المحاضرة الأولى

/ /

- تعريف التبولوجيا : كلمة تعني دراسة علم المكان أو الفراغ
- تعميم لمفهوم المسافة في الفراغ
- خواص المسافة :

1) المسافة بين نقطتين في الفراغ غير سالبة.

2) إذا كانت المسافة بين نقطتين لا تساوي الصفر فالنقطتين مختلفتين وبالعكس إذ كانت النقطتان مختلفتين فالمسافة بينهما لا تساوي الصفر.

3) المسافة بين A و B تساوي المسافة بين B و A

4) متراجحة المثلث : طول ضلع المثلث AB أصغر أو يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين

★★ تعريف الفضاء المتري :

ليكن X مجموعة غير خالية. نعرف التابع :

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

عندئذٍ نقول عن d أنه تابع مسافة على X إذا حقق الشروط الأربعة التالية :

1) $d(x,y) \geq 0$ (المسافة غير سالبة)

2) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ أو

$(d(x,y) \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq y)$

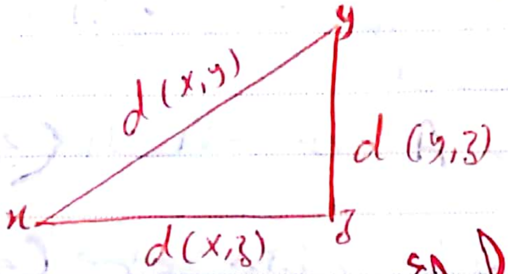
3) $d(y,x) = d(x,y)$ (الخاصة التناظرية للمسافة)

(4

$$\forall\, x, y, z \in X$$

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$

* فإذا التابع d حقق الشروط الأربعة نقول أنه مسافة على X ونقول أن (X,d) فضاء متري.



" الفضاء المتري الجزئي "

- إذا كان (X,d) فضاء متريا وكانت $\emptyset \neq Y \subseteq X$ فعندئذ تكون:

$$d_Y : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

نلاحظ أن التابع d_Y مقصور d على $Y \times Y$

أي $d_Y(x,y) = d(x,y)$
$(x,y) \in Y \times Y$

إذاً d_Y مسافة وضوحاً لأن d مسافة

ويكون (Y, d_Y) فضاء متري جديد يدعى الفضاء المتري الجزئي.

مثال: لنأخذ الفضاء الحقيقي المألوف حيث $d(x,y) = |x-y|$ لكل عددين حقيقيين x, y عندئذ (N, d) فضاء متري جزئي من الفضاء (R, d).

/ /

"المقصور بشكل عام"

إذا كان لدينا تابع

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

بحيث $f(x) = x^2$

وأردنا مقصور التابع f على Q نكتب :

$$f_Q(x) = f(x) = x^2$$

بحيث $x \in Q$

"خديجة الرفاعي , رش القرصة"

الدكتور: أحمد هابيل

الواجب (1)

27 / 2 / 2019

المحاضرة: الثانية

عنوان المحاضرة: حل لبعض الأمثلة على الفضاءات المترية

التمرين الأول:

- هل التوابع التالية مسافات على $X = \mathbb{R}$ ؟

$\boxed{1}$ $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

الحل: ليست مسافة لأن الشرط الثاني: $(d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$ غير محقق.

ولنأخذ نقطتين مختلفتين ولتكن $x = -1 \ , \ y = 1$

$$d(-1,1) = |(-1)^2 - 1| = 0$$

نقطتان مختلفتان والمسافة بينهما تساوي الصفر فالشرط الثاني غير محقق

تذكرة: الشرط الثاني: $\left\{ \begin{array}{l} d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y \end{array} \right.$

$\boxed{2}$ $d(x,y) = |x^3 - y^3|$

الحل: $\boxed{1}$ الشرط الأول محقق غير سالب

$\boxed{2}$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x^3 - y^3| = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$$

$\boxed{3}$ $d(x,y) = |x^3 - y^3|$

$$= |-(y^3 - x^3)| = d(y,x)$$

/ /

$$d(x,y) = |x^3 - y^3| = |x^3 - z^3 + z^3 - y^3| \quad \boxed{4}$$

$$|x^3 - z^3 + z^3 - y^3| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3|$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$\boxed{3}$ $d(x,y) = e^{x-y}$

الحل : ليست مسافة لأن الشرط الثاني غير محقق .

$$d(x,x) = e^{x-x} = e^{0} = 1 \neq 0$$

$\boxed{4}$ $d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$

ليست مسافة، لأن d غير معرف على $X \times X$

مثال $d(0,1) = \left| \frac{1}{0} - 1 \right|$

غير معرف

$\boxed{5}$ $d(x,y) = |x - 3y|$

ليست مسافة لأن الشرط الثاني غير محقق .

نأخذ نقطتان متشابهتان $x = y = 1$

$$d(x,y) = d(1,1) = |1-3| = |-2| = 2 \neq 0$$

أو

$$x = 1, \ y = \frac{1}{3}, \ \Rightarrow d(x,y) = \left| 1 - 3 \times \frac{1}{3} \right| =$$

$$|1-1| = 0$$

فالشرط الثاني بكلا الحالتين غير محقق .

التمرين الثاني :

$\boxed{1}$

$d(x,y) = |x-y|$ $\quad X = \mathbb{R}$

برهن أن (X,d) فضاء متري .

