى الخواص $(i)$ ، $(ii)$ من التعريف (أ) نحصل مباشرةً على الحقائق التّالية: $(a)$ بما أنَّ $\phi = X^c$ ينتج من $(i)$ و $(ii)$ أنَّ $\phi \in \mathfrak{M}$.

$(b)$ بأخذ $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$ في$(iii)$ نجد أنَّ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathfrak{M}$ إذا كان $A_i \in \mathfrak{M}$ لأجل $i = 1,2, \dots n$.

$(c)$ بما أنَّ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$ فإنَّ $\mathfrak{M}$ مغلق بالنّسبة للتقاطع العدود (المنتهي).

$(d)$ بما أنَّ $A - B = A \cap B^c$ فيصبح لدينا $A - B \in \mathfrak{M}$ إذا كان $A, B \in \mathfrak{M}$.

إنَّ البادئة $\sigma$ تعود غلى تحقُّق $(iii)$ لأجل كل الاتحادات العدودة لعناصر $\mathfrak{M}$، أمّا إذا كانت $(iii)$ محقّقة فقط لأجل اتحادٍ منتهٍ فعندئذٍ يُدعى $\mathfrak{M}$ جبراً من المجموعات.

## مبرهنة 1.7:

ليكن $Y$ و $Z$ فضاءين تبولوجيين وليكن $g: Y \longrightarrow Z$ مستمراً

$(a)$ إذا كان $X$ فضاءً تبولوجياً وكان $f: X \longrightarrow Y$ مستمراً و $h = gof$ فإنَّ $h: X \longrightarrow Z$ مستمر.

$(b)$ إذا كان $f$ فضاءً قيوساً وكان $f: X \longrightarrow Y$ قيوساً و $h = gof$ فإنَّ $h: X \longrightarrow Z$ قيوس.

(صياغةً: تركيب تابعين مستمرين تابعٌ مستمر، تركيب تابع أول مستمر مع تابع ثانٍ قيوس هو تابع قيوس)

الإثبات:

إذا كانت $V$ مفتوحةً في $Z$ فإنَّ $g^{-1}(V)$ مفتوحة في $Y$ و $h^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$

• إذا كان $f$ مستمراً ينتج أنَّ $h^{-1}(V)$ مفتوحة، ويكون $(a)$ قد أُثبت.

• إذا كان $f$ قيوساً ينتج أنَّ $h^{-1}(V)$ قيوسة، ويكون $(b)$ قد أُثبت.

**مبرهنة 1.8:**

ليكن $u,v$ تابعين حقيقيين قيوسين على الفضاء القيوس $X$ وليكن $\varphi$ تطبيقاً مستمراً للمستوي في الفضاء التبولوجي $Y$ ولنعرّف $h(x)=\varphi\big(u(x),v(x)\big)$ لأجل $x\in X$، عندئذٍ يكون $h:X\longrightarrow Y$ قيوساً.

**الإثبات:**

فلنضع $f(x)=\big(u(x),v(x)\big)$ عندئذٍ $f$ يطبّق $X$ في المستوي. بما أنَّ $h=\varphi o f$ فإنَّ المبرهنة 1.7 تبيّن أنّه يكفي إثبات قيوسية $f$.

إذا كان $R$ أي مستطيل مفتوح في المستوي بحيث توازي أضلاعه المحاور. فإنَّ $R$ يكون عبارة عن الجداء الديكارتي لفترتين $I_1$ و $I_2$ و $f^{-1}(R)=u^{-1}(I_1)\cap v^{-1}(I_2)$ وهي مجموعة قيوسة حسب ما افترضناه على $u$ و $v$. إنَّ كل مجموعة مفتوحة $V$ في المستوي هي عبارة عن اتحادٍ عدودٍ لمستطيلاتٍ مثل $R_i$ وبما أنَّ $f^{-1}(V)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(R_n)$ فإنَّ $f^{-1}(V)$ قيوسة.

*** • ***

**1.9**: ليكن $X$ فضاءً مقيساً. إنَّ القضايا التّالية هي نتائج للمبرهنتين 1.7 و 1.8:

$(a)$ إذا كان $f=u+iv$ حيث $u$ و $v$ تطبيقان قيوسان حقيقيان على $X$ فإنَّ $f$ تطبيق عدقي قيوس على $X$، وهذه تنتج من المبرهنة 1.8 بوضع $\varphi(z)=z$.

$(b)$ إذا كان $f=u+iv$ تطبيقا عقدياً قيوساً على $X$ فإنَّ $u$ و $v$ و $|f|$ تطبيقات حقيقية قيوسة على $X$، وهذه تنتج من المرهنة 1.7 بوضع $g(z)=Re(z)\,,Im(Z)\,,|z|$.

$(c)$ إذا كان $f$ و $g$ تطبيقين قيوسن عقديين على $X$ فإنَّ $f+g$ و $fg$ كذلك.

لأجل $f$ و $g$ حقيقيان ينتج ذلك من المبرهنة 1.8 بوضع $\varphi(s,t)=s+t$ و $\varphi(s,t)=st$ والحالة العقدية تنتج عندئذٍ من $(a)$ و $(b)$.

$(d)$ إذا كانت $E$ مجموعة قيوسة في $X$ وكان: $$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & : \quad x\in E\\ \\ 0 & : \quad x\notin E\end{cases}$$

عندها يكون $\chi_E$ تطبيقاً قيوساً وهذا واضح.

وندعو $\chi_E$ بالتّطبيق المميز للمجموعة $E$ والحرف $\chi$ سيُحجز للتّطبيقات المميزة في كل مكان في هذا الكتاب.

$(e)$ إذا كان $f$ تطبيقاً عقدياً قيوساً على $X$ فهناك تطبيق عقدي قيوس $\alpha$ قيوس بحيث:

$$f=\alpha|f|\quad,\quad|\alpha|=1$$

**الإثبات:**

لتكن $E = \{ x \ : \ f(x) = 0 \}$ و $Y$ المستوي العقدي مع الانتقال الأصلي.
نعرّف $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ حيث $z \in Y$ ولنضع $\alpha(x) = \varphi\big(f(x) + \chi_E(x)\big)$ وبما أنَّ $\varphi$ مستمر على $Y$ (لماذا؟) فإنَّ قيوسية $\alpha$ تنتج من $(c)$ و $(d)$ والمبرهنة $1.7$.

سنبيّن الآن أنَّ الجبور التّامة ($\sigma$ − جبور) موجودة بوفرة كبيرة.

**مبرهنة** $1.10$:

إذا كان $\mathcal{F}$ صفاً من المجموعات الجزئية من $X$ فيوجد أصغر جبر تام $\mathfrak{M}^*$ بحيث يكون $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$.
يُدعى $\mathfrak{M}^*$ أحياناً بالجبر التّام المولَّد بـ $\mathcal{F}$.

**الإثبات:**

لتكن $\Omega$ جماعة كل الجبور التّامة $\mathfrak{M}$ على $X$ والّتي تحوي $\mathcal{F}$. وبما أنَّ صف كل المجموعات الجزئية في $X$ هو جبر تام فإنَّ $\Omega$ ليست خالية. لتكن $\mathfrak{M}^*$ تقاطع جميع العناصر $\mathfrak{M} \in \Omega$.
من الواضح أنَّ $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*$ و $\mathfrak{M}^*$ هذه محتواة في كل جبر تام على $X$ ويحوي $\mathcal{F}$. ولإتمام البرهان يجب أن نثبت $\mathfrak{M}^*$ نفسه جبر تام.
إذا كان $A_n \in \mathfrak{M}^*$ لأجل $n = 1,2, \dots$ و $\mathfrak{M} \in \Omega$ فإنَّ $A_n \in \mathfrak{M}$ وكذلك $\cup A_n \in \mathfrak{M}$ باعتبار أنَّ $\mathfrak{M}$ جبر تام. بما أنَّ $\cup A_n \in \mathfrak{M}$ لأجل كل $\mathfrak{M} \in \Omega$ فنستنتج أنَّ $\cup A_n \in \mathfrak{M}^*$ ويُتحقّق من صحة الشّرطين الآخرين في التّعريف بنفس الطّريقة

**مجموعات بوريل:**

ليكن $X$ فضاءً تبولوجياً، فحسب المبرهنة $1.10$ يوجد جبر تام أصغري $\mathfrak{B}$ على $X$ بحيث تكون كل مجموعة مفتوحة في $X$ تنتمي لـ $\mathfrak{B}$. وتدعى عناصر $\mathfrak{B}$ مجموعات بوريل لـ $X$.
وعلى وجه الخصوص المجموعات المغلقة هي مجموعات بوريلية (لكونها بالتّعريف متممات مجموعات مفتوحة) وكذلك كل الاتحادات العدودة للمجموعات المغلقة وكل التّقاطعات للمجموعات المفتوحة.
وهاتان الأخيرتان تُدعيان $F_\sigma's$ و $G_\delta's$ على التّرتيب، وتلعبان دوراً لا بأس به والتّرميز يرجع لهاوسدورف.
إنَّ الحرفين $F$ و $G$ استُعملا للمجموعات المغلقة والمفتوحة على التّرتيب. و $\sigma$ ترجع إلى الاتحاد $(summe)$ و $\delta$ إلى التّقاطع $(\mathcal{D}urch\mathcal{s}chitt)$، فعلى سبيل المثال:

كل مجال نصف مفتوح $[a,b)$ يكون $G_\delta$ و $F_\sigma$ في $\mathbb{R}^1$.

