٣ / ٣ / ٢٠١٩ المحاضرة الثالثة معادلات تفاضلية 2 د. ملك مارديني

عنوان المحاضرة:

معادلة ليجندر.

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - K(K+1)y = 0$$

وندعوها معادلة ليجندر من المرتبة K.

الحل: نقسم على أمثال y'' نجد أن:

$$P = \frac{2x}{x^2-1} \quad , \quad q = \frac{K(K+1)}{x^2-1}$$

ومنه نجد أن $x_0 = 0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية

1. نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

2. نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

- نعوض في المعادلة:

$$x^2 y'' - y'' + 2xy' - K(K+1)y = 0$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} - K(K+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\underset{①}{\sum_{2}^{\infty} n(n-1) C_n x^n} - \underset{②}{\sum_{2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}} + \underset{③}{2 \sum_{1}^{\infty} n C_n x^n}$$

$$\underset{④}{- K(K+1) \sum C_n x^n} = 0$$

Galaxy

3- نوحد القوى:

في المتسلسلة ② نبدل كل n ب $n+2$

$$\sum_{2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2}x^n$$

$$+2\sum_{1}^{\infty} nC_n x^n - K(K+1)\sum_{0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

4- نوحد الحدود الدنيا.

في المتسلسلات ② و ④ نفك $n=0, n=1$

في المتسلسلة ③ نفك $n=1$

$$-(2)(1)C_2 - (3)(2)C_3 x + 2(1)C_1 x$$
$$-K(K+1)C_0 - K(K+1)C_1 x$$

$$+\sum_{2}^{\infty}\left[n(n-1)C_n + 2nC_n - K(K+1)C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2}\right] x^n = 0$$

5- بالمطابقة:

- الحد الثابت $\quad -2C_2 - K(K+1)C_0 = 0$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{K(K+1)}{2!}C_0$$

- أمثال x $\quad -6C_3 + 2C_1 - K(K+1)C_1 = 0$

$$\Rightarrow -6C_3 - (K^2+K-2)C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_3 = -\frac{(K+2)(K+1)}{6}C_1 \Rightarrow C_3 = \frac{(K+2)(1-K)}{3!}C_1$$

Galaxy

- مثال. x^n : $n(n-1)C_n + 2nC_n - K(K+1)C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2} = 0$

التبسيط

$$[n(n-1) + 2n - K(K+1)]\, C_n$$
$$= [n^2 - n + 2n - K^2 - K]\, C_n$$
$$= [n^2 + n - K^2 - K]\, C_n$$
$$= [(n-K) + (n^2 - K^2)]\, C_n$$
$$= [(n-K) + (n-K)(n+K)]\, C_n$$
$$= (n-K)(1 + (n+K))\, C_n$$
$$= (n-K)(n+K+1)\, C_n$$

$$(n-K)(n+K+1)\, C_n - (n+2)(n+1)\, C_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{(n-K)(n+K+1)}{(n+1)(n+2)} C_n \quad ; \quad n \geq 2$$

b. نحسب الثوابت بدلالة C_0 و C_1 :

$$n = 2 \Rightarrow C_4 = \frac{(2-K)(2+K+1)}{3.4} C_2$$

$$= \frac{(2-K)(3+K)}{3.4} \left(-\frac{K(K+1)}{2!} C_0\right)$$

$$\Rightarrow C_4 = -\frac{(3+K)(2-K)(1+K)K}{4!} C_0$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{(3-K)(3+K+1)}{4 \cdot 5} C_3$$

$$= \frac{(3-K)(4+K)}{5 \cdot 4} \left(\frac{(K+2)(1-K)}{3!} C_1 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_5 = \frac{(4+K)(3-K)(2+K)(1-K)}{5!} C_1}$$

$$n=4 \Rightarrow C_6 = \frac{(4-K)(4+K+1)}{5 \cdot 6} C_4$$

$$= \frac{(4-K)(5+K)}{6 \cdot 5} \left(-\frac{(3+K)(2-K)(1+K)K}{4!} C_0 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_6 = -\frac{(5+K)(4-K)(3+K)(2-K)(1+K)K}{6!} C_0}$$

7. نعوض الثوابت بالشكل العام :-

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

$$= C_0 + C_1 x - \frac{(K+1)K}{2!} C_0 x^2 + \frac{(K+2)(1-K)}{3!} C_1 x^3 - \cdots$$

$$= C_0 \left[1 - \frac{(K+1)K}{2!} x^2 - \frac{(3+K)(2-K)(1+K)K}{4!} x^4 - \cdots \right]$$

$$+ C_1 \left[x + \frac{(K+2)(1-K)}{3!} x^3 + \frac{(4+K)(3-K)(2+K)(1-K)}{5!} x^5 + \cdots \right]$$

ويكون الحل العام هو تركيب خطي للحلين الخاصين .

/ /

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 6y = 0$$

الحل: نلاحظ أنها من شكل معادلة ليجندر من المرتبة $\mu = 2$

نجد ان $x_0 = 0$ هي نقطة عادية.

1. نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_0^\infty c_n (x - x_0)^n \Rightarrow y = \sum_0^\infty c_n x^n$$

2. نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_1^\infty n c_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة:

$$x^2 y'' - y'' + 2xy' - 6y = 0$$

$$\sum_2^\infty n(n-1) c_n x^n - \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2} + 2\sum_1^\infty n c_n x^n$$
(1) (2) (3)

$$- 6 \sum_0^\infty c_n x^n = 0$$
(4)

3. نوحد القوى:

في المتسلسلة 2 نبدل كل n ب $n+2$

$$\sum_2^\infty n(n-1) c_n x^n - \sum_0^\infty (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + 2\sum_1^\infty n c_n x^n$$
(1) (2) (3)

$$- 6 \sum_0^\infty c_n x^n = 0$$
(4)

4. نوحد الحدود الدنيا.