الحل :

1) $d(x,y) \geqslant 0$ غير سالب

2) $d(x,y) = |x-y| = 0$

$\Leftrightarrow x-y=0$

$\Leftrightarrow x=y$

3) $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| =$

$|y-x| = d(y,x)$

4) $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y|$

$\leqslant |x-z| + |z-y|$

$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

إذا d مسافة على $\mathbb{R}$ و (X,d) فضاء متري
ندعوه الفضاء الحقيقي المألوف في $\mathbb{R}$

* إذا لم تذكر المسافة فإن المقصود هو هذه المسافة $|x-y| = d(x,y)$
و أحيانا يرمز لها بـ $d = |\cdot|$

تذكرة : بعض خواص القيمة المطلقة :

1) $x \leqslant |x|$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $x \cdot y \leqslant |x| \cdot |y|$

4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

6) $|x|^2 = x^2$

7) $|x| \geqslant 0$

$\boxed{2}$

• ليكن $X = \mathbb{R}^2$ وليكن لدينا التابع d

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \quad ; \forall\, x=(x_1,x_2) , y=(y_1,y_2) \; ; \; x,y \in \mathbb{R}^2$$

أثبت أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$.

• الإثبات :

حتى تكون d دالة مسافة على $\mathbb{R}^2$ يجب تحقق الشروط الأربعة.

$\forall\; x, y, z=(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$

1) $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \geq 0$

2) $d(x,y)=0 \iff \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} = 0$

$$\iff \left|(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right| = 0$$

$$\iff (x_1-y_1)^2 = 0 \;,\; (x_2-y_2)^2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1-y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \\ x_2-y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x =$$

3) $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

$$= \sqrt{(-(y_1-x_1))^2+(-(y_2-x_2))^2}$$

$$= \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$$

$$= d(y,x)$$

Scanned by CamScanner

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

أي يجب أن نثبت أن:

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \leqslant \sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2} + \sqrt{(z_1-y_1)^2+(z_2-y_2)^2}$$ ★★

لنفرض أن:

$a_1 = x_1 - z_1$, $b_1 = z_1 - y_1$ $\Rightarrow a_1+b_1 = x_1-y_1$

$a_2 = x_2 - z_2$ $b_2 = z_2 - y_2$ $\Rightarrow a_2+b_2 = x_2-y_2$

وبالتعويض في ★★

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2 \leqslant a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{b_1^2}+\cancel{2}a_1b_1+\cancel{a_2^2}+\cancel{b_2^2}+\cancel{2}a_2b_2 \leqslant \cancel{a_1^2}+\cancel{a_2^2}+\cancel{b_1^2}+\cancel{b_2^2}+\cancel{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

وبعد الاختصارات نجد:

$$a_1b_1+a_2b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$a_1b_1+a_2b_2 \leqslant |a_1b_1+a_2b_2|$$ تذكر

سنبرهن أنّ :

$$a_1b_1+a_2b_2 \leq |a_1b_1+a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

بالتربيع

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)$$

$$\cancel{a_1^2b_1^2}+\cancel{a_2^2b_2^2}+2a_1b_1a_2b_2 \leq \cancel{a_1^2b_1^2}+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+\cancel{a_2^2b_2^2}$$

$$2a_1b_1a_2b_2 \leq a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2$$

$$0 \leq (a_1b_2)^2-2a_1b_1a_2b_2+(a_2b_1)^2$$

$$0 \leq (a_1b_2-a_2b_1)^2$$ متراجحة صحيحة

إذاً d مسافة و (X,d) فضاء متري يدعى فضاء حقيقي المألوف في $\mathbb{R}^2$

$\boxed{3}$

. ليكن $X=\mathbb{R}^n$ وليكن لدينا التابع d

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

أثبت أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^n$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

الحل

$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ مرة}}$$

Scanned by CamScanner

الحل : لتكن $x=(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $y=(y_1, y_2 \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$

ولنتحقق من شروط المسافة الأربعة.

1) $d(x,y) \geq 0$ غير سالب

2) $$d(x,y)=0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0$$

$$\iff x_i-y_i=0 \quad ; i=1,\ldots,n$$

$$\iff x_i=y_i \quad ; i=1,\ldots,n$$

$$\iff x=y$$

3) $$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(-(x_i-y_i))^2}$$

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=d(y,x)$$

$$d(x,y)=d(y,x)$$

4) $$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

لنفرض أنّ :

$$\left.\begin{array}{l} x_i-z_i=a_i \\ z_i-y_i=b_i \end{array}\right\} \Rightarrow a_i+b_i=x_i-z_i+z_i-y_i$$

$$\Rightarrow a_i+b_i=x_i-y_i$$

Scanned by CamScanner

د. البرهان على متراجحة المثلث (تعويض)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

بتربيع الطرفين :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2+2a_ib_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \cancel{2}\sum a_ib_i + \cancel{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \leq \cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \cancel{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

سنبرهن في حال كون $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0 \,,\, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$

من الواضح أنّ : $\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i - \beta b_i)^2 \geq 0$

مهما كان $\alpha,\beta \in R$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha^2 a_i^2 - 2\alpha a_i\beta b_i + \beta^2 b_i^2)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha^2 a_i^2 - 2\sum \alpha a_i\beta b_i + \sum_{i=1}^{n}\beta^2 b_i^2$$

$$0 \leq \alpha^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\alpha\beta\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \beta^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$2\alpha\beta\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \alpha^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \beta^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

نختار :

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \neq 0 \quad , \alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \neq 0$$

$$2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\cancel{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \cancel{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

إذن المتراجحة الأولى صحيحة .

وبالتالي d مسافة و (X,d) فضاء متري

ونسميه الفضاء الحقيقي المألوف على $\mathbb{R}^n$.