بما أنَّ $\mathfrak{B}$ جبر تام فنستطيع أن نتعامل مع $X$ الآن كفضاء قيوس، حيث تلعب مجموعات بوريل دور المجموعات القيوسة، باختصار أكثر نحن ندرس الفضاء القيوس $(X,\mathfrak{B})$.

إذا كان $f: X \longrightarrow Y$ تطبيقاً مستمراً على $X$، حيث $Y$ أي فضاء تبولوجي فإنّه من الواضح من التّعاريف أنَّ $f^{-1}(V) \in \mathfrak{B}$ لأجل كل مجموعة مفتوحة $V$ في $Y$. بكلماتٍ أخرى: كل تطبيق مستمر على $X$ يكون قيوساً بوريلياً، والتّطبيقات القيوسة البوريلية تُدعى غالباً تطبيقاتٍ بوريليةً أو دوالاً بوريليةً.

**مبرهنة** 1.12:

ليكن $\mathfrak{M}$ $\sigma-$ جبر على $X$ و $Y$ فضاءً تبولوجياً وليكن $f$ تطبيقاً لـ $X$ في $Y$.

$(a)$ إذا كانت $\Omega$ مجموعة كل المجموعات $E \subset Y$ بحيث $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$ فإنَّ $\Omega$ هي $\sigma-$ جبر على $Y$.

$(b)$ إذا كان $f$ قيوساً و $E$ مجموعة بوريلية في $Y$ فإنَّ $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$.

$(c)$ إذا كان $Y=[-\infty,\infty]$ و $f^{-1}\big((\alpha,\infty]\big) \in \mathfrak{M}$ لأجل كل عدد حقيقي $\alpha$ فإنَّ $f$ قيوس.

$(d)$ إذا كان $f$ قيوساً و $Z$ فضاءً تبولوجياً و $g: Y \longrightarrow Z$ تطبيقاً بوريلياً وكان $h = gof$ فإنَّ $h: X \longrightarrow Z$ قيوس.

إنَّ البند $(c)$ كثيراً ما يُستعمل كمعيار لقيوسية الدّوال ذات القيم الحقيقية (انظر أيضاً التّمرين 3) لاحظ أنَّ $(d)$ تعميم للمبرهنة 1.7 $(b)$.

**الإثبات:**

إنَّ إثبات $(a)$ ينتج من العلاقات $\quad f^{-1}(Y)=X$

$$f^{-1}(Y-A) = X - f^{-1}(A)$$
$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \ldots$$

- إثبات $(b)$، لتكن $\Omega$ كما في $(a)$. من قيوسية ينتج أنَّ $\Omega$ تحوي جميع المجموعات المفتوحة في $Y$ وبما أنَّ $\Omega$ هي $\sigma-$ جبر فإنَّ $\Omega$ تحوي جميع المجموعات البوريلية في $Y$.
- لإثبات $(c)$، لتكن $\Omega$ جماعة كل المجموعات $E \subset [-\infty,\infty]$ بحيث $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$.

ولنختَر $\alpha$ عدداً حقيقياً، و $\alpha_n < \alpha$ بحيث يكون $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$، بما أنَّ $(\alpha_n,\infty] \in \Omega$ لأجل كل $n$ وبما أنَّ:

$$[-\infty,\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-\infty,\alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\infty]^c$$

وبما أنَّ $(a)$ تُثبت كون $\Omega$ $\sigma-$ جبر نرى أنَّ $[-\infty,\alpha) \in \Omega$.

وكذلك $\quad (\alpha,\beta) = [-\infty,\beta) \cap (\alpha,\infty]$

بما أنَّ كل مجموعة مفتوحة في $[-\infty,\infty]$ هي عبارة عن اتحاد عدود لفترات من الشّكل السّابق فإنَّ $\Omega$ تحوي كل مجموعة مفتوحة، وهكذا فإنَّ $f$ قيوس.

- لإثبات $(d)$، لتكن $V \subset Z$ مفتوحة، عندئذٍ تكون $g^{-1}(V)$ مجموعة بوريلية في $Y$، وبما أنَّ $h^{-1}(V) = f^{-1}\big(g^{-1}(V)\big)$ فإنَّ $(b)$ تُثبت كون $h^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$.

**تعريف:**

لتكن $\{a_n\}$ متتالية في $[-\infty,\infty]$ ولنضع:

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\} \quad (k = 1,2,\dots) \tag{1}$$ و

$$\beta = \inf\{\, b_1, b_2, \dots \} \tag{2}$$

ندعو $\beta$ النّهاية العُليا لـ $\{a_n\}$ ونكتب

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \sup a_n \tag{3}$$

إنَّ الخواص التّالية يُتحقّق منها بسهولة:

أولاً: $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$ فإنَّ $k \longrightarrow \infty \;:\; b_k \longrightarrow \beta$

ثانياً: توجد متتالية جزئية $\{a_{n_i}\}$ من $\{a_n\}$ بحيث $a_{n_i} \longrightarrow \beta$ عندما $i \longrightarrow \infty$

و $\beta$ هو أكبر عدد يتمتّع بهذه الخاصة

- النّهاية الدُّنيا تُعرَّف بشكلٍ مشابه. ببساطة نبادل بين inf و sup في (1) و (2) فنلاحظ أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \inf(a_n) = -\lim_{n\to\infty} \sup(-a_n) \tag{4}$$

إذا كانت $\{a_n\}$ متقاربة فإنّه من الواضح أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} \inf(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{5}$$

لنفترض أنَّ $\{f_n\}$ متتالية من الدّوال ذات القيم الحقيقية الموسعة معرّفةً على مجموعة $X$ عندئذٍ $\sup\limits_n f_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \sup f_n$ هي الدّوال المعرّفة على $X$ والمعرّفة بالشّكل:

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n\big(f_n(x)\big) \tag{6}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sup f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \sup\big(f_n(x)\big) \tag{7}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{8}$$

بافتراض أنَّ النّهاية موجودة لأجل كل $x \in X$. عندئذٍ ندعو $f$ النّهاية النّقطية للمتتالية $\{f_n\}$.

**مبرهنة** 1.14:

إذا كان $f_n : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ قيوساً، لأجل كل $n = 1,2,3, \dots$ وكان $g = \sup_{n\geq 1} f_n$ و $h = \lim_{n\to\infty} \sup f_n$ فإنَّ $g$ و $h$ قيوسان.

**الإثبات:**

$$g^{-1}\big((\alpha, \infty]\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}\big((\alpha, \infty]\big)$$

وبالتّالي فإنَّ المبرهنة 1.12 $(c)$ تقتضي أنَّ $g$ قيوس وبنفس النّتيجة تَحقّق بوضع بالطبع بوضع inf مكان sup وبما أنَّ $h = \inf_{k\geq 1}\left\{\sup_{i\geq k} f_i\right\}$ ينتج من ذلك أنَّ $h$ قيوس.

**نتائج:**

$(a)$ إنَّ نهاية كل متتالية متقاربة نقطياً من الدّوال العقدية القيوسة هي نهايو قيوسة.

$(b)$ إذا كان $f$ و $g$ قيوسسن (مداهما في $[-\infty, \infty]$) عندئذٍ يكون $\max\{f, g\}$ و $\min\{f, g\}$ كذلك.

وبشكلٍ خاص يكون هذا محقّقاً لأجل الدّوال $f^- = -\min\{f, 0\}$ و $f^+ = \max\{f, 0\}$.

