نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄المحاضرة: الاولى ◄ عنوان المحاضرة: المفاهيم الأساسية في التحريك

سؤال: وضح مفهوم الكتلة للنقطة المادية

النقطة المادية : هي جسيم مادي يمكن إهمال أبعاده (الطول والعرض والارتفاع) عند دراسة الحركة أو التوازن، وبالتالي النقطة المادية تُعالَج (تُدرَس) كنقطة هندسية لا أبعاد لها، ونقبل أن يكون لها كتلة ونرمز لها m ، ولإيضاح مفهوم الكتلة نقول أنه وُجِدَ نتيجة التجربة:

إذا أثرت عدة قوى $F_1, F_2, \dots\dots, F_n$ في نقطة مادية M فإنها تكسبها التسارعات $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\dots, \Gamma_n$ (النقطة المادية هي تكتسب التسارعات) بالتالي إذا نسبنا هذه القوى إلى التسارعات نجد أن هذه النسبة ثابتة: أي أن

$$\frac{F_1}{\Gamma_1} = \frac{F_2}{\Gamma_2} = \frac{F_3}{\Gamma_3} = \dots\dots\dots = \frac{F_n}{\Gamma_n} = const = m$$

وسميت هذه النسبة ب m (كتلتها النقطية) .

تعيين النقطة المادية في الفراغ:

للتعرف على حركة جسم ما، لا بد من التعرف أولاً على موضع هذا الجسم ، ومن أجل ذلك لابد من مقارنة موضع هذا الجسم بالنسبة لجسم آخر نعده ثابتاً.

(مثل مقارنة حركة شخص يمشي في الطريق مع شجرة، الشجرة ثابتة والشخص متحرك)

وكثيراً ما يدعى هذا الجسم الثابت بـ "جملة إحداثيات مقارنة" (أو جملة إحداثية مقارنة)

وإن مفهوم الموضع وكذلك مفاهيم الحركة والتوازن هي مفاهيم نسبية وليست مطلقة، ونعني بذلك أن الجسم المتحرك بالنسبة لجملة مقارنة ما يمكن أن يكون ساكناً بالنسبة لجملة أخرى، وأنَ الحركة المستقيمة بالنسبة لجملة قد تكون منحنية بالنسبة لجملة أخرى و هكذا.

يمكن تصنيف جملة المقارنة إلى نوعين:

١. جمل عطالية:

تعرف بأنها تلك الجمل التي تتحقق فيها قوانين نيوتن وخاصة ذلك القانون الذي ينص على: { إذا لم تؤثر على النقطة المادية أي قوى خارجية فإن هذه النقطة المادية تتحرك حركةً مستقيمةً منتظمةً }.

٢. جمل لا عطالية:

يتحرك الجسم الحر في هذه الجملة بتسارع ما دون أن يكون خاضعاً لتأثير قوى خارجية.

(كالجُمَل في الفضاء، الدراسة بين النجوم والكواكب، خروج المركبة الفضائية من الغلاف الجوي)
وفي هذه الجمل يلاحظ تصنيف القوى إلى نوعين:

أ- **قوى خارجية:** (أي قوى تطبَّق على نقطة مادية) التي تؤثر في الأجسام كالقوى الكهربائية وغيرها .

ب- **قوى عطالية:** لا تتبادل الفعل بين الأجسام وبعضها (مثل قوى الاحتكاك) وهي قوى موجودة في الطبيعة.

و"دراستنا في هذا المقرر ستنحصر في الجمل العطالية فقط ".

قوانين نيوتن: و هي ثلاثة قوانين

القانون الأول: قانون العطالة و هذا القانون ينص على ما يلي:
إذا لم تؤثر على النقطة المادية أي قوة فإنها تبقى ساكنة أو تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة.

القانون الثاني: قانون التحريك الأساسي أو قانون نيوتن الثاني و ينص على:
جداء كتلة النقطة المادية بالتسارع يعطينا القوة المؤثرة على النقطة المادية

$$m\vec{\Gamma} = \vec{F}$$

أي أن:

$$\begin{cases} mx'' = F_x \\ my'' = F_y \\ mz'' = F_z \end{cases}$$

و هي المعادلة التفاضلية لحركة النقطة المادية

القانون الثالث: قانون الفعل و رد الفعل و ينص على أن

كل نقطتين ماديتين تؤثران على بعضهما البعض بقوتين متساويتين بالشدة و متعاكستين بالاتجاه على طول الخط الواصل بينهما.

الارتباطات (القيود على النقطة المادية)

إذا كانت لدينا نقطة مادية في الفراغ وكانت تتحرك بشكل حر، أي لها سرعة اختيارية، فإن مثل هذه النقطة تدعى بنقطة طليقة، وبعكس ذلك تسمى نقطة مقيّدة.
(أي إذا كانت النقطة المادية تتحرك على سطح أو منحنٍ عندئذ توجد إعاقة لحركة النقطة ولذلك سميت (بنقطة مادية مقيدة)).
وبالتالي فإن الشروط التي تحد من حركة النقطة المادّية تسمّى بـ**القيود** أو **الارتباطات**.

أنواع الارتباطات:

١) الارتباط المثالي: وهو الارتباط الذي يجبر رد الفعل أن يكون ناظمياً على السطح.

(أملس وليس خشن، أما إذا ترافقت بوجود احتكاك فإن مثل هذا الارتباط يسمى بالارتباط الخشن او الثقيل أو غير الناعم)

٢) الارتباط الهندسي: وهو الارتباط الذي يتعلق بموضع الجسم أي بإحداثياته (سواء كانت الديكارتية – القطبية --.........) أي يمكن أن نعبر عنه رياضياً بالشكل $f(x,y,z)=0$.

٣) الارتباط الحركي: وهو الارتباط الذي يتعلق بالعناصر الحركية للجسم بالإضافة إلى موضعه(إحداثيات النقطة المادية)، بمعنى أن يكون له معادلة من الشكل: $f(x,y,z,x',y',z')=0$ حيث x',y',z' هي مركبات السرعة.

٤) الارتباط الثابت: هذا الارتباط لا يتعلق بالزمن بشكل مباشر، يتعلق فقط بموضع النقطة المادية.

٥) الارتباط المتحول (غير الثابت): وهو الارتباط الذي يتعلق بالزمن بشكل مباشر. ومعادلته من الشكل: $f(x,y,z,t)=0$

القوى

تستطيع الأجسام التأثير المتبادل على بعضها البعض وذلك عن طريق التماس المباشر أو عن طريق التأثير عن بعد، و هذه القوى تسمى بما يلي:

a) **القوى الفعالة:** هذه القوى تؤثر على الجسم و لا تكسبه حركة.

b) **القوى الداخلية:** هي تلك القوى الناشئة بين الأجسام المتوضعة بقرب بعضها البعض مثل حركة المجموعة الشمسية.

c) **القوى الخارجية:** هي القوى الناشئة من تأثير الأجسام الغريبة عن الجسم، مثل قوى الطاقة الكهربائية.

المسائل الأساسية في التحريك

المسألة الأولى:
وهي أن تعطى كتلة النقطة المادية m، و القوة المؤثرة $\vec{F}$ و يكون المطلوب إيجاد معادلات الحركة.

المسألة الثانية:
نُعطى المعادلات التفاضلية للحركة و الكتلة m و المطلوب إيجاد القوة المؤثرة $\vec{F}$

مسألة

عيّن مسار و سرعة نقطة مادية تتحرك في المستوي oxy و فق المعادلات

$y = Bt \quad x = ct$ ثم أوجد القوة المؤثرة على هذه النقطة

$$t = \frac{x}{c}$$

$$y = \frac{b}{c}x$$

$$m\vec{\Gamma} = \vec{F}$$

$$mx'' = F_x$$

$$\boldsymbol{x' = c \quad , y' = B \to x'' = 0, y'' = 0}$$

القوة معدومة فالحركة مستقيمة منتظمة.