* وإذا ذكرنا الفضاء الحقيقي المألوف في $\mathbb{R}^n$ دون ذكر المسافة فإن المسافة الموصوفة هي d . *

« انتهت المحاضرة »

« خديجة الرفاعي ، رشا القرصة »

"التبولوجيا (1)" الدكتور: أحمد هابيل 6/3/2019

"المحاضرة الثالثة":

- تابع الدكتور في هذه المحاضرة حل بعض الأمثلة عن الفضاءات المترية ومن ثم أعطى بعض المبرهنات التي تثبت العلاقة بين المسافات المترية في $\mathbb{R}^n$.

. لنبدأ معاً:

مثال 1: $X = \mathbb{R}^n$ برهن أن d_1 تابع مسافة على X

حيث $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

البرهان: حتى يكون d_1 تابع مسافة على X يجب تحقق الشروط الأربعة:

- الشرط الأول محقق وهو

1) $d_1(x,y) \geq 0$

2) $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \; ; i = 1,2,\dots,n$

$\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \; ; i = 1,2,\dots,n$

$\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \; ; i = 1,2,\dots,n$

$\Leftrightarrow x_i = y_i \; ; i = 1,2,\dots,n$

$\Leftrightarrow x = y$

3) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |-(y_i - x_i)|$

$= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$

* حسب خواص القيمة المطلقة $|-\alpha| = |\alpha| \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *

$4) \quad \forall x, y, z \in X \qquad ; i \in \{1, 2, \dots, n\}$

متراجحة المثلث $|x_i - y_i| = |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|$

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |z_i - y_i|)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|$$

$$\Rightarrow d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$$

إذاً d_1 مسافة على $\mathbb{R}^n$

و (X, d_1) فضاء متري

مثال (2):

$X = \mathbb{R}^n$ أثبت أن d_∞ مسافة على X

حيث $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

البرهان:

$1) \quad d_\infty(x,y) \geq 0$

$2) \quad d_\infty(x,y) = 0 \iff \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 0$

$\iff |x_i - y_i| = 0 \quad ; i = 1, \dots, n$

$\iff x_i - y_i = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n$

$\iff x_i = y_i \quad ; i = 1, \dots, n$

$\Longleftrightarrow x = y$

3) $d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$

$= \max_{1\le i\le n} |-(y_i - x_i)|$

$= \max_{1\le i\le n} |y_i - x_i|$

$= d_\infty(y,x)$

4) $\forall\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in X$

$d_\infty(x,y) \le d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$ نريد اثبات أن

لاحظ $|x_j - y_j| = |(x_j - z_j) + (z_j - y_j)|$

حيث $(1 \le j \le n)$

$\le |x_j - z_j| + |z_j - y_j|$

لكن

$|x_j - z_j| \le \max_{1\le i\le n} |x_i - z_i| = d_\infty(x,z)$

و

$|z_j - y_j| \le \max_{1\le i\le n} |z_i - y_i| = d_\infty(z,y)$

ومنه

$|x_j - y_j| \le d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\le j\le n} |x_j - y_j| \le d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$$

إذاً d_∞ مسافة في X و (X, d_∞) فضاء متري على X.

ملاحظة:

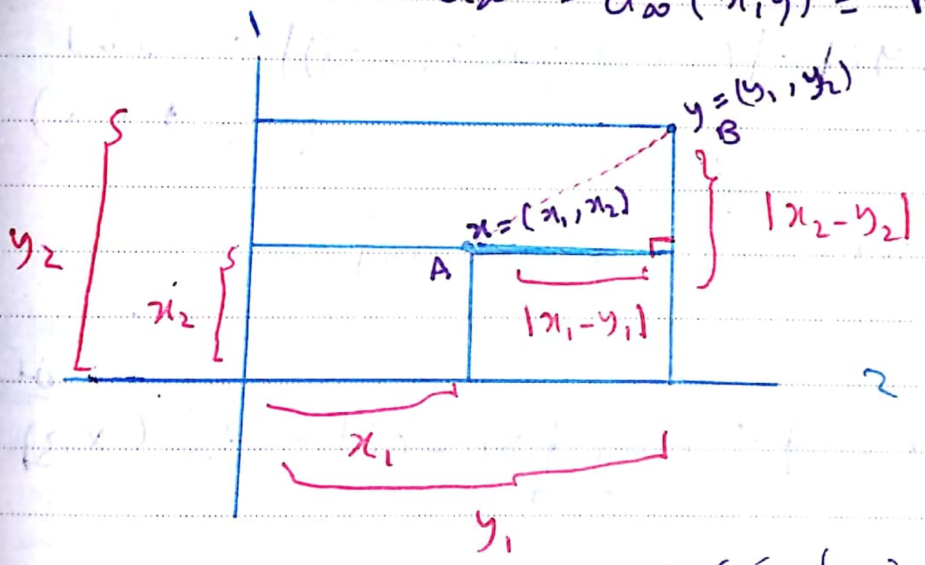
- هناك علاقة بين المسافات الثلاثة على $\mathbb{R}^n$ أي بين d و d_1 و d_∞

حيث:

$$d_1 = d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d = d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_\infty = d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$$



مثال: في حال $n=2$

أي « في المستوى $\mathbb{R}^2$ »

الوتر يكون $d(x,y)$ كما هو موضح في الرسمة

أما $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

/ /

أي أنّ مجموع طولي الضلعين القائمتين $= d_1(x,y)$

وبالتالي نجد أنّ: $d(x,y) \leq d_1(x,y)$

الوتر — مجموع طولي الضلعين القائمتين

أما

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

أي $d_\infty \leq d \leq d_1$

* وبشكل عام نجد أنّ المتراجحة صحيحة من أجل أي قيمة لـ n.