1.15: إنَّ الدّالتين السّابقتين $f^+$ و $f^-$ تُدعيان القسمين الموجب والسّالب لـ $f$ ولدينا $|f| = f^+ + f^-$ و $f = f^+ - f^-$ تمثل لـ $f$ كفرقٍ لداليتن غير سالبتين، مع تحقّق الخاصة:

**خاصة:** إذا كان $f = g - h$ و $g \geq 0$ و $h \geq 0$ فإنَّ $f^+ \leq g$ و $f^- \leq h$.

**الإثبات:** $f \leq g$ و $g \geq 0$ فبوضوح ينتج أنَّ $f^+ = \max\{f, 0\} \leq g$.

الدوال البسيطة:

**تعريف 1.16:** تُدعى دالة عقدية $s$ معرّفةً على فضاء قيوس $X$ ومداها مجموعة منتهية دالةً بسيطة.

ومن بينها الدّوال البسيطة غير السالبة والتي مداها مجموعة جزئية منتهية من $[0, \infty)$ لاحظ أننا استثنينا بشكل صريح (صراحةً) $\infty$ من قيم الدّالة البسيطة.

إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ هي القيم المميزة للدّالة البسيطة $s$ وإذا فرضنا أنّ:

$A = \{x : S(x) = \alpha_i\}$ فعندئذٍ يكون من الواضح أنّ: $s = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ حيث $\chi_{A_i}$ هي الدّالة المميزة لـ $A_i$ كما عُرفت في المقطع **1.9** $(d)$.

كما أنّه من الواضح أنّ $s$ قيوسة إذا وفقط إذا كانت كل من المجموعات $A_i$ قيوسة.

**مبرهنة 1.17:**

ليكن $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ قيوساً. فعندئذٍ توجد دوال قيوسة بسيطة $s_n$ على $X$ بحيث تحقّق:

أ- $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$

ب- $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ عندما $n \longrightarrow \infty$ أياً كانت $x \in X$ .

**الإثبات:** لنضع $s_n = 2^{-n}$ فكلّ عدد صحيح موجب $n$ وكل عدد حقيقي $t$ يقابلهما عدد صحيح وحيد $k = k_n(t)$ يحقق $ks_n \leq t < (k+1)s_n$ فلنعرّف

1. $\varphi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)s_n \,; 0 \leq t < n \\ n \qquad ; n \leq t \leq \infty \end{cases}$ فكلّ $\varphi_n$ عندئذٍ هي دالة بوريلية على $[0, \infty]$.

2. $t - s_n < \varphi_n(t) \leq t$ إذا كان: $0 \leq t \leq n$ و $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq t$ و $\varphi_n(t) \longrightarrow t$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

لأجل كل $t \in [0, \infty]$ ينتج أنّ الدوال $s_n = \varphi_n o f$ تحقق (أ) و (ب) وهي دوال قيوسة حسب المبرهنة **1.12** $(d)$.

## خواص أولية للقياس:

**تعريف 1.18:** أ) القياس الموجب هو دالة $\mu$ معرّفة على $\sigma$ − جبر $\mathfrak{M}$ ومداها في $[0, \infty]$ وتكون جمعية عدّاً، هذا يعني: إذا كان $\{A_i\}$ صفاً عدوداً من المجموعات المنفصلة من $\mathfrak{M}$ فإنّ: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

ولتجنب الحالات التافهة سنفترض أيضاً أنّ

$\mu(A) < \infty$ لأجل مجموعة واحدة على الأقل $A \in \mathfrak{M}$.

ب) فضاء القياس هو فضاء قيوس عُرّف عليه قياس موجب معرّف على الجبر التام المؤلف من مجموعاته القيوسة.

ج) القياس العقدي هو قياس جمعي عدّاً ذو قيم عقدية معرّف على جبرٍ تام.

**<u>ملاحظة:</u>** ما دعوناه قياساً موجباً هو تكرار لما دُعي للتو بقياس. وأضفنا كلمة (موجب) للتأكيد. إذا كان $\mu(E) = 0$ لأجل كل $E \in \mathfrak{M}$ فإنّ $\mu$ قياس موجب حسب تعريفنا. إنّ القيمة $\infty$ قيمة مسموح بها في القياس الموجب، لكن عندما نتحدث عن القياس العقدي $\mu$ فإنه من غير المفهوم كون $\mu$ عدد عقدي لأجل كل $E \in \mathfrak{M}$.

وطبعاً القياسات الحقيقة تشكّل صفاً جزئياً من القياسات العقدية.

**مبرهنة 1.19:**

ليكن $\mu$ قياساً موجباً على الجبر التام $\mathfrak{M}$.عندئذٍ:

أ) $\mu(\phi) = 0$

ب) $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$ إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ عناصر منفصلة مثنى من $\mathfrak{M}$.

جـ) $A \subset B$ تقتضي $\mu(A) \leq \mu(B)$ إذا كان $A, B \in \mathfrak{M}$.

د) $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$ عندما $n \longrightarrow \infty$ إذا كان $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

و $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, A_n \in \mathfrak{M}$

هـ) $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$ عندما $n \longrightarrow \infty$ إذا كان $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

و $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, A_n \in \mathfrak{M}, \mu(A_1) < \infty$

كما سيبين لنا البرهان: فإنّ هذه الخواص باستثناء (جـ) محقّقة أيضاً لأجل القياسات العقدية، وتدعى (ب) خاصّة الجمع انتهاءً، وتدعى (د) الرتابة أو الاطّراد.

**الإثبات:** أ) لنأخذ $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) < \infty$ ولنأخذ $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$ في 1.18 (1).

ب) لنأخذ $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ في 1.18 (1).

جـ) بما أنّ $B = A \cup (B - A)$ , $A \cap (B - A) = \emptyset$ فإننا نرى أنّ (ب) تؤدي إلى

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$$

د) لنضع $B_1 = A_1$, $B_{n-1} = A_n - A_{n-1}$ لأجل $n = 2,3, \ldots$ عندئذٍ $B_n \in \mathfrak{M}$ و

$B_i \cap B_j = \emptyset$ إذا كان $i \neq j$ و $A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ وبالتّالي:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)\,, \mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

والآن: د) ينتج من تعريف مجموع السلاسل غير المنتهية.

هـ) لنضع $C_n = A_1 - A_n$ عندئذٍ $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ و $\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$

$A_1 - A = \bigcup C_n$ ومن (د) ينتج:

$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 - A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ وهذا يقتضي

تحقّق (هـ).

أمثلة 1.20:

إنّ إنشاء فضاءات قيوسة مفيدة يتطلب بعض الجهد كما سنرى ولكن يمكن عرض بعض الأمثلة الميالة إلى البساطة للتوّ:

أ) لأجل $E \subset X$ حيث $X$ أي مجموعة. ولنعرّف $\mu(E) = \infty$ إذا كانت $E$ مجموعة غير منتهية ولتكن $\mu(E)$ عدد نقاط $E$ إذا كانت $E$ منتهية، يدعى $\mu$ قياس العد على $X$.

ب) لنثبّت $x_0 \in X$ ولنعرّف $\mu(E) = 1$ إذا كانت $x_0 \in E$،إذا كانت $x_0 \notin E$ ذلك لأجل أي $E \subset X$. إنّ $\mu$ يدعى: كتلة الواحدة المتجمعة في $x_0$.

ج) ليكن $\mu$ قياس العد على المجموعة $\{1,2,3, \dots\}$ ولتكن $A_n = \{n+1, \dots\}$ عندئذٍ $n = 1,2, \dots$ : $\cap A_n = \infty$ , $\mu(A_n) = \infty$ هذا يبين أنّ الفرضية $\mu(A_1) < \infty$ ليست زائدة في المبرهنة 1.19 (هـ).

**تعليق على المصطلحات:** كثيراً ما نرى فضاءات القياس وقد أُرجعت إلى الثلاثية $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ حيث $X$ مجموعة ما و $\mathfrak{M}$ $\sigma$ – جبر على $X$ و $\mu$ قياس معرّف على $\mathfrak{M}$. وبشكل مشابه فإنّ الفضاءات القيوسة هي أزواج مرتبة $(X, \mathfrak{M})$. وهذا منطقياً صحيح وغالباً ملائم ومريح رغم أنّه مطوّل إلى حدٍ ما.