مسألة

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك وفق المعادلات:

$$x = a\cos wt$$
$$\boldsymbol{y = b\sin wt}$$
$$z = 0$$

أوجد القوة المؤثرة على النقطة M.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$F_x = mx''$$
$$F_y = my''$$
$$F_z = mz''$$

إعداد: عبير خزنة كاتبي،ولاء المبخر،وفاء شيخ سالم

◀ دكتور المادة: خليل يحيى

◀ المحاضرة الثانية: عنوان المحاضرة: عمل القوة

نبدأ بحل التمرين في المحاضرة السابقة:

$$x = a\cos wt$$
$$y = b\sin wt$$
$$z = 0$$

و المطلوب تحديد القوة المؤثرة على النقطة M

$$F = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k}$$
$$m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$$

$$mx'' = F_x \qquad x' = aw \quad \sin wt \qquad x'' = -aw^2\cos wt$$

$$my'' = F_y \qquad y' = bw\cos wt \qquad y'' = -bw^2\sin wt$$

$$\Rightarrow\ x'' = -w^2 x \qquad , y'' = -w^2 y$$

$$\Rightarrow\ mx'' = F_x = -mw^2 x \qquad , my'' = F_y = -mw^2 y$$

$$\Rightarrow\ F = -mw^2(x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\,) = -mw^2 r$$

حيث $r = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

مثال:

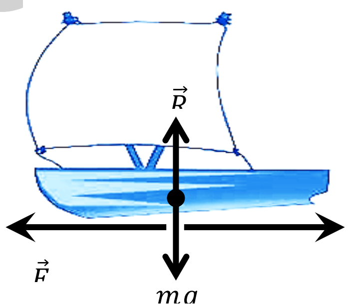
يتحرك زورق كتلته M وفق المعادلة $x = v_0\,\dfrac{m}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right) \ldots\ldots\ldots(1)$

حيث :

v_0 السرعة الابتدائية للزورق. a مقدار ثابت.

المطلوب: أوجد القوة المؤثرة على الزورق.

الحل: حركة الزورق مستقيمة على المحور ox.



mg وزن القارب.

$$x' = v_0 \; e^{-\frac{a}{m}t}$$

$$x'' = -v_0 \frac{a}{m} \, e^{-\frac{a}{m}t} \qquad \Longrightarrow \qquad x'' = -\frac{a}{m} \, x'$$

نعوض في $*$:

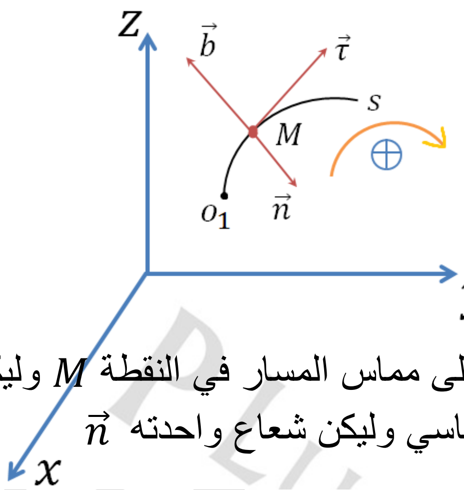
$$F_x = m(-\frac{a}{m} \, x') \qquad \Longrightarrow \qquad F_x = -ax'$$

نلاحظ أن القوة متناسبة مع السرعة (x').
و هذه القوة هي قوة احتكاك (مقاومة).

ملاحظة: الإشارة هنا في القوة $(-)$، فلو كانت الإشارة موجبة فهناك خطأ في الحل لأن الزورق مقاوم للماء والجاذبية

و يمكن أن نتعرف على وضع النقطة المادية في الجمل العطالية بعدة طرق:

أولاً : الطريقة الذاتية : في هذه الطريقة يتحدد موضع النقطة المادية بدلالة مسارها بالنسبة لجملة إحداثية مقارنة ولتكن هذه الجملة هي الجملة الإحداثية الديكارتية $(oxyz)$.



نأخذ النقطة M وبالاتجاه الموجب على المسار S
ويُعطى المبدأ O_1 على هذا المسار فيكون:

$$S = O_1M$$

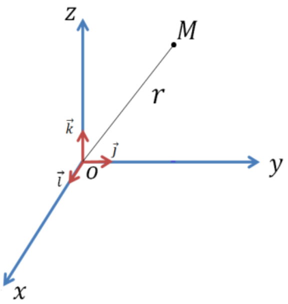
وتكون النقطة المادية M محددة بشكل تام إذا كانت محددة بدلالة الزمن (تابعة للزمن) أي: $S = f(t)$
وكان هذا التابع معرّفاً ومستمرّاً وقابلاً للمفاضلة،
وبالتالي نأخذ في النقطة M جملة إحداثية محاورها تنطبق على مماس المسار في النقطة M وليكن شعاع واحدة المماس هو الشعاع $\vec{\tau}$ (يلفظ تاو) ، والناظم الأساسي وليكن شعاع واحدته $\vec{n}$
وثنائي الناظم وليكن شعاع واحدته $\vec{b}$.
تدعى هذه الجملة بجملة الإحداثيات الذاتية و هي جملة متحركة بالنسبة للجملة الثابتة $oxyz$.

ثانياً: الطريقة الإحداثية : هذه الطريقة تنحصر باختيار جملة إحداثية $oxyz$ إضافةً لإحداثيات النقطة المادية. وبالتالي في فراغ ثلاثي الأبعاد يتحدد موضع النقطة المادية بدلالة الإحداثيات q_1, q_2, q_3 والتي تدعى بالإحداثيات المعممة أو المنحنية أو العامة (سندرسها بالفصل 8).
وبالتالي يتحدد موضع النقطة المادية إذا كانت :

$$q_1 = f_1(t) \quad , \quad q_2 = f_2(t) \quad , \quad q_3 = f_3(t)$$

ويجب أن تكون هذه الدوال معرفةً ومستمرةً وقابلةً للمفاضلة (للاشتقاق) وذلك من أجل تحديد موضع النقطة المادية.

ثالثاً: الطريقة الشعاعية : نأخذ مبدأ ثابت في الفراغ وليكن مبدأ لجملة إحداثية ثابتة $oxyz$



لنأخذ لنقطة المادية M عندئذٍ نعرّف الشعاع $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ بدلالة الزمن أي $\vec{r} = \vec{r}(t)$ لتحديد موقع النقطة M، ويجب أن يكون هذا التابع معرفاً ومستمراً وقابلاً للمفاضلة حتى تكون M محددة بشكل تام،

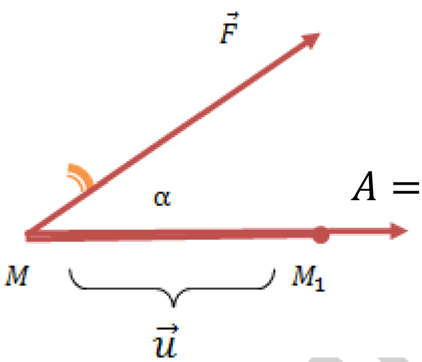
يدعى الشعاع $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ بنصف القطر الشعاعي للنقطة المادية M .

ويمكن كتابة r على الشكل التالي:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

عمل القوة

تعالج أولا قوة $\vec{F}$ ثابتة في الطول و الاتجاه، نأخذ نقطة مادية M و نؤثر عليها بقوة $\vec{F}$



إذا كانت $90 < \alpha$ فيكون عمل القوة موجب

إذا كانت $90 = \alpha$ فيكون عمل القوة معدوم

إذا كانت $90 > \alpha$ فيكون عمل القوة سالب

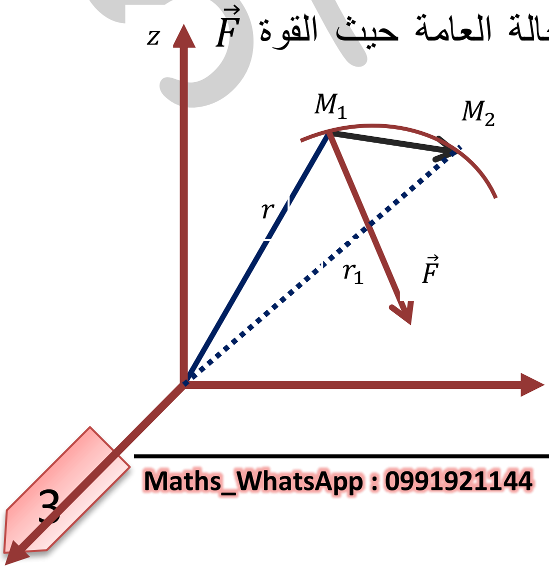
$$A = |F| = F.u.\cos\alpha$$

ندرس عمل قوة ثابتة في الطول و الاتجاه، هذه القوة تؤثر على نقطة مادية M أثناء انتقالها على مستقيم u $(u = MM_1)$ بافتراض أن α هي الزاوية بين شعاعي القوة و الانتقال و بالتالي نعرّف عمل القوة في هذه الحالة أنها حاصل الجداء العددي لشعاعي القوة بالانتقال.

حيث: $\vec{u}$ هو شعاع الانتقال.

α هي الزاوية بين شعاع القوة وشعاع الانتقال.