فمن أجل إثبات أنّ: $d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y)$

البرهان يكون بـ: مجرد تربيع الطرفين لأنّ: نعلم أنّ $d \leq d_1$ وذلك لتضح

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|$$

و

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$$

كما أنّ $d_\infty \leq d$

وذلك إذا أخذنا:

وبالتربيع $|x_j - y_j|^2 \leq d^2(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$

$$j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

/ /

بالجذر $\Rightarrow |x_j - y_j| \leq d(x,y)$

$j = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| \leq d(x,y)$$

$$\Rightarrow d_\infty(x,y) \leq d(x,y)$$

مبرهنة: برهن أنّ $d^2 \leq n d_\infty^2$

أي $d_\infty \leq d \leq \sqrt{n}\, d_\infty$

البرهان: نعلم أنّ:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

$1 \leq j \leq n$

$$\Rightarrow d^2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_j - y_j)^2$$

ونعلم أنّ

$$|x_j - y_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = d_\infty(x,y)$$

$$\Rightarrow |x_j - y_j|^2 \leq d_\infty^2(x,y)$$

$j = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\Rightarrow d^2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,y) =$$

$$n \cdot d_\infty^2(x,y)$$

$$\Rightarrow d^2 \leq n d_\infty^2$$

- لتوضيح : $d^2(x,y) \leq d_\infty^2(x,y)$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leq \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|^2$$

في حال $i=1$ نجد أن

$$(x_1-y_1)^2 \leq \max|x_1-y_1|^2$$

$i=2$:

$$(x_2-y_2)^2 \leq \max|x_2-y_2|^2$$

$\vdots$

$i=n$

$$(x_n-y_n)^2 \leq \max|x_n-y_n|^2$$

ومنه نجد

$$d^2(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leq n\, d_\infty^2(x,y)$$

$$d^2 \leq n\, d_\infty^2$$

ومنه $d \leq \sqrt{n}\, d_\infty$

وكنا قد أثبتنا أن $d_\infty \leq d$

وبالتالي نجد أن $d_\infty \leq d \leq \sqrt{n}\, d_\infty$

مبرهنة : برهن أن : $\frac{1}{n} d_1 \leq d \leq d_1$

البرهان : نعلم أن : $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

وكما رأينا سابقاً : $|x_j - y_j| \leq d(x,y)$

$j = 1, 2, \dots, n$

بأخذ قيم لـ j نجد :

$j = 1 \Rightarrow |x_1 - y_1| \leq d(x,y)$

$j = 2 \Rightarrow |x_2 - y_2| \leq d(x,y)$

$\vdots$

$j = n \Rightarrow |x_n - y_n| \leq d(x,y)$

بالجمع :

$$\underbrace{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|}_{d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|} \leq n\, d(x,y)$$

ومنه نجد $d_1(x,y) \leq n\, d(x,y)$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} d_1 \leq d(x,y)$$

وقد أثبتنا في بداية المحاضرة أن $d \leq d_1$ وذلك كان بتربيع الطرفين ، ومنه نجد $\frac{1}{n} d_1 \leq d \leq d_1$

★ تمرين : برهن اذا كانت d مسافة على X فإن $d' = \sqrt{d}$ مسافة على X.

الحل :

1) $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{d(x,y)} \geq 0$

$\Rightarrow d'(x,y) \geq 0$

2) $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d(x,y)} = 0$

$\Leftrightarrow d(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow x = y$

3) $d(x,y) = d(y,x)$

$\sqrt{d(x,y)} = \sqrt{d(y,x)}$

$d'(x,y) = d'(y,x)$

$\forall\, x,y,z \in X$

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ لأن d مسافة فرضاً

$d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)} \leq \sqrt{d(x,z) + d(z,y)}$ ★

$d(x,z) + d(z,y) \leq d(x,z) + d(z,y) + 2\sqrt{d(x,z)} \cdot \sqrt{d(z,y)}$

$$d(x,z)+d(z,y) \leq \left(\sqrt{d(x,z)}+\sqrt{d(z,y)}\right)^2$$

$$** \quad d'(x,z)+d'(z,y) = \sqrt{d(x,z)+d(z,y)} \leq \sqrt{d(x,z)}+\sqrt{d(z,y)}$$

ومن * و ** نجد أن :

$$\sqrt{d(x,y)} \leq \sqrt{d(x,z)}+\sqrt{d(z,y)}$$

$$d'(x,y) \leq d'(x,z)+d'(z,y)$$

" انتهت الحل مرة "

" خديجة الرفاعي و رش القرصلي "

الدكتور: أحمد هابيل التبولوجيا (1) 6/3/2019

المحاضرة الرابعة:

"حل بعض التمارين في الفضاءات المترية"

تمرين 1: أثبت أنه إذا كانت $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ مسافة على المجموعة الغير خالية X فإن $D(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ مسافة على X.

- الإثبات: حتى تكون $D(x,y)$ مسافة على X يجب تحقق الشروط الأربعة: $\forall\, x, y, z \in X$

1) $D(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \geq 0$

إما 1 أو $0 \leq d(x,y)$ "لأن d مسافة فرضاً"

2) $D(x,y) = 0 \Rightarrow \min\{1, d(x,y)\} = 0 \quad , \quad 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \min\{1, d(x,y)\} = d(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

بالاتجاه المعاكس نجد كذلك عندما:

$$x = y \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow \min\{1, 0\} = \min\{1, d(x,y)\} = D(x,y)$$

3) $D(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = D(y,x)$

4) $D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y)$

أي نريد برهان أن :

$\min\{1, d(x,y)\} \leq \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(z,y)\}$