فعلى سبيل المثال: في $(X, \mathfrak{M})$، المجموعة $X$ هي ليست إلّا أكبر عناصر $\mathfrak{M}$ لذلك، فإذا عرفنا $\mathfrak{M}$ فسنعرّف أيضاً $X$. وبشكلٍ مشابه كل قياس منطلقه $\sigma$ – جبر، لذلك إذا عرفنا قياس $\mu$ فسنعرف أيضاً الجبر التام $\mathfrak{M}$ الذي عرّفنا عليه $\mathfrak{M}$ وسنعرّف أيضاً $X$ التي تشكّل $\mathfrak{M}$ ⎕ – جبر عليها.

وبناءً على ذلك يكون صحيحاً تماماً استخدام تعابير مثل "ليكن $\mu$ قياساً" أو إذا أردنا أن نؤكد على الجبر التام أو على المجموعة في المسألة فسنقول "ليكن $\mu$ قياساً على $\mathfrak{M}$ "أو" ليكن $\mu$ قياساً على $X$"

والذي هو إلى حدٍ ما لا معنى له منطقياً، لكنّ المألوف (ونحن سنتبع المألوف رياضياً عوضاً عن المنطق) هو أن نقول: " ليكن $X$ فضاء قياس" فالتأكيد لا يجب أن يكون على المجموعة ولكن على القياس. وطبعاً عندما تستخدم هذه الكلمات فمفهوم ضمنياً هنا أنّ" قياس معرّف على جبر تام ما في $X$ وهو القياس المقصود بالبحث والدراسة في الواقع.

بشكلٍ مشابه يُعبّر عن الفضاء التبولوجي بالزوج المرتّب $(X, \tau)$ حيث $\tau$ تبولوجيا في المجموعة $X$ والمعلومات الهامة موجودة في $\tau$ لا في $X$ لكن "الفضاء التبولوجي $X$" هو الذي نتحدث عنه.

وهذا النوع من الاصطلاح أو الاتفاق الضمني مستخدم في كل فروع الرياضيات، فمعظم الأنظمة الرياضية تُوضع بمرافقة صف من المجموعات الجزئية الشهيرة أو بعض العمليات الثنائية أو بعض العلاقات (التي يُفترض

أن تحقق خواص محددة) ونستطيع أن نعرض ذلك كله ثم نصِف عندئذٍ النظام بثنائية مرتّبة أو ثلاثية... حسب الحاجة. فعلى سبيل المثال:

قد يوصف المحور الحقيقي برباعية: $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ حيث $+,\cdot,<$ تحقّق موضوعات حقل أرخميدس المرتّب التام. لكنه رهان مضمون أن نراهن على أنّ القليل جداً من الرياضيين يفكرون بالحقل الحقيقي كرباعية مرتّبة.

**الحساب في $[0,\infty]$: 1.22** في كل مكان من نظرية التكامل لابد من مواجهة $\infty$. والسبب الأول أننا نريد أن نكون قادرين على المكاملة على مجموعات قيوسة غير منتهية، وبعد ذلك نرى أنّ للمحور الحقيقي طول لا نهائي. والسبب الثاني هو أنه حتى لو كنت قد وجهت اهتمامك الأول للدّوال الحقيقة فإن لنهاية الحد الأدنى الأعلى لمتتالية من الدوال الحقيقة الموجبة أو مجموع متتالية من الدوال الحقيقية الموجبة قد يكون $\infty$ في بعض النقاط. وأن تضع شروطاً خاصة كلما حدث هذا فإن ذلك سيضيع رتابة المبرهنات (كالمبرهنة 1.26 و1.27).

فلنعرّف $\infty=\infty+\infty=a+\infty=\infty$ إذا كان:

$$a.\infty=\infty.a=\begin{cases}\infty & : 0<a\leq\infty\\ 0 & : \quad a=0\end{cases}$$

وأنّ مجموع وجداء الأعداد الحقيقية هو معرف بالطريقة المألوفة لنا. قد يبدو غريباً أن نعرف $0.\infty=\infty.0=0$ ومن ناحية ثانية باعتماد تعريفنا هذا فإنه من السهل إثبات تحقق القوانين: التبديلي والتجميعي والتوزيعي في $[0,\infty]$ دون أي قيد. كما أنّ قوانين الاختزال محققة مع بعض الحذر: $a+b=a+c$ تؤدي إلى $b=c$ فقط عندما $a<\infty$ و

$a.b=a.c$ تؤدي إلى $b=c$ غفط عندما $0<a<\infty$ لاحظ أنّ القضايا الهامة التالية محققة: إذا كان $0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots,0\leq b_1\leq b_2\leq\cdots$ وكان: $a_n\to a,b_n\to b$ فإن $a_nb_n\to ab$ وإذا ضمنا هذا للنظريتين 1.17 و1.14 فسنرى أن مجموع وجداء دوال قيوسة على $[0,\infty]$ سيكون قيوساً.

**تكامل الدوال الموجبة:** في هذا المقطع $\mathfrak{M}$ ستكون جبراً تاماً على مجموعة $X$ و $\mu$ قياساً موجباً على $\mathfrak{M}$.

**تعريف** 1.23: إذا كانت $s:X\longrightarrow[0,\infty]$ دالة قيوسة بسيطة لها الشكل:

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}\ \dots(1)$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\dots$ القيم المميزة لـ $s$، وإذا كانت $E\in\mathfrak{M}$ فإننا نعرف

$$\int_E sd\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E)\ \dots(2)$$

إن الاصطلاح $0.\infty = 0$ يستعمل هنا، قد يكون $\alpha_i = 0$ لأجل بعض القيم $i$ وكذلك $\mu(A_i \cap E) = \infty$.

إذا كان $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ تابعاً قيوساً و $E \in \mathfrak{M}$ فسنعرف:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s d\mu \dots (3)$$

حيث يؤخذ الـ $sup$ على مجموعة الدوال البسيطة القيوسة $s$ والّتي تحقق $0 \leq S \leq f$

إن الطرف الأيسر لـ (3) يدعى تكامل لوبيغ لـ $f$ على $E$ بالنسبة للقياس $\mu$ وهو عدد ينتمي إلى $[0, \infty]$. لاحظ أنه لدينا، وبشكل واضح، تعريفان لـ $\int_E f d\mu$ إذا كان $f$ درجياً ونعني بذلك (2) و(3). ومن ناحية ثانية فإن قيمة التكامل هي ذاتها باعتبار $f$ في هذه الحالة هو أكبر الدول $s$ الّتي تظهر في الطرف الأيمن ل (3).

**1.24** إن القضايا التالية هي نتائج مباشرة من التعاريف، ويفترض في الدوال والمجموعات في تلك التعاريف أن تكون قيوسة:

أ) إذا كان $0 \leq f \leq g$ فإنّ:

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$$

ب) إذا كان $f \geq 0 \, , A \subset B$ فإنّ:

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

ج) إذا كان $c, f \geq 0$ ثابت بحيث $0 \leq c < \infty$ فإنّ:

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$$

د) إذا كان $f(x) = 0$ لأجل كل $x \in E$ فإنّ:

$$\int_E f d\mu = 0$$

حتى لو كان $\mu(E) = \infty$.

هـ) إذا كان $\mu(E) = 0$ فإنّ:

$$\int_E f d\mu = 0$$

حتى لو كان $f(x) = \infty$ لأجل كل $x \in E$.

و) إذا كان $f \geq 0$ فإنّ:

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$$

إنّ هذه النتيجة الأخيرة تبين أنّه بإمكاننا حصر تعريفنا للتكامل في تكامل على $X$ بكاملها دون المس بعمومية **التعريف:** إذا أردنا أن نكامل على مجموعة جزئية سنستعمل عندئذٍ الخاصة (و) كتعريف. (إنها مسألة تفضيل لتعريف على آخر لا أكثر). وقد تلاحظ هنا أن كل مجموعة قيوسة $E$ من فضاء القياس $X$ هي أيضاً فضاء قياس، وبكلام بسيط ووافٍ:

إنّ المجموعات القيوسة الجديدة هي ببساطة تلك المجموعات الجزئية القيوسة من $X$ والمحتواة في $E$ ، والقياس لم يتغير إلا أن مجموعة تعريفه قد تقلّصت.

هذا يبين أنّه إذا كان لدينا تكامل معرّف على فضاء قياس فإنه تلقائياً معرّف على على كل المجموعات الجزئية القيوسة على ذلك الفضاء.

1.25 مسألة: لتكن $t, s$ دالتين بسيطتين قيوسيتين غير سالبتين على $X$. ولنعرّف مايلي لأجل

$$\varphi(E) = \int_E s d\mu \quad : E \in \mathfrak{M}$$

عندئذٍ $\varphi$ قياس على $\mathfrak{M}$ وأيضاً:

$$\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

إنّ هذه المسألة تعتبر شكلاً مؤقتاً للمبرهنة 1.27 و 1.29.