تُعالج عمل قوة متغيرة من حيث الطول و الاتجاه، و بالتالي الحالة العامة حيث القوة $\vec{F}$ بالاتجاه والطول:



نفرض أنه لدينا نقطة مادية M تؤثر عليها القوة $\vec{F}$ على منحني، فخلال الزمن dt تنتقل النقطة المادية على مسارها بمقدار dr حيث أن الانتقال هنا هو انتقال جزئي وبالتالي فإن العمل هو أيضاً عمل جزئي.

إذاً فإن العمل الجزئي خلال الفترة الزمنية dt والانتقال الجزئي ds يكون $dA = F.dr$

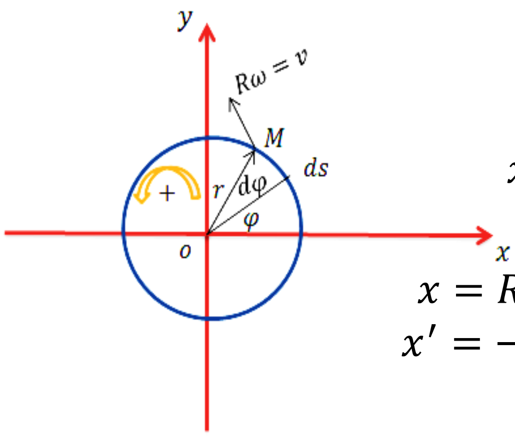
ويمكن أن نكتب dA بدلالة مركبات شعاع الموضع (مركبات القوى على المحاور xy

$$dA = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz \dots\dots\dots\dots (1)$$

وبالتالي إذا أخذنا انتقالاً محدداً للنقطة M على مسارها فإن العمل الكلي

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F.dr = \int_{M_2}^{M_1} (F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)$$

الحركة الدائرية



تكون الحركة دائرية إذا كان مسار النقطة المادية المتحركة دائرة.

لتكن M نقطة مادية على الدائرة تتحرك على دائرة نصف قطرها R

ولنأخذ المحورين $ox = oy$ لمستوي الحركة ولتكن o مركز الدائرة

وبالتالي تعيين موضع النقطة M على الدائرة في الجملة المختارة xoy

في الزاوية φ ، وبشعاع الموضع $\vec{r} = oM$ (نصف القطر الشعاعي)

وبالتالي احداثيات النقطة M :

$$x = R\cos\varphi \qquad , y = R\sin\varphi$$

$$x' = -R\varphi' \sin\varphi \qquad , y' = R\varphi' \cos\varphi$$

لإيجاد طويلة السرعة :

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$v = \sqrt{(-R\varphi' \sin\varphi)^2 + (R\varphi' \cos\varphi)^2}$$

$$v = \sqrt{R^2.\varphi'^2} = R\,.\varphi'$$

$$v = R.\omega$$

إذا كانت ds عنصر قوس المسار و $d\varphi$ الزاوية المركزية المقابلة لهذا العنصر

فإننا نستنتج أن $ds = R.d\varphi$ إذا أخذنا المشتق بالنسبة للزمن $\frac{ds}{dt} = R.\frac{d\varphi}{dt}$ وبالتالي السرعة هي مشتق الزاوية .

$$v = R.\varphi' = R.\omega$$

حيث w السرعة الزاوية و بالتالي نستطيع القول أن السرعة العددية في الحركة الدائرية تساوي حاصل جداء نصف قطر الدائرة التي تتحرك عليها النقطة بالسرعة الزاويّة و تكون بالاتجاه للماس الموجب للدائرة و بالتالي فهي عمودية على نصف القطر OM.

انتهت المحاضرة

إعداد: عبير خزنة كاتبي،ولاء المبخر،وفاء شيخ سالم

* حل المسألة في الحركة الدائرية $v=\frac{ds}{dt}$

$$\vec{\Gamma}=\frac{dv}{dt}\vec{T}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\Gamma_\tau=\frac{dv}{dt} \qquad \Gamma_n=\frac{v^2}{\rho}$$

حيث ρ نصف قطر التقوس للدائرة $R=\rho$

وبالتالي $\frac{ds}{dt}=b$

$$\vec{\Gamma}_\tau=0 \qquad \vec{\Gamma}_n=\frac{v^2}{R}=\frac{b^2}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}=\vec{\Gamma}_\tau+\vec{\Gamma}_n=\frac{b^2}{R} \Rightarrow \vec{F}=m\vec{\Gamma}=m\frac{b^2}{R}$$

سؤال:

تتحرك نقطة مادية M على مسار مستقيم وفق المعادلة $x=\frac{b}{k}(kt+e^{-kt})$ حيث k, b ثوابت، عين سرعة النقطة m في لحظة البدء ثم أوجد تسارعها بدلالة سرعتها

$v=x'=\frac{b}{k}(1-e^{-kt})$ ← $t=0$ في لحظة البدء

$v=0$ ← $t=0$ عند

$$x''=be^{-kt}=\Gamma$$

$$\Rightarrow e^{-kt}=\frac{\Gamma}{b} \Rightarrow v=\frac{b}{k}\left(1-\frac{\Gamma}{b}\right)$$

* القوى الكمونية:

إذا أخذنا عبارة العمل الجزئي $dA=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz$ (1)

وفرضنا أن الحدود الثلاث عبارة عن تفاضل تام لتابع ما. $V=V(x,y,z)$

ندعو في هذه الحالة القوة $\vec{F}$ أنها قوة كمونية والتابع V بتابع الكمون، وعليه تكون القوة $\vec{F}$ كمونية يجب أن تحقق المساواة التالية

$$dA=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نستنتج أنه يجب

$$F_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y=\frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z=\frac{\partial u}{\partial z}$$

وللتعرف على حقل إذا كان كمونياً أم لا بإمكاننا استخدام النظرية التالية (شرط لازم)

» إن المشتقات الجزئية بالنسبة للمتحولات x, y, z بعضها أن تتبادل المواضع

أي على الشكل التالي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial z}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

فإذا كانت هذه العلاقات محققة تكون هذه القوى الكمونية.

* (طريقة ثانية): أهم

كذلك يمكن التحقق فيما إذا كانت القوة الكمونية أم لا، وذلك إذا كانت القوة محققة انعدام شعاع الدوران

$$\overrightarrow{rot}\, F = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \vec 0$$

إذا وفقط إذا تحقق ذلك تكون هذه القوة كمونية

* (طريقة ثالثة):

كذلك إذا كانت القوة هي تدرج لتابع عددي.

$$F = \overrightarrow{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec i + \frac{\partial u}{\partial y}\vec j + \frac{\partial u}{\partial z}\vec k$$

أي إذا وفقط إذا كانت القوة هي تدرج التابع u $\vec F = \overrightarrow{grad}\, u$ نقول إن هذه القوة كمونية

النظريات العامة في الديناميك:

① نظرية كمية الحركة:

لتكن M نقطة مادية كتلتها m وسرعتها v ضمن المجال، $\vec p = m\vec v$ كمية الحركة للنقطة المادية حيث v سرعة النقطة المادية، p كمية الحركة في شعاع السرعة بالنسبة للزمن هو الشعاع

فيكون $f = \frac{\partial p}{\partial t} = m\Gamma = \frac{dp}{\partial t}$ وعندما تكون $\vec F = \vec 0$ عندئذ $\frac{dp}{dt} = \vec 0$ وبالتالي $\vec p = const$

ومن ذلك نستنتج مبدأ ~~[illegible]~~ انحفاظ كمية الحركة

المشتق الزمني لكمية الحركة يساوي إلى مجموع القوى المؤثرة على هذه النقطة المادية.

[يمكن أن يأتي في السؤال الأول امتحانات: أكتب نظرية الحركة مع البرهان أو برهن أن المشتق الزمني لكمية الحركة يساوي إلى مجموع القوى المؤثرة على هذه النقطة.]

2) نظرية العزم الحركي: لتكن لدينا نقطة مادية M كتلتها m و نقطة ما O في الفراغ عندئذ:

يكون عزم كمية الحركة $\vec{p}=m\vec{v}$ نسمي بالتعريف: العزم الحركي للنقطة المادية M حول O يعطى بالعلاقة

$$\vec{\sigma}=\vec{OM}\wedge\vec{p} \Rightarrow \vec{\sigma}=\vec{OM}\wedge m\vec{v}$$

حيث يسمى $\vec{\sigma}$ (سيغما) بالعزم الحركي.