تذكرة : $\forall u,v \in X$

$D(u,v) \leq d(u,v)$

و

$D(u,v) \leq 1$

$D(x,z) = \min\{1, d(x,z)\}$

$D(z,y) = \min\{1, d(z,y)\}$

نميز حالتين : أ) إذا كان $1 \geq d(x,z)$ و $1 \geq d(z,y)$ $\Rightarrow$ $D(x,z) = d(x,z)$ ، $D(z,y) = d(z,y)$

$D(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = D(x,z) + D(z,y)$

$\Longrightarrow D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y)$

ب) إذا كان $d(x,z) > 1$ أو $d(z,y) > 1$

مثلاً في حال $1 < d(x,z)$

$D(x,y) \leq 1 = D(x,z) \leq D(x,z) + D(z,y)$

$\Longrightarrow D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y)$

وحالة $d(z,y)$ بشكل مشابه

إذاً مراجعة ~~صحيحة~~ للمثلث صحيحة دوماً و D مسافة و (X,D) فضاء متري

/ /

تمرين 2) : أثبت أنه إذا كانت $d: X \times X \to \mathbb{R}$ مسافة على مجموعة غير خالية فإن $\rho = \frac{d}{1+d}$ مسافة على X.

الإثبات :
$\forall x, y, z \in X$

1) $\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0$

"لأن d مسافة على X (فرضاً) ف $d(x,y) \geq 0$."

2) $\rho(x,y) = 0 \iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \iff d(x,y) = 0$ ("لأن d مسافة")

$\iff x = y$

3) $\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \rho(y,x)$

متراجحة المثلث : 4) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

أي : يجب أن نثبت أنّ :

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

نعرف التابع :

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \quad , \quad t \in [0,+\infty[$$

وهو تابع متزايد على المجال $[0,+\infty[$. لأنّ :

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

وبما أن d مسافة فإن :

$$t_1 = d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) = t_2$$

$$f(t_1) = f(d(x,y)) \le f(d(x,z)+d(z,y)) = f(t_2)$$

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\star \quad \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\boxed{1} \quad \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = \rho(x,z)$$

$$\boxed{2} \quad \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \le \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \rho(z,y)$$

بجمع المتراجحتين 1) و 2) وبالعودة الى ★ نجد :

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

ومنه فإن ρ مسافة على X و (X,ρ) فضاء متري

التمرين 3) : في $X=\mathbb{R}^2$. لدينا طول نصف الدائرة $= D(x,y)$ ، طول محيط الدائرة التي قطرها $d(x,y)$ ، هل D مسافة على X .

الحل : $\text{المحيط} = 2\pi \frac{d(x,y)}{2} = \pi\, d(x,y)$

نضع $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، $D(x,y) = \frac{\pi}{2} d(x,y)$

إذاً $D = \alpha d \Leftarrow$

D مسافة لأن d مسافة

التمرين 4 : ليكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ، إذا كانت d مسافة على X
فإن S دالة مسافة على X .
حيث $S = \alpha d$

الحل :

1) $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow S(x,y) = \alpha\, d(x,y) \geq 0$

S غير سالب ، α عدد موجب

2) $S(x,y) = 0 \Leftrightarrow \alpha\, d(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $S(x,y) = \alpha\, d(x,y) = \alpha\, d(y,x) = S(y,x)$

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$; متراجحة مثلث
$\forall\, x,y,z \in X$

نضرب طرفي المتراجحة بـ α :

$\alpha\, d(x,y) \leq \alpha\left(d(x,z) + d(z,y)\right)$

$\alpha\, d(x,y) \leq \alpha\, d(x,z) + \alpha\, d(z,y)$

$S(x,y) \leq S(x,z) + S(z,y)$

ومنه فإن متراجحة المثلث محققة
ومنه نجد أن S مسافة ، (X,D) فضاء متري

/ /

التمرين 5): $X=\mathbb{R}$ برهن أنّ: $d(x,y)=\ln(1+|x-y|)$
مسافة على X.

الاثبات:

1) $1+|x-y| \geq 1 \Rightarrow \ln(1+|x-y|) \geq 0$

$\Rightarrow d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \ln(1+|x-y|)=0$

$\Leftrightarrow 1+|x-y|=1 \Rightarrow |x-y|=0$
$\Leftrightarrow x=y$

3) $d(x,y)=\ln(1+|x-y|)=\ln(1+|-(y-x)|)$

$=\ln(1+|y-x|)=d(y,x)$

4) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

لدينا $|x-y|=|x-z+z-y| \leq |x-z|+|z-y|$

$|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$

نضيف (1) للطرفين:

$= 1+|x-y| \leq 1+|x-z|+|z-y|$

نأخذ لغاريتم للطرفين

$d(x,y)=\ln(1+|x-y|) \leq \ln(1+|x-z|+|z-y|)$

حتى يتم المطلوب يجب أن نحقق:

$d(x,y) \leq \ln(1+|x-z|+|z-y|) \leq \ln(1+|x-z|)$
$+\ln(1+|z-y|)$

نفرض أن $x - z = a$

$z - y = b$

لنثبت أن

$$\ln(1+a+b) \leq \ln(1+a) + \ln(1+b)$$

$$\ln(1+a+b) \leq \ln(1+a)(1+b)$$

تذكرة: من خواص اللغارتم ؛ $\ln(1+a) + \ln(1+b) = \ln(1+a)(1+b)$

$$\ln(1+b+a+ab) \geq \ln(1+a+b)$$

متراجحة صحيحة لأن $\ln$ متزايد

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

تمرين 6 : أثبت صحة المتراجحة :

$$|d(x,z) - d(y,t)| \leq d(x,y) + d(z,t) \quad , \forall x,y,z,t \in X$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,t) + d(t,z)$$

$$d(x,z) - d(y,t) \leq d(x,y) + d(t,z) \quad \star$$

$$d(y,t) \leq d(y,x) + d(x,t) \leq d(y,x) + d(x,z) + d(z,t)$$

$$d(y,t) - d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,t)$$

نضرب ب (-) فنقلب اشارة المتراجحة

$$d(x,z) - d(y,t) \geq -d(x,y) - d(z,t) \quad \star$$

/ /

من ★ و ★★ نجد أن:

$$-d(x,y)-d(z,t) \leq d(x,z)-d(y,t) \leq d(x,y)+d(t,z)$$

$$|d(x,z)-d(y,t)| \leq d(x,t)+d(t,z)$$

$$(-B \leq \alpha \leq B \Rightarrow |\alpha| \leq B \quad ★)$$

تمرين 7): $X=\mathbb{N}^2$ أثبت أن

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ 3+\dfrac{x+y}{x\cdot y} & x\neq y \end{cases}$$

دالة مسافة على X.