**الإثبات:**

إذا كانت $s$ كما في التعريف 1.23 (أي $s$ درجية قيوسة منطلقها $X$ ومستقرها $[0,\infty]$) وكانت $E_1, E_2 \ldots$ مجموعات منفصلة من $\mathfrak{M}$ واتحادها $E$، فإنّ خاصة الجمع عدّاً تبين أنّ:

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_r)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_i \mu(A_i \cap E_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(E_r)$$

وكذلك فإنّ $\varphi(\emptyset) = 0$ لذلك فإن $\varphi$ لا تطابق $\infty$.

والآن: لتكن $s$ كما سبق ولتكن: $B_1, B_2, \ldots$ القيم المميزة لـ $t$ ولتكن

$B_j = \{x : T(x) = \beta_j\}$، وإذا كان $E_{ij} = A_i \cap B_j$ فإنّ:

$$\int_{E_{ij}} (s+t) d\mu = (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_{ij})$$

و

$$\int_{E_{ij}} s d\mu + \int_{E_{ij}} T d\mu = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij})$$

وهكذا فإنّ (2) تتحقق لأجل $E_{ij}$ مكان $X$.

وبما أنّ $X$ هي الاتحاد المنفصل لـ$E_{ij}: 1 \leq i,j \leq n$ فإنّ النصف الأول من مسألتنا سيقتضي (2).

ونحن الآن أمام الجزء المهم من النظرية، إنّ واحدة من أهم مميزاتها الرائعة هي الراحة في التعامل مع عمليات النهاية.

**مبرهنة التقارب المطّرد لِـ لوبيغ:** لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القيوسة على $X$ ولنفرض أنّ:

أ) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty : x \in X$

ب) $f_n(x) \longrightarrow f(x) : n \longrightarrow \infty, x \in X$

عندئذٍ يكون $f$ قيوساً ويكون

$$\int_X f_n(x)\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(x) d\mu$$

**الإثبات:** بما أنّ

$$\int f_n \leq \int f_{n+1}$$

فيوجد $\alpha \in [0,\infty]$ بحيث:

$$\int_X f_n(x) d\mu \to \alpha \dots (1)$$

حسب المبرهنة 1.14 يكون $f$ قيوساً. بما أنّ $f_n \leq f$ فيصبح لدينا

$$\forall n \geq 1 \ \int f_n \leq \int f$$

وبذلك ينتج من (1):

$$\alpha \leq \int_X f\, d\mu \dots (2)$$

لتكن $s$ دالة بسيطة وقيوسة بحيث $c, 0 \leq s \leq f$ ثابت ما بحيث: $0 < c < 1$ ولنعرف

(3) $E_n = \{x: f_n(x) \geq cS(x)\}: n = 1,2,\dots$ جميع المجموعات $E_n$ قيوسة و

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots, X = \cup E_n$$

للتأكد من هذه المساواة خذ عنصراً $x \in X$ فإذا كان $f(x) = 0$ فعندئذٍ $x \in E_1$ وإذا كان $f(x) > 0$ فإنّ $cs(x) < f(x)$ باعتبار أن $c < 1$ وبالتالي فإنه يوجد $x$ حيث $x \in E_n$. وأيضاً:

$$\int_X f_n(x)\,d\mu \geq \int_{E_n} f_n(x)\,d\mu \geq c\int_{E_n} s\,d\mu \quad : \quad n = 1,2,\dots \quad (4)$$

فلنجعل $n \longrightarrow \infty$، بتطبيق المسألة 1.25 والمبرهنة 1.19 $(d)$ على التكامل الأخير في (4) تكون النتيجة

$$\alpha \geq c\int_X s\,d\mu \dots (5)$$

بما أنّ (5) محققة لأجل كل $c < 1$ فإنّ

$$\alpha \geq \int_X S\,d\mu \dots .(6)$$

لأجل كل دالة درجية قيوسة $s$ تحقق $0 \leq s \leq f$ لذلك فإنّ:

$$\alpha \geq \int_X f\,d\mu \dots .(7)$$

بذلك تنتج المبرهنة من (1) و(2) و (7).

**مبرهنة** 1.27: إذا كان $f_n: X \longrightarrow [0,\infty]$ قيوساً لأجل $n = 1,2,\dots$ وكان

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu \qquad (x \in X) \dots (1)$$

فإنّ

$$\int_X f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu \dots (2)$$

**الإثبات:** أولاً: توجد متتاليان $\{s_i'\}, \{s_i''\}$ من الدوال البسيطة القيوسة الّتي تحقّق:

$s_i' \longrightarrow f_1 \;\;, s_i'' \longrightarrow f_2$ كما في المبرهنة 1.17 وإذا كان $s_i = s_i' + s_i''$ فإنّ

$s_i \longrightarrow f_1 + f_2$ وبضم مبرهنة التقارب المطرد إلى المسألة 1.25 نحصل على:

$$\int_X (f_1 + f_2)d\mu = \int_X (f_1)d\mu + \int_X (f_2)d\mu \dots (3)$$

ثم إنه بوضع $g_N = f_1 + \cdots + f_N$ فإن المتتالية $\{g_N\}$ ستتقارب باطراد إلى $f$ وبالاستقراء ينتج عن (3):

$$\int_X g_N d\mu = \sum_{n=1}^{N}\int_X (f_n)d\mu$$

بتطبيق مبرهنة التقارب المطرد مرة أخرى نحصل على (2) ويتم البرهان.

إذا أخذنا $\mu$ قياس العد على مجموعة عدودة عندئذٍ تكون المبرهنة 1.27 تعبيراً عن السلاسل المزدوجة (المضاعفة) للأعداد الحقيقية غير السالبة (والتي يمكن إثباتها ببساطة).

**نتيجة:** إذا كان $\alpha_{ij} \geq 0 : i,j = 1,2,\dots$ عندئذٍ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ij}$$

**توطئة فاتو 1.28:**

إذا كان $f_n: X \longrightarrow [0,\infty]$ قيوساً أياً كان $n$ عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$\int_X \lim_{n\to\infty}\inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int_X f_n d\mu \dots (1)$$

ويمكن أن تكون المتراجحة السابقة تامة دون مساواة (انظر التمرين 8)

**الإثبات:** لنضع (2) $g_k(x) = \inf f_i(x): i \geq k = 1,2,\dots.,x \in X$

عندئذٍ $g_k \leq f_k$ لذلك فإنَّ

$$\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu \dots (3)$$

كما أنّ $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots$ ، وكل دالة $g_k$ قيوسة. فحسب النظرية 1.14 وكون $g_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lim\inf f_n$ (حسب التعريف 1.13)، فإن مبرهنة التقارب المطرد تبين بناءً على ذلك أن الطرف الأيسر لـ (3) يسعى إلى الطرف الأيسر لـ (1) عندما $k \longrightarrow \infty$

وبالتالي ينتج (1) من (3).

مبرهنة 1.29: لنفترض أن $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ دالة قيوسة و

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu \ : \ (E \in \mathfrak{M}) \dots (1)$$

عندئذٍ يكون $\varphi$ قياس على $\mathfrak{M}$

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu \dots . (2)$$

لأجل كل دالة قيوسة $g$ على $X$ تأخذ قيمها في $[0,\infty]$.

الإثبات: لتكن $E_1, E_2, \dots$ عناصر منفصلة من $\mathfrak{M}$ اتحادها $E$. لاحظ أن:

$$\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j} f \dots (3)$$

وأنّ $(4)$ ... $\begin{cases} \varphi(E) = \int_X \chi_E f d\mu \\ \varphi(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f d\mu \end{cases}$ ينتج من المبرهنة 1.27 أنّ:

$$\varphi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j) \dots (5)$$

بما أنّ $\varphi(\emptyset) = 0$ فإنه من (5) ينتج أنّ $\varphi$ قياس.

ثم إنّ (1) تبين أن (2) محققة لأجل $g = \chi_E : E \in M$ وبالتالي فإنّ (2) محققة لأجل أي دالة بسيطة قيوسة $g$ والحالة العامة تنتج من مبرهنة التقارب المطرد.

ملاحظة: إن الطلب الثاني في المبرهنة 1.29 يمكن كتابته بالشكل $(6)..\varphi = f d\mu$

إن (6) تعني أنّ (2) محققة لأجل كل قيوس $g \geq 0$.