حتى نوجد نظرية العزم الحركي نشتق المعادلة السابقة بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{OM}\wedge m\vec{v})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\vec{OM}}{\partial t}\wedge m\vec{v}\right)+\left(\vec{OM}\wedge\frac{dm\vec{v}}{dt}\right)$$

إن كمية الحركة و $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ (مشتق شعاع الموضع أي شعاع السرعة v) شعاعين على نفس الحامل وبالتالي جداؤهما الخارجي يكون صفراً ولذلك لأن شعاع كمية الحركة هو عبارة عن جداء ثابت موجب والذي هو الكتلة m بشعاع السرعة ومنه

$$d\vec{\sigma}=0\left(\vec{OM}\wedge\frac{dm\vec{v}}{dt}\right) \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt}=\left(\vec{OM}\wedge\frac{dm\vec{v}}{dt}\right)=\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\left(\vec{OM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

ولكن مشتق السرعة بالنسبة للزمن هو التسارع

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}=(\vec{OM}\wedge m\vec{\Gamma})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt}=\underbrace{(\vec{OM}\wedge\vec{F})}_{\text{عزم القوة}}$$

يمكن أن نرمز لـ $\vec{OM}$ بـ $\vec{r}$ ومنه $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}$

ومنه نستنتج أن مشتق العزم الحركي حول النقطة O بالنسبة للزمن هو عزم القوة المؤثرة على النقطة المادية حول O

3) نظرية الطاقة الحركية: لتكن M نقطة مادية كتلتها m وسرعتها v باستخدام قانون التحريك الأساسي

$$m\vec{\Gamma}=\vec{F} \quad (1)$$

نضرب عددياً (داخلياً) طرفي العلاقة (1) بـ $\vec{dOM}$ فيصبح

$$m\vec{\Gamma}\cdot\vec{dOM}=\vec{F}\cdot\vec{dOM}$$

وعلماً أن الشعاع هو مشتقة الشعاع بالنسبة للزمن فيمكننا أن نكتب العلاقة الأخيرة بالشكل

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{OM}=\vec{F}\cdot d\vec{OM}$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot d\vec{OM}$$

$$T=\frac{mv^2}{2}$$

نسمي المقدار $\frac{mv^2}{2}$ بالطاقة الحركية للنقطة المادية

أصبح لدينا $dT=\vec{F}\cdot d\vec{OM}$

وبالتالي نستطيع القول أن تفاضل الطاقة الحركية لنقطة مادية يساوي إلى العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة M المتحركة الطليقة على مسافة محددة (يدعى بالعمل الأولي)

[illegible]

الدكتور: خليل يحيى

ميكانيك ..

المحاضرة الرابعة / /

* العنوان: الطاقة ، الحركة الاهتزازية ١١

* تكامل الطاقة:

لنفرض أن القوى المؤثرة على النقطة المادية $du = f.dr$

لندخل تابع جديد $V = -u$. $u = \int f.dr$

ندعو هذا التابع الطاقة الكامنة للنقطة المادية: $A = m.g.h$

قوة نقطة كمونية: $u = B = m.g.h$

قوة ثابتة $u = -m.g.h$

ثابت التكامل: h : $dT = -dV$

$T + V = h$

* الحركة المستقيمة في وسط مقاومة:

مثال:

يلقى جسم ثقيل شاقولي نحو الأسفل بسرعة ابتدائية V_0 أوجد حل هذا الجسم إلى قعر البحيرة بعد مرور T من الزمن يتعرض هذا الجسم إلى مقاومة من الوسط مقتصراً على المرور الشاقولي للحركة or:

m كتلة النقطة

μ ثابت التناسب $R = m.\mu.x'$ الميل

من قانون الحركة احسب عمق البحيرة:

الحل:

$P = mg$

$R = -m\mu x'$

حسب القانون الأساسي للتحريك: $m\vec{\Gamma} = \vec{f}$

$mx'' = mg - m\mu x'$

نقسم على "m" $\;x'' = g - \mu x'$

$$\frac{dx'}{dt} = g - \mu x' \Rightarrow \frac{dx}{g - \mu x'} = dx$$

نكامل:

$$\frac{-1}{\mu} \ln(g - \mu x') = t + c_1$$

/ /

$t=0 \quad , \quad x_0=0 \quad\quad x_0=v_0$

$c_1 = \frac{-1}{\mu} \ln(g-\mu v_0) \longrightarrow v$

$\frac{1}{\mu} \ln(g-\mu x') = t - \frac{1}{\mu}(g-\mu v_0)$

باجراء الحساب:

$x' = \frac{g}{\mu} - \frac{g-\mu v_0}{\mu} e^{-\mu t}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\mu} - \frac{g-\mu v_0}{\mu} e^{-\mu t}$

$x = \frac{g}{\mu} t + \frac{g-\mu v_0}{\mu^2} e^{-\mu t} + C_2$

من شروط البدء:

$\Rightarrow C_2 = \frac{\mu v_0 g}{\mu^2}$

قانون الحركة: $x = \frac{g}{\mu} t + \frac{g-\mu v_0}{\mu^2} (e^{-\mu t} - 1)$

لحساب العمق نبدل كل $x=h \quad , \quad t=T$

مثال: انطلق قارب بسرعة v_0 باتجاه معاكس لاتجاه التيار الذي يؤثر عليه بقوة تتناسب مع سرعة القارب وفقاً للقانون $\vec{R}=-m\mu\vec{v}$ فإذا كانت كتلة القارب m فكم من الوقت اللازم لكي تتناقص سرعة القارب الى نصف السرعة الابتدائية.

الحل:

حسب قانون التحريك الاساسي: $m\vec{\gamma} = \vec{F}$

$m x'' = -m\mu v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu v$

$\frac{dv}{v} = -\mu dt$

/ /

$$\ln v = -\mu t + \ln v_0$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\mu t \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\mu t} \qquad ; v = \frac{1}{2} v_0$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\mu t \Rightarrow \ln 2 = \mu t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\mu}$$

الحركة الاهتزازية:

ندرس حركة نقطة مادية على مستقيم ox ولنفرض أن هذه النقطة المادية تخضع لقوة من الشكل $f = -cx$ حيث c موجب, هذه القوى تتناسب مع بعد النقطة من مبدأ القياس $\xrightarrow{\quad o \quad M \quad}$ وتحاول هذه القوى إرجاع النقطة المادية إلى المبدأ لذلك تعرف بـ القوى المرجعة

$$m\vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow mx'' = -cx$$

$$x'' = -\frac{c}{m} x \qquad \text{نرمز لـ} \quad k^2 = +\frac{c}{m} \quad \text{نعوض بـ}$$

$$x'' + k^2 x = 0 \quad \text{معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة.}$$

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x\ e^{kt} \Rightarrow k^2 + k^2 = 0$$

لكن نعلم أن $\quad k_1 = ik,\ k_2 = -ik$

$$x = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}$$

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

$$e^{-ik} = \cos kt - i \sin kt$$

$$x = (c_1 + c_2)\cos kt + (c_1 - c_2) i \sin kt$$

$$x = -A\cos kt + iB \sin kt$$

حسب شروط البدء. $\quad x = x_0 \qquad x' = v_0 \qquad t = 0$

~~$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$~~

$$x' = -A k \sin kt + B \cos kt$$

$A = x_0$ $\qquad$ $B = \dfrac{v_0}{k}$

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$$

إذا فرضنا $A = a \sin\alpha$, $B = a \cos\alpha$

حسب شروط البدء نجد أن

$$x = a \sin(kt + \alpha)$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0}{k^2}} \qquad \operatorname{tag}\alpha = \frac{k x_0}{v_0}$$

يدعى المقدار $kt + \alpha$ بطور الاهتزاز أما الثابت α فهو الطور الابتدائي للاهتزاز في اللحظة $t=0$ وندعو العدد a بسعة الاهتزاز

إعداد : وعد شيخ سالم .