الحل:

1) $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow 3+\dfrac{x+y}{x\cdot y} \geq 0$

2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ محققة فرضاً

3) $d(x,y)=3+\dfrac{x+y}{x\cdot y}=3+\dfrac{y+x}{y\cdot x}=d(y,x)$

4) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ ، $\forall x,y,z \in X$

نميز الحالات التالية:

1) $x=y$ يكون

$$d(x,y)=0 \leq d(x,z)+d(z,y)$$

2) $x\neq y$ ، $x=z$

$$\left.\begin{array}{l} d(x,y)=3+\dfrac{x+y}{x\cdot y} \\ d(x,z)=0 \\ d(x,y)=\cancel{3}+\dfrac{\cancel{z}+y}{\cancel{z}\cdot y}=3+\dfrac{x+y}{x\cdot y} \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$$

/ /

$3)\quad x \neq y \ ,\ y = z$

$$d(x,y) = 3 + \frac{x+y}{x.y}$$

$$d(z,y) = 0$$

$$d(x,z) = 3 + \frac{x+z}{x.z} = 3 + \frac{x+y}{x.y}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$4)\quad x \neq y \neq z$

$$L_1 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = L_2$$

$$3 + \frac{x+y}{x.y} \leq 3 + \frac{x+z}{x.z} + 3 + \frac{z+y}{z.y}$$

$$L_2 = 6 + \frac{2yx + zy + zx}{xzy} \geq 3 + \frac{zy + zx}{xzy} = 3 + \frac{z(x+y)}{zyx}$$

$$= 3 + \frac{y+x}{y.x} = 3 + \frac{x+y}{x.y} = d(x,y) = L_1$$

ومنه فإن جميع الحالات متراجحة المثلث محققة وبالتالي $d(x,y)$ مسافة على X

(X,d) فضاء متري .

" رشا قرصة وخديجة الرفاعي "

ALRUID.net

التبولوجي (1)

المحاضرة الخامسة:

الدكتور: أحمد هابيل

10 / 3 / 2019

- في هذه المحاضرة سنأخذ المتتاليات في الفضاء المتري وتعريف المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاء المتري وتعريف المتتالية الجزئية.

- المتتاليات في الفضاء المتري:
هي تابع من N^* «منطلقه N^*» في الفضاء X.

$$x: N^* \longrightarrow X$$

ونرمز لها بالرمز $\{x_n\}$ ونرمز لعناصرها: $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \ldots$

- تعريف تقارب متتالية: ليكن (X,d) فضاءً مترياً ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر X نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها متقاربة من العنصر $x \in X$ إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين:

$$1)\ \forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists\, n_0 \in N^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ أي (المتتالية الحقيقية متقاربة من الصفر)

- مبرهنة: إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من عناصر فضاء متري (X,d) فإن لها نهاية واحدة على الأكثر.

البرهان: لنفرض أن للمتتالية $\{x_n\}$ نهايتان بحيث $a, b \in X$

أي

$$\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow a \\ x_n \longrightarrow b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d(x_n, a) \longrightarrow 0 \\ d(x_n, b) \longrightarrow 0 \end{array}$$

وبما أن d مسافة إذاً:

$$d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b)$$

ولأنّ d مسافة فهي تحقق شرط التناظر. ومنه نجد:

$$0 \leq d(a,b) \leq d(x_n,a) + d(x_n,b)$$

إذاً بجعل $n \longrightarrow \infty$ نجد أنّ:

$$0 \leq d(a,b) \leq 0$$

وحسب مبرهنة الاحاطة نجد أنّ:

$$d(a,b) = 0$$
$$\Rightarrow a = b$$

- تعريف المتتالية الجزئية في الفضاء المتري:

إذا كانت $\{X_n\}$ متتالية من عناصر فضاء متري X، وكانت لدينا متتالية متزايدة تماماً من عناصر N^*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\cdots n_k$$

أي أنّ n_k متزايدة تماماً عندئذٍ تسمى $\{X_{n_k}\}$ متتالية جزئية من المتتالية $\{x_n\}$.

* تنويه: نلاحظ أنّ $k \leq n_k$ حيث أنّ $k = 1, 2, 3, \ldots$ ، $n_1 \in N^*$

أي $1 \leq n_1$.