كما أنّ للمبرهنة 1.29 عكس مهم جداً، مبرهنة رداون نيكوديم التي ستثبت في الفصل (6).

## تكامل الدوال العقدية:

كما سبق: سنعتبر $\mu$ في هذا المقطع قياساً موجباً على فضاء قيوس كيفي $X$.

تعريف 1.30: نعرف $L^1(\mu)$ بأنه جماعة كل الدوال العقدية القيوسة $f$ على $X$، والتي لأجلها يكون

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

لاحظ أن قيوسية $f$ تقتضي قيوسية $|f|$ كما رأينا في المسألة 1.9 $(b)$. وبالتالي فإن التكامل السابق معرف.

تدعى عناصر $L^1(\mu)$ دوال لوبيغ القابلة للمكاملة (بالنسبة ل $\mu$) إنّ دلالة الأس 1 ستتضح في الفصل 3.

تعريف 1.31: إذا كان $f = u + iv$ حيث $u, v$ دالتان حقيقيتان قيوستان على $X$ وإذا كان $f \in L^1(\mu)$ فإننا نعرف $\int_E f d\mu$ بالشكل:

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu \dots (1)$$

لأجل أي مجموعة قيوسة $E$. هنا $u^+, u^-$ هما القسم الموجب والسالب لـ $u$ كما عُرفا في المقطع 1.10. و $v^-$ بنفس الطريقة نحصل عليها من $v$. إنّ هذه الدوال الأربعة قيوسة حقيقية غير سالبة. وبالتالي فإن الدوال الأربعة في الطرف الأيمن لـ (1) موجودة حسب التعريف 1.23 وأكثر من ذلك، لدينا $u^+ \leq |u| < f$ وهكذا....

لذلك فإن كلاً من التكاملات الأربعة منتهٍ، وهكذا فإن (1) تعرف التكامل في الطرف الأيسر كعدد عقدي. وقد نرغب أحياناً بتعريف دالة قيوسة $f$ مداها في $[-\infty, \infty]$ بالشكل:

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \dots (2)$$

بشرط أنّ واحداً على الأقل من التكاملات في الطرف الأيمن ل(2) منتهٍ، والطرف الأيسر ل(2) عندئذٍ هو عدد من المجال $[-\infty, \infty]$.

**مبرهنة** 1.32: لنفرض أنّ $f, g \in L^1(\mu)$ و $\alpha, \beta$ عددين عقديين، عندئذٍ:

$\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ و

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu \dots (1)$$

**الإثبات:** إنّ قيوسية $\alpha f + \beta g$ تنتج من المسألة 1.9 $(c)$. حسب المقطع 1.24 والمبرهنة 1.27:

$$\int_X |\alpha f + \beta g\ | d\mu \leq \int_X |\alpha||f| + |\beta||g\ | d\mu = |\alpha| \int_X f d\mu + |\beta| \int_X g d\mu < \infty$$

وهكذا فإنّ: $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ ولإثبات (1) من الواضح أنه يكفي أن نبرهن على:

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \dots (2)$$

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu \dots (3)$$

والحالة العامة من (2) ستنتج معنا إذا أثبتنا (2) لأجل $f$ حقيقي و $g$ من$L^1(\mu)$.

بافتراض هذا ووضع $h = f + g$ يكون لدينا: $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$

أو $h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \dots (4)$ من المبرهنة 1_27

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^- \dots (5)$$

وبما أنّ كلاً من التكاملات منتهٍ فيمكننا أن ننقل ونحصل على (2).

أما كون (3) محققة مع $\alpha \geq 0$ فينتج من المسألة 1.24 $(c)$.

ومن السهل إثبات تحقق (3) مع $\alpha = -1$ باستعمال علاقة مثل $(-u)^+ = u^-$ وكذلك فإن الحالة $\alpha = i$ سهلة: إذا كان $f = u + iv$ فإن:

$$\int (if) = \int (iu - v) = \int -v + i \int u = -\int v + i \int u = i\left(\int u + i \int v\right) = i \int f$$

بضم هذه الحالات إلى (2) نحصل على (3) لأجل أي عدد عقدي $\alpha$.

**مبرهنة** 1.33:

إذا كان $f \in L^1(\mu)$ فإن:

$$\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$$

**الإثبات:** ليكن

$$z = \int_X f d\mu$$

بما أنّ $z$ عدد عقدي فيوجد عدد عقدي $\alpha$، حيث $|\alpha| = 1$ بحيث يكون $\alpha z = |z|$.

ليكن $u$ الجزء الحقيقي لـ $\alpha f$، عندئذٍ: $u \le |\alpha f| = |f|$

وبالتالي:

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu = \int_X u d\mu \le \int_X |f| d\mu$$

إنّ المساواة الثالثة في العلاقة أعلاه محققة باعتبار ما يسبقها يبين أن $\alpha f$ حقيقي.

وسنتمم هذا المقطع بمبرهنة تقارب أخرى هامة:

## مبرهنة لوبيغ للتقارب الراجح:

لنفترض $\{f_n\}$ متتالية من الدوال العقدية القيوسة على $X$ بحيث تكون النهاية:

$\forall n: f(x) = lim\, f_n(x) \ldots (1)$ موجودة لأجل كل $x \in X$. إذا وجدت دالة:

$g \in L^1(\mu)$ بحيث يتحقق: $|f_n(x)| \le g(x) : n = 1,2,3 \ldots (2)$

وبالتالي $f \in L^1(\mu)$ و $lim \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \ldots (3)$ و

$$lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \ldots (4)$$

الإثبات: بما أنّ $f, |f| \le g$ قيوس فإن $f \in L^1(\mu)$، وبما أنّ $|f_n - f| \le 2g$ وبتطبيق توطئة فاتو على الدوال: $2g - |f_n - f|$ سنحصل على:

$$\int_X 2g d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_X (2g - |f_n - n|) d\mu = \int_X 2g d\mu + \lim_{n\to\infty} \inf \int_X (-|f_n - n|) d\mu$$

$$= \int_X 2g d\mu - \lim_{n\to\infty} inf \int_X (|f_n - f|) d\mu$$

بما أنّ $\int_X 2g d\mu$ منتهٍ فإننا نستطيع أن نطرحه فنحصل على:

$$\lim_{n\to\infty} sup \int_X |f_n - f| d\mu \le 0 \dots (5)$$

حصلنا على النهاية العليا لمتتالية أعداد حقيقية غير سالبة أصغر أو تساوي الصفر ومنه (5) تقتضي (3).

وبتطبيق المبرهنة 1.33 على $f_n - f$ ينتج من (3) العلاقة (4).

**دور المجموعات ذات القياس صفر:**

تعريف 1.35: لتكن $p$ خاصة ما تحقّقها $x$ أو قد لا تحقّقها.

على سبيل المثال قد تكون $p$ الخاصة "$f(x) > 0$" إذا كانت $f$ دالة معطاة.

وقد تكون " $\{f_n(x)\}$ متقاربة" إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية معطاة من الدوال.

إذا كان $\mu$ قياساً على $\sigma$ − جبر $\mathfrak{M}$ وكانت $E \in \mathfrak{M}$ فإن العبارة " $p$ تتحقّق تقريباً في كل مكان من $E$"

واختصارها "$p$ تتحقق $a.e$ في $E$" تعني أنّه يوجد $N \in \mathfrak{M}$ بحيث أنّ:

$p, N \subset E, \mu(N) = 0$ محققة لأجل كل نقطة $x$ من $E - N$.

وبالطبع فإنّ مفهوم $a.e$ مرتبط ارتباطاً وثيقاً بالقياس المعطى، وسنكتب "$a.e[\mu]$" كلما أردنا تحديد القياس.

على سبيل المثال: إذا كانت $g, f$ دالتين قيوستين وكان:

$\mu(\{x: f(x) \neq g(x)\}) = 0 \dots .(1)$ فنقول أنّ $f = g \;\; a.e[\mu]$ على $X$ وقد نكتب $f \approx g$ وهي علاقة تكافؤ ويمكن إثبات ذلك بسهولة.

إن خاصة التعدي ($f \approx h \Leftarrow f \approx g, g \approx h$) هي نتيجة يكون اتحاد مجموعتين قياسهما معدوم هو مجموعة قياسها معدوم.