دكتور المادة: خليل يحيى

ميكانيك

(العنوان: الحركة الاهتزازية القسرية والمتخامدة) المحاضرة الخامسة:

مثال: علق في طرف السفلي B للنابض شاقولي في جسم قوته P أما الطرف الأعلى A للنابض، ثبّت في موضع ثابت A يزداد طول النابض بمقدار δ نتيجة لتعليق الجسم عند توازنه وتهمل مقاومة الوسط، أوجد قانون الحركة الاهتزازية للجسم إذا ترك دون سرعة ابتدائية C

الحل: حسب قانون نيوتن الثاني (التحريك)

$m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

$F = c|\Delta l|$ $\qquad x_0 = -\delta$

$\Delta l = x + \delta$

$\Rightarrow m\Gamma = mg - c(x+\delta)$

$mg = c\delta$

$m x'' = -cx$

$x'' + k^2 x = 0 \quad ; \quad k^2 = \frac{-c}{m}$

$x = A\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin t$

$x = -\delta\cos kt + 0$

- مثال: M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على محور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد

$F = \frac{-mk^2}{x^3}$

أوجد المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة وفق شروط البدء في لحظة البدء النقطة بدون سرعة ابتدائية في الموضع a

$t = 0, \quad x = a, \quad x' = 0$

ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة إلى الموضع (a)

حسب القانون الأساسي في التحريك:

$m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

$m x'' = \frac{-mk^2}{x^3} \Rightarrow x'' = \frac{-k^2}{x^3}$ نضرب الطرفين بـ $2x'$

$2x''x' = \frac{-2k^2x'}{x^3} \Rightarrow \boxed{x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1} \rightarrow$ طريقة 2: بالقانون

$x'' = \frac{-k^2}{x^n}$

$2x'x'' = \frac{-2x'k^2}{x^n} \Rightarrow$

عندما: $t = 0, x = a, x' = 0$

$0 = \frac{k^2}{a^2} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{-k^2}{a^2}$

$x'^2 = \frac{-2}{-n+1} \cdot \frac{k^2}{x^{n-1}} + c$

$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k^2}{a^2} = x'^2 = \frac{k^2(a^2 - x^2)}{x^2a^2} \Rightarrow x' = \frac{\mp k\sqrt{a^2-x^2}}{xa}$

$x' = -\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-k}{a}\, dt$$

$$-\sqrt{a^2-x^2} = \frac{-k}{a} t + C_2$$

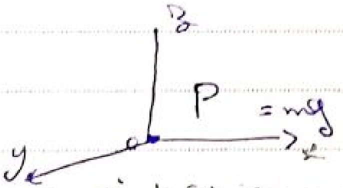
من شروط البدء نجد أن $C_2=0$

نبدل x ونربع ...

$$\left[-\sqrt{a^2-x^2}\right]_a^0 = \left[\frac{-x}{a} t\right]_0^t$$

$$-\sqrt{a^2}+0 = \frac{k}{a} t \Rightarrow -a = \frac{-k}{a} t \Rightarrow \frac{a^2}{k} = t$$

مثال: بين أن القوة الثقالية هي قوة كمونية:



$F_x=0 \; , \; F_y=0$

$F_z=-mg\,z$

من المعلوم أنه ضمن منطقة معينة بالقرب من سطح الأرض يمكن اعتبار قوة الثقالة للأجسام $P=mg$ (ثابتة بالشدة والاتجاه) نأخذ جملة المحاور الإحداثية $oxyz$ حيث محور oz شاقولي صاعد

عندئذ مساقط القوة الثقالية ★ $F_x=0 , F_y=0 , F_z=-mg$

ومن الشروط التي تجعل القوة كمونية $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

بتطبيقها نجد أن هذه القوة هي قوة كمونية

الحركة الاهتزازية المتخامدة...

القوة عمودية على الانتقال في العمل معدوم

الحركة الاهتزازية التوافقية لا تتغير بمرور الزمن وبالتالي تكون الحركة الاهتزازية مستمرة حتى توصلنا لتلك النتيجة، افترضنا أن النقطة المادية لا تلاقي مقاومة في الوسط الذي تتحرك فيه وهذه القوة هي قوة مرجعية وهي قوة كمونية. (افترضنا أن القوة المرجعية هي قوة كمونية)

إلا أن ذلك لا يحدث في الطبيعة ولابد لتلك الحركة أن تتخامد مع مرور الزمن نتيجة لتأثير الوسط.

لنفرض أن مقاومة الوسط من الشكل $R=-\mu x^2$; ثابت موجب μ

و بالتالي تكون النقطة المادية μ خاضعة لقوة مرجعة بالإضافة لقوة المقاومة

$$m x'' = -cx - \mu x'$$

$$x'' = \frac{-cx}{m} - \frac{\mu}{M} x'$$

* نفرض أن $\boxed{\frac{\mu}{m} = 2b}$, $\boxed{\frac{c}{m} = k^2}$

أصبح لدينا

$$x'' = k^2 x - 2b x' ,$$

$$x'' + 2b x' + k^2 x \quad ?$$

معادلة تفاضلية خطية ثابتة

جذور المعادلة
$$\Delta = 4b^2 - 4k^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{b^2-k^2} \Rightarrow \Delta_1 = -b + \sqrt{b^2-k^2}$$
$$\Rightarrow \Delta_2 = b - \sqrt{b^2-k^2}$$

k هو تواتر الحركة الاهتزازية ، b يصف لنا شدة مقاومة الوسط

+1) $b < k \Rightarrow k^2 - b^2 = k_1^2$

$$\lambda_1 = -b + ik_1$$

$$\lambda_2 = -b - ik_1$$

أو معادلة الحركة:

$$x = e^{-bt}(A\cos k_1 t + B\sin k_1 t)$$

2) $b > k \Rightarrow \sqrt{b^2-k^2} = n$

$$\lambda_1 = -b + n$$

$$\lambda_2 = -b - n$$

و بالتالي

$$x = e^{-bt}(c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt})$$

$$e^{nt} = ch\, nt + sh\, nt$$

$$e^{-nt} = ch\, nt - sh\, nt$$

$$x = e^{-bt}(A\, ch\, nt + B\, sh\, nt)$$

3) $b = k \Rightarrow$

$$x = e^{-bt}(c_1 + c_2 t)$$

في هذه الحالة الحركة اهتزازية متخامدة.

الحركة الاهتزازية القسرية...

وجدنا أن الحركة الاهتزازية التوافقية تولدت نتيجة بتأثير قوة مرجعة وهي قوة مرجعة، أما الحركات الاهتزازية المتخامدة فقد تولدت نتيجة قوة مقاومة الوسط التي أخذناها تتعلق بالسرعة إضافة إلى القوة المرجعة ولم نتطرق لتلك الحالة التي تتعلق فيها القوة بالزمن بالإضافة للقوة المرجعة.

فتكون بالحالة التالية: نأخذ القوة كل شكل تابع جيبي $Q \sin pt$ ثابت

عندئذ تكون المعادلة التفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل ثابت التابع

$$m x'' = -cx + Q_0 \sin pt$$

$$x'' = \frac{-c}{m} x + \frac{Q_0}{m} \sin pt$$

غير متجانسة طرف ثاني $\left[x'' + k^2 x = h \sin pt \right]$

$$; \quad k^2 = \frac{c}{m} ,\ h = \frac{Q_0}{m}$$

/ /

$$x_1 = A\sin pt$$

بالاشتقاق والتعويض نجد أن

$$A(k^2 - p^2)\sin pt = h\sin pt$$

بفرض أن $; p \neq k$

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

$$x = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt$$

الحل العام:

$$x_2 = a\sin(kt + \alpha)$$

$$x = x_1 + x_2$$

الحل العام مع الخاص معا

هذه المعادلة تبين أن اهتزازات الحركة العادية تتكون من التالي:

① اهتزازات توافقية سعتها a وطور البدء α يتعلقان بشروط البدء.

② اهتزازات سعتها $\frac{h}{k^2}$, $\frac{h}{k^2 - p^2}$ لا تتعلق بشروط البدء وتسمى الاهتزازات القسرية.

الرنين...

تتشكل هذه الظاهرة عندما يتساوى نبض الاهتزازات القسرية ونبض الاهتزازات التوافقية وهو يحصل عندما $p = k$

إعداد: وضاء شيخ سالم

أحببْ عملكَ حتى تتميز به

صنع الحضارة

دكتور المادة: خليل يحيى

ميكانيك

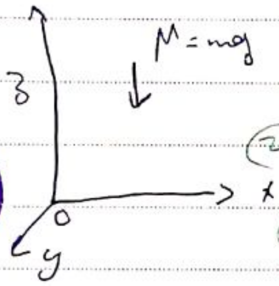
/ /

المحاضرة السادسة:

حركة نقطة مادية في حقل الثقالة الأرضية:

حركة نقطة في الفراغ

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك في حقل الثقالة الأرضية المنتظم، ولنوجد معادلات الحركة للنقطة وذلك بأخذ محاور احداثية ديكارتية في OZ شاقولي صاعد



(1) $mx''=0 \qquad my''=0 \qquad mz''=-mg$

(2) $x'=c_1, \qquad y'=c_2 \qquad z'=-gt+c_3$ بتكامل المعادلات

(3) $x=c_1t+c_4 \qquad y=c_2t+c_5 \qquad z=\frac{1}{2}gt^2+c_3t+c_6$

حيث $c_1, c_2, c_3, \dots c_6$ ثوابت التكامل

حركة نقطة مادية متجهة نحو الأعلى:

لتكن M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في لحظة البدء في مبدأ الأحداثيات

$$T=0 \begin{cases} x=y=z=0 \\ x'=y'=0 \qquad z'=V_0 \end{cases}$$

بتعويض هذه القيم بالمعادلات (1) و(2) نجد أن

$c_1=c_2=c_4=c_5=c_6=0$

$c_3=V_0$

بتعويض هذه القيم بالمعادلة z

(4) $x=0 \qquad y=0 \qquad z=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t$

وهي معادلة متحركة في حال كانت النقطة نحو الأعلى

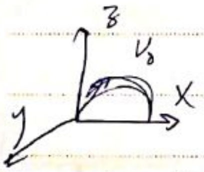
$z'=0 \Rightarrow V_0-gt$

في هذه المعادلات يتضح لنا أن النقطة تتحرك حركة مستقيمة ~~...~~ وتتناقص سرعتها بشكل منتظم حتى تصبح السرعة مساوية إلى الصفر

وبعد ذلك تعود النقطة المادية نحو الأرض

استنتاج معادلة المسار

لنفرض أن النقطة المادية M في لحظة البدء $t=0$ كانت في مبدأ الأحداثيات وأن سرعتها الابتدائية تصنع زاوية $\alpha>0$ مع محور OX



حسب شروط البدء:

$$t=0 \begin{cases} x=y=z=0 \\ x'=V_0\cos\alpha \\ y'=0 \\ z'=V_0\sin\alpha \end{cases}$$

/ /

بالعودة إلى المعادلات x_2 و z_2

$C_1 = V_0 \cos\alpha \qquad C_2 = 0 = C_4 = C_5 = C_6$

$C_3 = V_0 \sin\alpha$

وبالتالي نحصل على المعادلات (3

$x = V_0 t \cos\alpha$

$y = 0 \quad , \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin\alpha \quad 5)$

نلاحظ في هذه الحالة أن مسار النقطة المادية عبارة عن منحني واقع في المستوي oxz لإيجاد معادلة المسار من المعادلة الأولى من (5

نعوض المعادلة الأخيرة في المعادلات (5

$$\boxed{t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}}$$

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha}\right) + \left(\frac{V_0 x \sin\alpha}{V_0 \cos\alpha}\right)$$

$$\boxed{z = x\tan\alpha - \frac{g x^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}} \quad (6)$$

وهي معادلة المسار وهي معادلة قطع مكافئ محوره موازي لـ oz

المدى: $z = 0$

$$x\left(\tan\alpha - \frac{g x}{2V_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$$

$x_1 = 0$ لأنه حيز المبدأ

مستو رمايتي

$$\tan\alpha = \frac{g x}{2V_0^2 \cos^2\alpha} \Rightarrow x_2 = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (7)$$

المدى الأعظمي: $\alpha = 45^\circ$

الذروة:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \tan\alpha - \frac{g x}{V_0^2 \cos^2\alpha}$$

فاصلة الذروة $\leftarrow x^* = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$

نعوض x^* في (6

$$z = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\tan\alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}\left(\frac{V_0^2 \sin\alpha}{2g}\right)^2$$

بعد الإصلاح نجد أنه

$$z^* = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad (8)$$

الذروة

ALADIB

أصنع الحضارة

Scanned by CamScanner

/ /

منحني الأمان :

وجدنا أنه عند إعطاء النقطة المادية سرعة ابتدائية معينة فإن مسارها يكون عبارة عن قطوع مكافئة موجودة في المستوي zOx وذلك عند مختلف قيم الزاوية α

وبالتالي فإن أقصى مدى تصله النقطة المادية (القذيفة)

$X_{max} = \frac{V_0^2}{g}$ الارتفاع $\rightarrow Z_{max} = \frac{V_0^2}{2g}$

وبالتالي فإن القطع المكافئ الذي يحوي جميع هذه القطوع يدعى مغلف القطوع

المغلف إذاً يحدد منطقة من المستوي zOx حيث يمكن للنقطة أن تصل إلى أي نقطة فيها.

وذلك ضمن شروط بدء معينة

وبالتالي لإيجاد معادلة المغلف ونفرض أن لدينا زمرة من المنحنيات

$Z = f(\alpha, x)$ حيث α الوسيط في المعادلتين $z = f(\alpha, x)$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = f'(\alpha, x) = 0$$

من أجل التبسيط نعتبر الوسيط P والمعادلة هو

$P = tg\,\alpha$ عندئذ:

$$z = xP - \frac{g x^2}{2V_0^2}(1+P^2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha = 1 + P^2$$

نشتق

(1) إلى المعادلة (9) المعادلة

$$\frac{\partial z}{\partial P} = x - \frac{P g x^2}{V_0^2} = 0$$

ومنه نجد:

$$P = \frac{V_0^2}{g x}$$

نعوض في (9)

$$z = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}x^2$$

معادلة مغلف القطوع

الدالة $2P$

لتكن M نقطة مادية تتحرك تحت تأثير وسط مقاوم وتتوجه مقاومة من الشكل

$R = -mKV$

أوجد معادلة الحركة

حيث K ثابت التناسب موجب.

مرجوة

إعداد: وفاء شيخ سالم

ALADIB

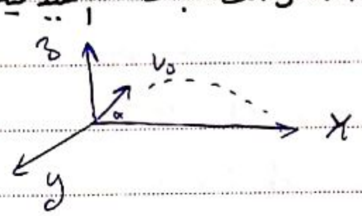
صنو الحضارة

ميكانيك

دكتور المادة :
خليل بجيرا / /

المحاضرة السابعة

مثال: ادرس حركة نقطة مادية M تخضع لمقاومة الوسط ما والتي تشكل $R = -mkV$
حيث k ثابت يتعلق بطبيعة الوسط وحيث النقطة M تحركت بسرعة ابتدائية V_0 بزاوية α مع المحور ox.



حسب القانون الأساسي في التحريك :

$$m x'' = -mk x' \quad \text{--- (1)}$$

$$m z'' = -mg - mk z' \quad \text{--- (2)}$$

من المعادلة الأولى:

$$x'' = -k x'$$

$$\frac{dx'}{dt} = -k x' \Rightarrow \frac{dx'}{x'} = -k\,dt$$

$$\ln x' = -kt + C_1$$

من شروط البدء:

$$t=0 \quad \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = V_0 \cos\alpha \quad , \quad z' = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$C_1 = \ln(V_0 \cos\alpha)$$

$$\ln x' = -kt + \ln(x_0 \cos\alpha)$$

$$\ln \frac{x'}{V_0 \cos\alpha} = -kt \Rightarrow \frac{x'}{V_0 \cos\alpha} = e^{-kt} \Rightarrow$$

$$x' = e^{-kt} \cdot V_0 \cos\alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-kt} V_0 \cos\alpha$$

$$dx = e^{-kt} \cdot V_0 \cos\alpha \, dt$$

$$x = \frac{-1}{k} e^{-kt} \cdot V_0 \cos\alpha + C_2$$

من شروط البدء:

$$C_2 = \frac{V_0}{k} \cdot \cos\alpha \Rightarrow x = \frac{1}{k} e^{-kt} \cdot V_0 \cos\alpha + \frac{V_0}{k} \cos\alpha$$

من المعادلة الثانية:

$$z'' = -(g + kz')$$

$$\frac{dz}{dt} = -(g + kz')$$

/ /

$$\frac{dz'}{g+kz'} = -dt$$

بتكامل:

$$\ln(g+kz') = -kt + C_3$$

من شروط البدء لدينا

$$C_3 = \ln(g+kv_0\sin\alpha)$$

$$\ln(g+kz') = -kt + \ln(g+kv_0\sin\alpha)$$

$$\ln\frac{g+kz'}{g+kv_0\sin\alpha} = -kt \Rightarrow \frac{g+kz'}{g+kv_0\sin\alpha} = e^{-kt} \Rightarrow$$

$$g+kz' = e^{-kt}(g+kv_0\sin\alpha)$$

$$z' = \frac{1}{k}e^{-kt}(g+kv_0\sin\alpha) - \frac{g}{k}$$

$$\frac{dz}{dt} = \dots$$

$$z = -\frac{1}{k^2}e^{-kt}(g+kv_0\sin\alpha) - \frac{g}{k}t + C_4$$

حسب شروط البدء:

$$C_4 = \frac{1}{k^4}(g+kv_0\sin\alpha)$$

$$z = \frac{-1}{k^2}e^{-kt}(g+kv_0\sin\alpha) - \frac{g}{k}t + \frac{1}{k^4}(g+kv_0\sin\alpha)$$

الحركة المقيدة لنقطة مادية.