في المتسلسلات 2 و 4 نفك $n = 0, n = 1$

" " 3 " $n = 1$

Galaxy

$-2(1)C_2 - 3(2)C_3 x + 2C_1 x - 6C_0 - 6C_1 x$

$+\sum [n(n-1)C_n + 2nC_n - 6C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2}] x^n = 0$

5- بالمطابقة :

الحد الثابت : $-2C_2 - 6C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = -3C_0$

امثال x : $-6C_3 + 2C_1 - 6C_1 = 0$

$\Rightarrow -6C_3 - 4C_1 = 0$

$\Rightarrow C_3 = -\frac{2}{3} C_1$

امثال x^n : $(n^2 - n + 2n - 6)C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2} = 0$

$\Rightarrow (n^2 + n - 6)C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2} = 0$

$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+1)(n+2)} C_n \qquad n \geq 2$

6- نحسب الثوابت بدلالة C_0 و C_1

$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{5\cdot 0}{3\cdot 4} C_2 \Rightarrow C_4 = 0$

$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{(6)(1)}{4\cdot 5} C_3$

$C_5 = -\frac{6 \quad 2}{5\cdot 4\cdot 3} C_1 = -\frac{6\cdot 2\, 2}{5\, 4\, 3\, 2} C_1$

/ /

$$\Rightarrow C_5 = -\frac{6 \cdot 4}{5!} C_1$$

$$n=4 \Rightarrow C_6 = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 6} C_4$$

$$= \frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 5} \cdot 0 \Rightarrow C_6 = 0$$

$$n = 5 \Rightarrow C_7 = \frac{8 \cdot 3}{6 \cdot 7} C_5$$

$$= -\frac{8 \cdot 3}{7 \cdot 6} \frac{6 \cdot 4}{5!} C_1$$

$$\Rightarrow C_7 = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{7!} C_1$$

7- نعوض الثوابت بالشكل العام.

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x - 3 C_0 x^2 - \frac{2}{3} C_1 x^3 + 0 - \frac{24}{5!} C_1 x^5 \dots$$

$$= C_0[1 - 3x^2] + C_1[x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{24}{5!}x^5 - \frac{576}{7!}x^7 \dots]$$

وهذا هو الحل العام.

Scanned by CamScanner

ملاحظات هامة:

$y'' + py' + qy = 0$ معادلة تفاضلية متجانسة

$y'' + py' + qy = R$ معادلة تفاضلية غير متجانسة.

أولاً: اذا طلب منا إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة في جوار النقطة العادية $x_0 \neq 0$ عندئذٍ نجري الانسحاب $X = x - x_0$

ونبحث عن حل عام من الشكل $Y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$

وذلك بعد أن نكتب كلاً من R, q, p بدلالة X.

ثم نبدل كل X بـ $(x - x_0)$ فنحصل على الحل العام بجوار النقطة $x_0 \neq 0$

ثانياً: إن كل نقطة شاذة لحل المعادلة التفاضلية هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية ويكون العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال: ليكن $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}$ هو حل للمعادلة $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ نقطة شاذة لحل المعادلة وهي نقطة شاذة للمعادلة

مثال مضاد: ليكن $y = c_1 x + c_2 x^2$ هو حل المعادلة $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ نقطة شاذة للمعادلة.

لكنها نقطة غير شاذة لحلها

ثالثاً: عندما ننشر بقوى $(x - x_0)$ نميز حالتين:

1. اذا كان q, p كثيرا حدود بقوى $(x - x_0)$ أيضاً عندئذٍ نوجد الحد العام للسلاسل بهذه القوى.

٣ إذا كان p و q كثيرا حدود بقوى x عندئذٍ نكتب p و q بقوى $(x-x_0)$ بالشكل:

$$P = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$q = \beta_0 + \beta_1(x-x_0) + \beta_2(x-x_0)^2 + \dots$$

- بالنشر بالفك، المطابقة نحصل على الأمثال: $\alpha_0, \alpha_1, \dots \quad \beta_0, \beta_1, \dots$
- بالتعويض نحصل على p و q بقوى $(x-x_0)$

مثال: نعيد التعبير عن كثير الحدود (x^2+1) بشكل سلسلة قوى لـ $(x-1)$

أي $x_0 = 1$ بالشكل:

$$P = x^2 - 1 = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2$$

« نقف عند α_2 لأن لدينا x^2 في P »

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x - \alpha_1 + \alpha_2(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x - \alpha_1 + \alpha_2 x^2 - 2\alpha_2 x + \alpha_2$$

الحد الثابت: $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \dots ①$ ⇐ بالمطابقة

أمثال x: $\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \quad \dots ②$

أمثال x^2: $\alpha_2 = 1 \quad \dots ③$

نعوض ③ في ② ⇐ $\alpha_1 - 2(1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2 \quad \dots ④$

نعوض ③ و ④ في ① ⇐ $\alpha_0 - 2 + 1 = 1$

$\Rightarrow \alpha_0 = 2 \quad \dots ⑤$

نعوض 3 و 4 و 5 في شكل P ⇐

$$P = x^2 + 1 = 2 + 2(x-1) + 1(x-1)^2$$