في حال $\boxed{n_1 = 1}$:

$$n_1 < n_2 \Rightarrow n_1 + 1 \leq n_2$$
$$\Rightarrow 1 + 1 \leq n_2$$
$$\Rightarrow 2 \leq n_2$$

•

$$n_2 < n_3 \Rightarrow n_2 + 1 \leq n_3 \Rightarrow 2 + 1 \leq n_3 \Rightarrow 3 \leq n_3$$

وهكذا تكون $\boxed{K \leq n_K}$

مثال: $X = \mathbb{R}$ ، $\{x_n = \frac{1}{n}\}$ فإن المتتالية $\{\frac{1}{n^2}\}$ هي متتالية جزئية من $\{x_n\}$

$n_1 = 1 < n_2 = 2^2 < n_3 = 3^2 < \dots$

$x_{n_1} = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{1}$

$x_{n_2} = \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2^2}$

$x_{n_3} = \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3^2}$,

$\vdots$

$x_{n_K} = \frac{1}{n_K} = \frac{1}{n^2}$

مبرهنة: إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية في فضاء متري و متقاربة من X أي $x_n \longrightarrow x$ فإن أي متتالية جزئية منها $\{x_{nk}\}$ تكون متقاربة من x .

البرهان: بما أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة في الفضاء المتري (X,d) من x ، $(x_n \longrightarrow x)$. حسب تعريف التقارب نجد:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

وكما رأينا سابقاً أن $K \leq n_K$

(ومن الممكن البحث عن قيم لـ n_0 بحيث $K \geq n_0$) ولكن طالما $\{x_{nk}\}$ متتالية جزئية من $\{x_n\}$ $\Leftarrow$ $K \leq n_K$ محقق ومنه أصبح لدينا $n_0 \leq K \leq n_K$ ومن ثم فإن $n_0 \leq n_K$ وبالتالي: $d(x_{n_K}, X) < \varepsilon$

أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n_K \geq n_0 \Rightarrow d(x_{n_K}, x) < \varepsilon$$

وهذا يبين أن $\{x_{n_K}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة من x .

الكرة المفتوحة في فضاء متري:

إذا كان لدينا (X,d) فضاء متري و $a\in X$ ، $r\in\mathbb{R}^+$ أي $r>0$
نعرف الكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها r بأنها مجموعة عناصر X التي تحقق أن بعدها عن a أصغر تماماً من r ونرمز لها بالرمز $N(a,r)$ أي أن:

$$N(a,r)=\{x\in X \,,\, d(x,a)<r\}$$

الكرة المغلقة في الفضاء المتري:

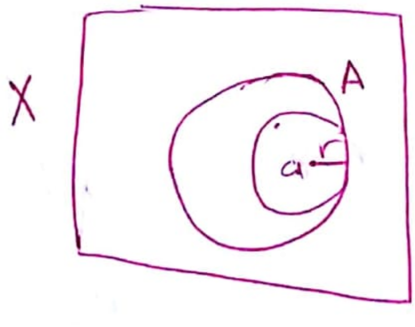
إذا كان لدينا (X,d) فضاء متري من أجل $a\in X$ ، $r>0$ نعرف الكرة المغلقة التي مركزها a ونصف قطرها r بأنها مجموعة عناصر X التي تحقق أن بعدها عن a أصغر أو يساوي r ونرمز لها بالرمز $B(a,r)$ أي أن

$$B(a,r)=\{x\in X \,,\, d(x,a)\leq r\}$$

المجموعة المفتوحة في الفضاء المتري:

ليكن (X,d) فضاء متري و $A\subseteq X$ مجموعة جزئية من X نقول أن المجموعة A مفتوحة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall a\in A : \exists r\in\mathbb{R}^+ ; N(a,r)\subseteq A$$



المجموعة المغلقة في الفضاء المتري :

يقال عن المجموعة F جزئية من الفضاء المتري (X,d) إنها مغلقة إذا كانت متممتها ~~مفتوحة~~ مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري .

$$F^c = X \setminus F$$

<u>أمثلة</u> : (1) أوجد الكرة التي مركزها a ونصف قطرها r حيث $a=0 \in \mathbb{R}$ ، $X=\mathbb{R}$ ، $0<r=1$.

$$N(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$$

$$N(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : |x-0| < 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$$

$$\Rightarrow N(0,1) =]-1,+1[$$

(2) أوجد الكرة التي مركزها $a=1$ ، ونصف قطرها $r=\frac{1}{2}$

$$N(1,\tfrac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < \tfrac{1}{2}\}$$

$$N(1,\tfrac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} : -\tfrac{1}{2} < x-1 < \tfrac{1}{2}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{1}{2} < x < \tfrac{3}{2}\}$$

$$N(1,\tfrac{1}{2}) =]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[$$

* $\boxed{N(a,r) =]a-r, a+r[}$ شكل الكرة المفتوحة في الفضاء المتري .

4

3) في $X = \mathbb{R}^2$ أوجد الكرة التي مركزها $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

ونصف قطرها $r = 1$.

$$N((0,0),1) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-0)^2+(x_2-0)^2} < 1 \}$$

$$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2+x_2^2} < 1 \}$$

4) في $X = \mathbb{R}^3$ أوجد الكرة التي مركزها $a = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$

ونصف قطرها $r = 1$.

$$N((0,0,0),1) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_1-0)^2+(x_2-0)^2+(x_3-0)^2} < 1 \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} < 1 \}$$

- تعريف المجموعة المحدودة في الفضاء المتري:

نقول عن المجموعة $B \subseteq X$ أنها محدودة إذا وجدت كرة مفتوحة تحويها. أي إذا وجد $a \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$

حيث: $B \subseteq N(a,r)$

- تمارين عن الفضاءات المترية :

$\boxed{1}$ لتكن X مجموعة ما غير خالية ، ولنعرف تابع على $X \times X$ بالشكل التالي :

$$\forall x,y \in X \; ; \; d(x,y) = \begin{cases} 1 & : \; x \neq y \\ 0 & : \; x = y \end{cases}$$ ★

أثبت أن d مسافة على X.