إذا لم تستطع النقطة المادية أن تتحرك بشكل اختياري (حر) لأن تكون مجبرة على الحركة على سطح أو على سلك فإن مثل هذه النقطة تدعى نقطة مقيدة.

من الشروط المفروضة على حركة النقطة المادية ندعوها بالارتباطات.

وعند دراسة حركة النقطة المادية المقيدة ننطلق من مبدأ تحرير الارتباطات.

لكن نستطيع أن يمكن معالجة حركة النقطة المادية المقيدة للأنظمة الميكانيكية بشرط أن تكون الارتباطات هي عبارة عن ردود الأفعال كما هو الحال في أبحاث التوازن.

المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية ملازمة لمنحني في الأحداثيات الديكارتية.

تتحرك على منحني في الأحداثيات الديكارتية.
نفرض أن المنحني يتغير مع مرور الزمن وأن هذا المنحني يعرف ~~...~~ بتقاطع السطحين.

$$f_1(x,y,z,t)=0, \quad f_2(x,y,z,t)=0$$

$$m\frac{d^2 r}{dt^2}=\vec{F}+\vec{N}$$

حيث: $\vec{F}$ القوة الخارجية
$\vec{N}$ رد الأفعال

وبالتالي يمكن اعتبار ردة الفعل ~~...~~ كرد الفعل N_1, N_2 على f_1, f_2

$$N=N_1+N_2$$

وبالتالي N_1, N_2 يقعان في المستوي الناظمي للمنحني المفروض من والمستوي الناظمي هو المستوي العمودي على المماس
وبالتالي كما نعلم ~~...~~ أي الناظم على السطح f_1, f_2 يتوافق مع شعاع تدرجه. وبالتالي حسب التطابق يكون لدينا.

$$N_1=\lambda_1 \operatorname{grad} f_1$$

$$N_2=\lambda_2 \operatorname{grad} f_2$$

λ_1, λ_2 ثوابت يجب تحديدها.
وبالتالي

$$m\frac{d^2 r}{dt^2}=F+\lambda_1 \operatorname{grad} f_1+\lambda_2 \operatorname{grad} f_2$$

$$\lambda_1=\frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}, \quad \lambda_2=\frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}$$

$$|\text{grad } f_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \Delta f_1$$

الوسيط التفاضلي

$$|\text{grad } f_2| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} = \Delta f_2$$

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$f_2(x,y,z,t) = 0 \qquad , \qquad f_1(x,y,z,t) = 0$$

مسألة: تخضع نقطة مادية M لقوة أو بالشكل

$$\vec{F} = m a \underbrace{\vec{T}}_{\text{شعاع واحدة المماس}} + m f K^2 \underbrace{\vec{N}}_{\text{شعاع واحدة الناظم}}$$

-2 اكتب معادلة الحركة.

AB قضيب طوله 2l مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء بحيث ينزلق طرفه A بدون احتكاك على مستوي أفقي oxy و طرفه B ينزلق على المحور الشاقولي oz بدون احتكاك

M نقطة مادية كتلتها m موضوعة في منتصف القضيب أكتب معادلة الطاقة الحركية لـ M .

اعداد : رهف شيخ سالم "::"

نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄المحاضرة: الثامنة   عنوان المحاضرة : نظرية الطاقة الحركية

المعادلات الذاتية لحركة نقطة مادية

لنأخذ هنا النُّقطة الماديَّة تتحرك على منحني لا يتغير مع مرور الزمن.

في هذه الحالة، نأخذ جملة الإحداثيَّات الذاتيَّة للمنحني المرتبطة بالنُّقطة ذاتها، وتُعَرَّف هذه الجملة على الشَّكل التَّالي:

المماس المتَّجِه حسب الاتجاه الموجب للحركة، ونُرَمِّز لشعاع الواحدة على المماس بـ τ.

النَّاظم الأساسي المتَّجه حسب تَقَعُّر المماسات، ونُرَمِّز لشعاع الواحدة على النَّاظم بـ n.

ثنائي النّاظم الذي يتّجه إلى خارج جهة تقعّر المنحني، ونُرَمِّز لشعاع الواحدة على ثنائي النَّاظم بـ b.

لتكن M نقطة ماديّة تتحرك على هذا المنحني، وبالتَّالي، وحسب قانون التَّحريك الأساسي: $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

ومجموعة القوى هيَ عبارة عن القوَّة $\vec{F}$، و ردُّ الفعل $\vec{N}$: $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{N}$.

وبالتّالي شعاع السُّرعة يكون محمولاً على المماس: $\vec{v} = v.\vec{\tau}$

شعاع السُّرعة هو محمول على المماس، ومشتق السُّرعَة هو التَسارع، ومنه:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}} \dots\dots\dots *$$

>> هَدَفُنا هوَ التَّعَرّف على مُرَكّبات التَّسارع في الإحداثيَّات الذاتيَّة، لأنها بالإحداثيَّات الدِّيكارتيَّة معروفة<<

نعلَم أنَّ:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

حيثُ: $d\theta$ هيَ تغيُّر زاوية المماس خلال الفترة الزَّمنيَّة dt.

ds هيَ تغيُّر قوس المسار خلال الفترة الزَّمنيَّة dt.

وكما نعلَمُ أيضاً:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

حيثُ: ρ هو نصف قطر تقوُّس المنحني.

ونلاحظُ أنَّ مشتقّ المسار بالنِّسبة للزمن هو السرعة: $\frac{ds}{dt} = \vec{v}$.

ومشتقُّ السُّرعة بالنِّسبة للزمن هو التَّسارع:

$$\frac{dv}{dt} = \vec{\Gamma} \quad , \quad \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}$$

ومنهُ، وبعد التَّعويض بـ $*$ نجد: (للتسارع مركبتين على $\vec{\tau},\vec{n}$ ومركبته على $\vec{b}$ معدومة)

$$\vec{\Gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

نُعوّض هذهِ العلاقة بقانون التَّحريك الأساسيّ:

$$m\,\vec{\Gamma} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + m\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

بالإسقاطِ نجد:

$$\boxed{m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = F_\tau} \ldots\ldots\ldots (1)$$

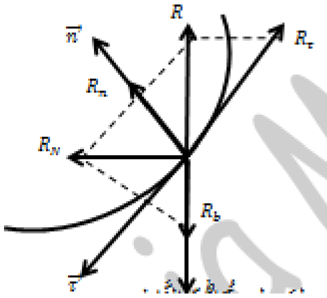
$$\boxed{m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n} \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\boxed{0 = F_b + N_b} \ldots\ldots\ldots (3)$$

وهيَ المعادلات الذّاتيّة لحركة نقطة على منحني، نستعين بها في المسائل لتَعْيين رُدُود الأفعال.

نظرية الطَّاقة الحركيَّة للنُّقطة المُقَيَّدة

حركة نقطة مادية بوجود احتكاك



عند حركة نُقطةٍ على منحى ثابت، فإنَّ ردَّ الفعل لن يكونَ ناظِمِيَّاً على المنحني بشكلٍ عام، أي أنَّ ردّ الفعل يَصْنَعُ زاوِيَةً
1) يكون لِرَدِّ الفعل مُرَكِّبَة مَمَاسِيَّة نرمز لها بـ R_τ.

مُرَكِّبَة ناظِمِيَّة نرمز لها بـ R_N موجودة في المستوي النّاظمي.
1) مع المستوي النَّاظمي تُسمَّى بزاويةِ الاحتِكَاك، وبالتَّالي:

ويمكن تفريق المُرَكِّبَة النَّاظِمِيَّة R_N كالتَّالي: $R_N = R_n + R_b$

حيث: R_n محمولة على النَّاظِم الأساسي. R_b محمولة على ثُنائيّ النَّاظم.

وبالتَّالي، إذا أخذنا المعادلَة العامَّة في التَّحريك $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$ وأسقطْنا على الثُّلاثيَّة الذَّاتيَّة نحصل على المعادلة التَّالِيَّة:

$$(I) \dots \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_\tau + R_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + R_n \\ 0 = F_b + R_b \end{cases}$$

وبالتَّالي فإنَّ R_τ تُعاكِسُ اتِّجاه الحركة، وبالتَّالي قيمَتُها $R_\tau = f|R_N|$ حيث f هو عامل الاحتكاك، و بالتالي نستطيع أن نكتب المعادلة الأولى على الشكل التالي:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau - f|R_n|$$

ومنه بما أنَّ $R_N = R_n + R_b$ **فإنَّ** $|R_N| = \sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

وكذلك من المعادلة الثَّالثة من (I) : $R_b^2 = F_b^2 \overset{\text{بالتَّربيع}}{\Longleftarrow} R_b = -F_b$

ومنه فإنَّ : $$|R_N| = \sqrt{\left(m\frac{v^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2}$$

نُعَوِّض في المعادلة الأولى من (I) :

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau-f\sqrt{\left(m\frac{v^2}{\rho}-F_n\right)^2+F_b^2}$$

حيث: أخذنا $-R_\tau$ لأنَّها تعاكس اتِّجاه الحركة.