لاحظ أنه إذا كان $f \approx g$ فإنه لأجل كل $E \in \mathfrak{M}$ يتحقّق:

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

ولإثبات هذا: لتكن $N$ هي نفسها المجموعة التي تظهر في (1)، عندئذٍ $E$ هي الاتحاد المنفصل للمجموعتين $E - N, E \cap N$، وعلى المجموعة $E - N$ نجد $f = g$

و $\mu(E \cap N) = 0$. وبشكل عام فإنَّ المجموعات ذات القياس صفر هي مجموعات مهملة في المكاملة.

وكل مجموعة جزئية من مجموعة همولة هي مجموعة همولة. لكن قد يحدث أحياناً أن يكون للمجموعة $N \in \mathfrak{M}$ ذات القياس صفر مجموعة جزئية $E$ لا تنتمي إلى $\mathfrak{M}$. وطبعاً نستطيع أن نعرف أنّ $\mu(E) = 0$ في هذه الحالة.

لكن هل سيبقى ممدد $\mu$ قياساً؟ أي هل سيبقى معرفاً على $\sigma$ – جبر؟

والحقيقة اللطيفة أن الجواب إيجابي:

**مبرهنة** 1.36:

ليكن $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ فضاء قياس و $\mathfrak{M}^*$ جماعة كل المجموعات $E \subset X$ والتي لأجلها توجد مجموعتان $A, B \in \mathfrak{M}$ بحيث أنّ $A \subset E \subset B$ و $\mu(B - A) = 0$ ولنعرف $\mu(E) = \mu(A)$ في هذه الحالة. عندئذٍ تكون $\mathfrak{M}^*$ $\sigma$ – جبر على $X$ و $\mu$ قياس على $\mathfrak{M}^*$.

إن القياس الممدد $\mu$ يدعى القياس الكامل. باعتبار أن كل المجموعات الجزئية من المجموعات ذات القياس صفرهي مجموعات قيوسة. يدعى الجبر التام $\mathfrak{M}^*$ الفضاء المكمل – $\mu$ لـ $\mathfrak{M}$.

تقول المبرهنة أن كل قياس يمكن أن يكمّل وهذا سيعطينا المزيد من المجموعات القيوسة وبالتالي: فإن مزيداً من الدوال القيوسة.

إن معظم القياسات التي قد نصادفها في المقرر قياسات كاملة لكن هناك بعض الاستثناءات وأحد هذه الاستثناءات سيظهر في إثبات مبرهنة فوربيني في الفصل 8.

**الإثبات:**

نبدأ البرهان بالتأكد من كون $\mu$ معرفاً جيداً لأجل كل $E \in \mathfrak{M}^*$، ولنفرض $A_1 \subset E \subset B_1$ , $A \subset E \subset B$ و $\mu(B - A) = \mu(B_1 - A_1) = 0$ (في كل مكان من البرهان سنرمز بـ $B, A$ لعناصر من $\mathfrak{M}$)

بما أنّ: $A - A_1 \subset E - A_1 \subset B - A_1$

ولدينا $\mu(A - A_1) = 0$ فإن $\mu(A) = \mu(A - A_1)$ ولنفس السبب:

$\mu(A_1) = \mu(A - A_1)$ وختاماً $\mu(A) = \mu(A_1)$.

والآن فلنثبت أنّ $\mathfrak{M}^*$ تحقّق الخواص الثلاثة لتعريف الجبر التام:

$i)$ $X \in \mathfrak{M}^*$ لأنَّ $X \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$.

$ii)$ إذا كان: $A \subset E \subset B$ فإن $B^c \subset E^c \subset A^c$. وهكذا فإنه: من $E \in \mathfrak{M}^*$ نستنتج أنّ $E^c \in \mathfrak{M}^*$ لأنَّ $A^c - B^c = A^c \cap B = B - A$

$iii)$ إذا كان: $A_i \subset E_i \subset B_i$, $E = \cup E_i$, $A = \cup A_i$, $B = \cup B_i$ فإنّ:

$$B - A = \bigcup_1^\infty (B_i - A) \subset \bigcup_1^\infty (B_i - A_i)\ ,\ A \subset E \subset B$$

بما أنّ الاتحاد العدود لمجموعات قياسها معدوم هو مجموعة قياسها معدوم فإنه ينتج أن $E \in M^*$ لأجل $i = 1,2,3, \dots$.

وأخيراً: إذا كانت المجموعات $E_i$ منفصلة في فإنَّ $A_i$ منفصلة أيضاً ونختتم ب[:

$$\mu(E) = \mu(A) = \sum_1^\infty \mu(A_i) = \sum_1^\infty \mu(E_i)$$

وهذا يثبت أن $\mu$ جمعي عداً على $M^*$.

**1.37** إن تعريفنا للدالة القيوسة قد يكون بالإمكان توسيعه بشكل مفيد. فلنقل أن دالة ما $f$ معرفة على مجموعة $E \in \mathfrak{M}$ قيوسة على $X$، إذا كان $\mu(E^c) = 0$ وكان $f^{-1}(V) \cap E$ قيوسة لأجل أي مجموعة مفتوحة $V$.

إذا عرفنا $f(x) = 0$ لأجل $x \in E^c$ فسنحصل على دالة قيوسة على $X$ بالمفهوم القديم. إذا حصل وكان قياسنا كاملاً فإننا نستطيع أن نعرف $f$ على $E^c$ بشكل تام وبطريقة كيفية وسنحصل ثانيةً على دالة قيوسة.

إن تكامل $f$ على أي مجموعة $A \in \mathfrak{M}$ مستقل عن تعريف $f$ على $E^c$ وبناء على ذلك فإن هذا التعريف ليس خاصاً على كل حال.

وهناك مواقع كثيرةٍ يحدث فيها هذا بشكل طبيعي. فعلى سبيل المثال: إن دالةً $f$ معرفة على المحور الحقيقي، قد تكون قابلة للمفاضلة تقريباً في كل مكان(بالنسبة لقياس لوبيغ) لكن تحت شروطٍ محددة تبقى $f$ مساويةً لتكامل مشتقها. وهذا سيناقش في الفصل 7.

ومتتالية $\{f_n\}$ من الدوال القيوسة على $X$ والمتقاربة تقريباً في كل مكان، باعتماد التعريف الجديد للقيوسية، تبقى النهاية دالة قيوسة على $X$ ولن نحتاج إلى تقليص المجموعة التي يحدث فيها التقارب. للتوضيح: دعنا نقدم نتيجة لمبرهنة التقارب الراجح للوبيغ في صيغة تضم المجموعات الاستثنائية ذات القياس صفر.

**مبرهنة** 1.38:

لنفرض$\{f_n\}$ متتالية من الدوال القيوسة العقدية المعرفة على $X$ _تقريباً في كل مكان_ والمقيدة بالشكل أو بالشرط

$$\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n| d\mu < \infty \tag{1}$$

عندئذٍ تكون المتسلسلة:

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \tag{2}$$

متقاربة تقريباً لأجل كل $x$، $f \in L^1(\mu)$ و

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

**الإثبات:** لتكن $s_n$ المجموعة التي عُرف عليها $f_n$ وكذلك ليكن $\mu(s_n^c) = 0$. لنضع $\varphi(x) = \sum |f_n(x)|$ وذلك لأجل $x \in S = \cap S_n$. عندئذٍ: $\mu(s^c) = 0$ ومن (1) والمبرهنة 1.27:

$$\int_X \varphi d\mu < \infty \tag{4}$$

إذا كان $E = \{x \in S: \varphi(x) < \infty\}$ ينتج من(4) أن $\mu(S^c) = 0$. إن السلسلة (2) متقاربة بالإطلاق لأجل كل $x \in E$ وإذا كان $f(x)$ معرفاً بـ (2) لأجل كل $x \in E$ فعندئذٍ $|f(x)| \leq \varphi(x)$ على $E$. لذلك $f \in L^1(\mu)$ على $E$ حسب (4). إذا كان $g_n = f_1 + \cdots + f_n$ فعندئذٍ: $|g_n| \leq \varphi, g_n(x) \longrightarrow f(x)$ لأجل كل $x \in E$. والمبرهنة 1.34 تعطينا (3) بوضع $E$ مكان $X$ وهذا يكافئ (3) باعتبار: $\mu(E^c) = 0$.

لاحظ أنه حتى لو كان $f_n$ معرّفاً في كل نقاط $X$ فإنَّ (1) سوف تقتضي فقط كون (2) متقاربة تقريباً في كل مكان.

**مبرهنة** 1.39:

أ- بفرض أنّ $f: X \to [0, \infty]$ قيوس، $E \in M$, $\int_E f d\mu$ عندئذٍ $f = 0$ تقريباً في كل مكان من $E$.