ومنهُ :

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=F_\tau-f\sqrt{\left(m\dfrac{v^2}{\rho}-F_n\right)^2+F_b^2} \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n+R_n \\ 0=F_b+R_b \end{cases}$$

و بالتالي المعادلة مع المعادلتين السابقتين نحصل على معادلات الحركة لنقطة مادية على منحنٍ ثابت بوجود احتكاك.

نظرية الطَّاقة الحركيّة للنقطة المُقيّدة

يمكن دراسة هذه الحالة (أي حركة النُّقطة الماديَّة المقيَّدة) كحركة نقطة ماديَّة طليقة، فيما إذا اعتبرنا أنَّ هنالكَ قوى أُخرى غير القوى الخارجيّة المُطبَّقة على هذه النُّقطة، وحسْب الدِّراسات السَّابقة، ونظريَّة الطَّاقة الحَرَكِيَّة يكون لدينا:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F.dr+\lambda_1\, grad\, f_1.dr+\lambda_2\, grad\, f_2.dr$$

و نعلم أن:

$$grad\, f_1\, dr=\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz$$

$$grad\, f_2\, dr=\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz$$

فإنَّ معادلة الارتباط $f(x,y,z,t)=0$ تُحَقِّق هذه العلاقَة:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz}_{grad\,f}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0$$

و بالتالي:

$$grad\ f_1\ dr=-\frac{\partial f_1}{\partial x}dt$$

$$grad\ f_2\ dr=-\frac{\partial f_2}{\partial x}dt$$

و بالتالي:

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F.dr-\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t}-\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t}}$$

وهيَ معادلة نظريَّة الطَّاقة الحركيَّة لنقطة مقيَّدة على منحني.

أمّا إذا كانَ الارتباط لا يتعلَّق بالزَّمن بشكلٍ مباشر فإنَّ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}=0\quad,\quad\frac{\partial f_2}{\partial t}=0$$

فتصبحُ العلاقة على الشَّكل التَّالي:

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F.dr}$$

وهيَ معادلة نظريَّة الطاقة الحركيَّة لنقطة طليقة.

وبالتالي:

إذا كانَ الارتباط مثاليَّاً ولا يتعلَّق بالزَّمن بشكل مُباشر، فإنَّ نظريّة الطَّاقة الحركيَّة تبقى مُحافِظةً على شكلِها الذي تفقدهُ من أجْلِ النقطةِ الماديَّةِ الطَّليقة.

حل المسألة الأولى من المحاضرة السابقة:

من قانون التَّحريك الأساسي: $m\vec{\Gamma}=\vec{F}$

نُسقِط على المَحاور الإحداثيَّة الذَّاتيَّة:

المعادلة الأولىْ من المعادلات الذّاتيَّة هي: $F_\tau = m\dfrac{dv}{dt}$

$$\Longrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = m.a$$

نُقسِّمُ على m فنجد: $\boxed{\dfrac{dv}{dt} = a} \ldots\ldots\ldots (1)$

المعادلة الثَّانية من المعادلات الذَّاتيَّة هيَ: $F_n = m\dfrac{v^2}{\rho}$

$$\Longrightarrow \quad m\frac{v^2}{\rho} = m\rho k^2$$

نُقَسِّمُ على m فنجد:

$$\frac{v^2}{\rho} = \rho k^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{v^2 = \rho^2 k^2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

نُكامل كلّاً من (1) و (2) بالنسبة لـ t.

نُكَامِلُ (1) فنجد: $\boxed{v = at + c_1}$

ولتعيين c_1 من شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad v = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0$$

ومنه: $\boxed{v = at} \ldots\ldots\ldots *$

نأخذ (2) فنجد أنَّها: $v^2 = \rho^2 k^2$

$$\Longrightarrow \quad v = \pm \rho k \quad \Longrightarrow \quad v = +\rho k$$

نلاحظُ هنا أنَّنا أخذنا الإشارة الموجِبة لأنَّ السُّرعة عادةً موجِبة.

ولدينا السُّرعة بالإحداثيَّات الذَّاتِيَّة هي:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \rho k$$

ولدينا أيضاً:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds} \quad \Longrightarrow \quad \rho=\frac{ds}{d\theta}$$

وبالتَّالي:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\theta}\,k$$

وباختصارِ ds نَحصُل على: $d\theta = k.dt$

وبالمُكَامَلَة نجد: $\theta = kt + c_2$

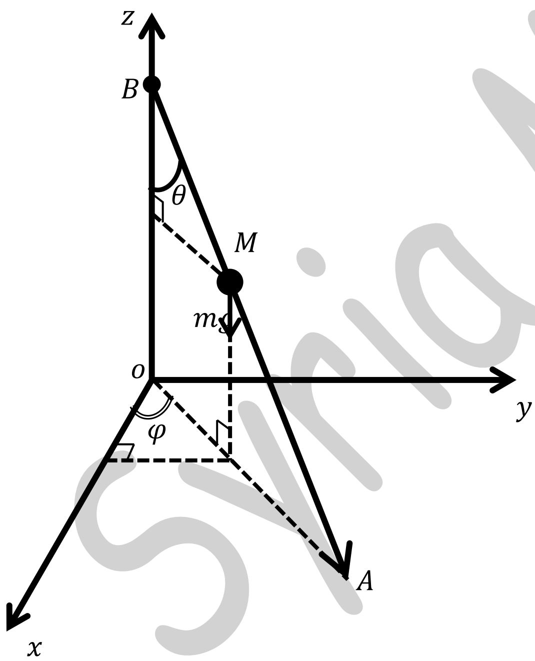
ولتعيين c_2 من شروط البدء:

$$t=0 \quad , \quad \theta=0 \quad \Longrightarrow \quad c_2=0$$

وبالتَّالي : $\boxed{\theta = kt}$ ... ... **

$$\Rightarrow v=\frac{a}{k}\theta$$

حل المسألة الثانية من المحاضرة السابقة:



(الطَّاقة الحركيَّة) $\boxed{T=\frac{1}{2}mv^2}$ ... ... *

$$x = l.sin(\theta).cos(\varphi)$$
$$y = l.sin(\theta).sin(\varphi)$$
$$z = l\,cos\,\theta$$

نشتَقُّ كُلّاً من x, y, z بالنِّسبةِ للزَّمن:

$$x' = l.cos(\theta).cos(\varphi).\theta' - l.sin(\theta).sin(\varphi).\varphi'$$
$$y' = l.cos(\theta).sin(\varphi).\theta' + l.sin(\theta)\,cos(\varphi).\varphi'$$
$$z' = -l.sin(\theta).\theta'$$

$$v^2 = \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) \qquad \Longrightarrow$$

$$v^2 = (l.cos(\theta).cos(\varphi).\theta' - l.sin(\theta).sin(\varphi).\varphi')^2 + (l.cos(\theta).sin(\varphi).\theta' + l.sin(\theta)cos(\varphi).\varphi')^2 + (-l.sin(\theta).\theta')^2$$

بعد فكِّ التَّربيع وإخرَاج المُتطابِقات نجد:

$$v^2 = l^2.cos^2(\theta).cos^2(\varphi).\theta'^2 + l^2.sin^2(\theta).sin^2(\varphi).\varphi'^2 - 2.l.cos(\theta).cos(\varphi).\theta'.l.sin(\theta).sin(\varphi).\varphi' + l^2.cos^2(\theta).sin^2(\varphi).\theta'^2 + l^2.sin^2(\theta)cos^2(\varphi).\varphi'^2 + 2.l.cos(\theta).sin(\varphi).\theta'.l.sin(\theta)cos(\varphi).\varphi' + l^2.sin^2(\theta).\theta'^2$$

بالاختِصار نجد:

$$\boxed{v^2 = l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.sin^2(\theta)}$$

نُعَوِّض v^2 في * فنحصُلُ على مُعادَلَة الطَّاقة الحَرَكِيَّة.

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\left(l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.sin\,\theta\right)}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: عبير خزنة كاتبي،ولاء المبخر،وفاء شيخ سالم