ب- بفرض أنَّ

$$\int_E f d\mu = 0 \, , f \in L^1(\mu)$$

لأجل كل $E \in M$، عندئذٍ: $f = 0$ تقريباً في كل مكان من $X$.

جـ- بفرض أنّ $\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu,$ $f \in L^1(\mu)$ عندئذٍ يوجد ثابت $\alpha$ بحيث يكون $\alpha f = |f|$ تقريباً في كل مكان في $X$.

لاحظ أنّ (جـ) تعين الشرط الذي بوجوده تتحقق المساواة في المبرهنة 1.33.

**الإثبات:**

أ- إذا كان $n = 1,2,3, \ldots$ $A_n = \left\{x \in E: f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ فإنَّ:

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0$$

لذلك فإنَّ $\mu(A_n) = 0$. بما أنّ:

$\cup A_n = \{x \in E: f(x) > 0\}$ فإن (أ) ينتج عندئذٍ.

ب− لنضع $f = u + iv$ ولتكن $E = \{x: u(x) \geq 0\}$، إنّ القسم الحقيقي لـ

$$\int_E f d\mu$$

هو عندئذٍ:

$$\int_E u^+ d\mu$$

وبالتالي

$$\int_E u^+ d\mu = 0$$

ونختتم بالخاصة التالية $u^- = v^+ - v^- = 0 \quad a.e$

جـ تفحّص إثبات المبرهنة 1.33. إنّ ادعائنا الحالي يقتضي أن المتراجحة الأخيرة من إثبات المبرهنة 1.33 يجب أن تكون في الواقع مساواة، وبالتالي:

$$\int (|f| - u) d\mu = 0$$

بما أنَّ $|f| - u \geq 0$ فإنّ (أ) تبين أنّ: $|f| = u \quad a.e$ وهذا يعني أن القسم الحقيقي لـ $\alpha f$ يساوي $|\alpha f| \quad a.e$ وبالتالي $\alpha f = |\alpha f| = |f| \quad a.e$ وهي النتيجة المطلوبة.

**مبرهنة** 1.40: بفرض أنّ $\mu(X) < \infty$ و $f \in L^1(\mu)$ و $s$ مجموعة مغلقة في المستوي العقدي والمعدلات:

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$$

تنتمي إلى $s$ لأجل كل $E \ni M$ مع $\mu(E) > 0$ عندئذٍ: $f(x) \in s$ لأجل كل $x \in X$ تقريباً.

**الإثبات:**

لتكن $\Delta$ أي قرص دائري مغلق (ولنقل أن مركزه $\alpha$ ونصف قطره $r > 0$) في متتمة $s$ بما أنّ $s^c$ هي اتحاد عدود لأقراص كهذه، فإنه يكفي أن نبرهن أن $\mu(E) = 0$.

حيث $E = f^{-1}(\Delta)$. بما أنّ $\mu(E) > 0$ فإنَّ:

$$|A_E(f) - \alpha| = \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f - \alpha) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha| d\mu \leq r$$

وهذا مستحيل باعتبار $A_E(f) \in s$ وبالتالي $\mu(E) = 0$.

**مبرهنة** 1.41:

لتكن $\{E_k\}$ متتالية من المجموعات القيوسة في $X$، بحيث أنّ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E^k) < \infty \ldots (1)$$

عندئذٍ: عند كل $x \in X$ تقريباً، ستنتمي لعدد منتهٍ على الأكثر من المجموعات $E_k$.

**الإثبات:**

إذا كانت $A$ مجموعة كل النقاط $x$ التي تنتمي لعددٍ غير منتهٍ من $E_k$، فسنثبت أنّ $\mu(A) = 0$ فلنضع:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x) \qquad (x \in X) \quad \ldots (2)$$

لأجل كل $x$، كل حد في هذه السلسلة هو إما 0 أو 1. وبالتالي فإن $x \in A$ إذاا كان $g(x) = \infty$. حسب المبرهنة 1.27 يكون تكامل $g$ على $X$ مساوياً للمجموع في (1). وهكذا فإنَّ: $g \in L^1(\mu)$ وكذلك $g(x) < \infty \quad a.e$.

* ⋯ * ⋯ * ⋯ * ⋯ * ⋯ * ⋯ * ⋯ * ⋯ * ⋯ *

## تمارين

1. هل يوجد جبر تام غير منتهٍ عدود على الأكثر؟

2. أثبت شبيه المبرهنة 1.8 لأجل $n$ دالة.

3. أثبت أنّه إذا كان $f$ تابعاً حقيقياً على فضاءٍ قيوس $X$ بحيث $\{x \ : \ f(x) > r\}$ مجموعة قيوسة لأجل كل عدد عادي $r$ فإنَّ $f$ قيوس.

4. لتكن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين في $[-\infty, \infty]$، أثبت النّظرية التّالية:

$$\lim_{n\to\infty} \sup(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} \inf(a_n) \quad (a)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup(a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n \quad (b)$$

بشرط أن لا يكون أحد المجموعين له الشّكل $\infty - \infty$ .

$(c)$ إذا كان $a_n \leq b_n$ لأجل كل $n$ فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf b_n$$

بيّن بمثال أنَّ المتراجحة التّامة يمكن أن تتحقّق في $(b)$.

5. $(a)$ لنفترض أنَّ $f: X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ و $g: X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ قيوستان، أثبت أنَّ المجموعتين $\{x \ : \ f(x) = g(x)\}$ ، $\{x \ : \ f(x) < g(x)\}$ قيوستان.

$(b)$ أثبت أنَّ مجموعة النّقاط الّتي تتقارب لأجلها متتالية من الدّوال القيوسة ذات القيم الحقيقية (النّهاية محدودة) هي مجموعة قيوسة.

6. لتكن $X$ مجموعة غير خالية و $\mathfrak{M}$ جماعة كل المجموعات $E \subseteq X$ حيث إما $E$ وإما $E^c$ عدودة على الأكثر. ولنعرّف $\mu(E) = 0$ في الحالة الأولى و $\mu(E) = 1$ في الحالة الثانية، أثبت أنَّ $\mathfrak{M}$ جبر تام في $X$ وأنَّ $\mu$ قياس على $\mathfrak{M}$. عبّر عن الدّوال القيوسة المقابلة وتكاملاتها.

7. افرض أنَّ $f_n: X \longrightarrow [0,\infty]$ قيوسة لأجل $n = 1,2, \ldots$ و $f_1 \geq f_2 \geq \cdots$ و أنَّ $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ لأجل كل $x \in X$ و $f_1 \in L^1(\mu)$ أثبت عندئذٍ أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

وبيّن أنَّ هذه النتيجة لن نحصل عليها إذا لم يتحقّق الشّرط " $f_1 \in L^1(\mu)$ ".

8.ليكن $f_n = \chi_E$ إذا كان $n$ فردياً و $f_n = 1 - \chi_E$ إذا كان $n$ زوجياً، ملا علاقة هذا المثال بتوطئة فاتو؟

9. افرض أنَّ $\mu$ قياس موجب على $X$ و $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ قيوس و

$$\int_X f d\mu = c$$

حيث $0 < c < \infty$ و $\alpha$ ثابت ما، أثبت أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left[1 + \frac{f}{n}\right]^\alpha d\mu = \begin{cases} \infty & : \quad 0 < \alpha < 1 \\ c & : \quad \alpha = 1 \\ 0 & : \quad 1 < \alpha < \infty \end{cases}$$

تلميح: إذا كان $1 \leq \alpha$ فإنَّ $\alpha f$ ترجح الدّوال المكاملة. وإذا كان $\alpha < 1$ يمكن تطبيق توطئة فاتو.

10. افرض أنَّ $\mu(E) < \infty$ و $\{f_n\}$ متتالية من الدّوال العقدية القيوسة والمحدودة على $X$ و $f_n \xrightarrow{\text{بانتظام}} f$ ($f_n$ تتقارب بانتظام على $X$ من الدّالة $f$):

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

وبيّن أنَّ الفرضية $\mu(E) < \infty$ لا يمكن حذفها.

11. بين أنَّ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$ في المبرهنة 1.41 وبالتّالي أثبت المبرهنة دون الرجوع إلى المكاملة.

12. افرض أنّ $f \in L^1(\mu)$. أثبت أنّه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

كلما كان $\mu(E) < \delta$.

13. أثبت أنَّ الفرضية (ج) في 1.24 تبقى صحيحة عندما يكون $c = \infty$.