الحل :

1) $\forall x,y \in X \; ; \; d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

تعريفاً

لأنه إذا كان $x \neq y \Leftarrow d(x,y) = 1$ حسب « ★ »

ومنه يجب $x = y$

الاتجاه المعاكس : $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$

3) $d(x,y) = d(y,x)$

4) متراجحة المثلث : $d(x,y) \overset{?}{\leq} d(x,z) + d(z,y)$

$\forall x,y,z \in X$

لنميز حالتين : $\boxed{1}$ إذا كان $x = y \Leftarrow d(x,y) = 0$

فالمتراجحة صحيحة

$\boxed{2}$ إذا كان $x \neq y \Leftarrow d(x,y) = 1$

في هذه الحالة إما $x \neq z$ أو $y \neq z$

وبالتالي إما

$d(x,z) = 1$

أو

$d(z,y) = 1$

$d(x,y)=1 \leq 1+$ (عدد غير سالب) دفعة

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$$

إذاً d مسافة على X و (X,d) فضاء متري

$\boxed{2}$ أثبت صحة المتراجحة : $\frac{1}{n}d_1 \leq d_\infty \leq d_1$

الحل : نعلم أنّ :

$$d_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \quad , \quad d_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

ونعلم أنّ ... $\boxed{d_\infty \leq d_1}$ ① وذلك تم إثباتها في المحاضرات السابقة

أنّ $d_\infty \leq d \leq d_1$

والآن لنثبت أنّ : $\frac{1}{n}d_1 \leq d_\infty$

$$|x_i-y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i| = d_\infty(x,y)$$

$i=1 \Rightarrow \quad |x_1-y_1| \leq d_\infty(x,y)$

$i=2 \Rightarrow \quad |x_2-y_2| \leq d_\infty(x,y)$

$i=3 \Rightarrow \quad |x_3-y_3| \leq d_\infty(x,y)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$i=n \Rightarrow \quad |x_n-y_n| \leq d_\infty(x,y)$

نجمع :

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \leq n\, d_\infty(x,y)$$

$$d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y)$$

$\boxed{\frac{1}{n}d_1 \leq d_\infty(x,y)}$ ② من (1 , 2) تحقق المتراجحة! $\frac{1}{n}d_1 \leq d_\infty \leq d_1$

Scanned by CamScanner

التبولوجيا (1)

الدكتور: أحمد الحابيل

المحاضرة السادسة:

- سنتابع في هذه المحاضرة بحل بعض الأمثلة عن المجموعات المفتوحة والمغلقة والمحدودة بالإضافة إلى بعض التعاريف والمبرهنات.

لنبدأ معاً:

مثال (1): ليكن $X=\mathbb{R}$ أثبت أن المجموعة $O=[0,1[$ هي مجموعة غير مفتوحة في المسافة المألوفة $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

الحل: نعلم أن تعريف المجموعة المفتوحة هي:

$$\forall a\in O : \exists r\in\mathbb{R}^+ : N(a,r)\subseteq O$$

أي أنه من أجل $a\in O$ إذا كانت $a\neq 0$ يوجد $0<r$ بحيث $N(a,r)\subseteq O$

أما إذا كانت $a=0$ لا يوجد $0<r$ بحيث $N(0,r)\subseteq O$ ؛ $]-r,r[$

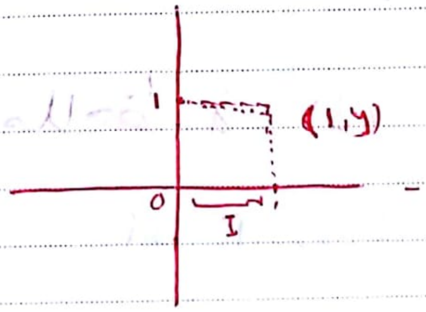
إذاً O غير مفتوحة.

مثال (2) : في المستوى ؛ ليكن $X=\mathbb{R}^2$

هل المجموعة Q غير مفتوحة في $(\mathbb{R}^2, d)$ ؟؟

حيث : $Q = I\times I \setminus \{(1,y) : 0\le y\le 1\}$

$$I=[0,1]$$



الحل : إن المجموعة Q ليست مفتوحة

لأنه :

من أجل أي نقطة $a\in Q$ بحيث

$$a \notin I\times[0] \cup [0]\times I \cup \{(x,1) ; 0\le x\le 1\} = B$$

فيوجد $0<r$ بحيث $N(a,r)\subseteq Q$

لكن إذا كانت :

$$a\in B$$

فلا يمكن إيجاد $0<r$ بحيث $N(a,r)\subseteq Q$

* أمثلة عن المجموعة المغلقة :

(1) إذا كان لدينا المجموعة المفتوحة $C =]2,5[$ فإن متممتها تكون مغلقة أي :

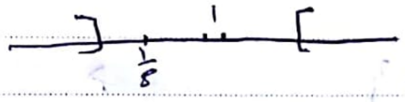
$F_1 =]-\infty, 2] \cup [5,+\infty[$ مغلقة.

(2) : كذلك ليكن لدينا المجموعة المفتوحة $B =]2,5[\cup]-1,1[$ فإن متممتها تكون مجموعة مغلقة أي :

$F_1 = \mathbb{R}\setminus(]2,5[\cup]-1,1[)$ مغلقة،

/ /

* لتكن لدينا المجموعة $B=\{\frac{1}{n} : n\geq 1\}$ ملاحظ أنها محدودة في $(\mathbb{R},|.|)$ وذلك لأنه توجد كرة مفتوحة تحويها هي:



$$B \subseteq]0,2[= N(1,1)$$

نصف المجال

نصف قطره

ملاحظة: (1) في $\mathbb{R}$ رأينا أن $B\subseteq \mathbb{R}$ يقال أن B محدودة إذا وجد $M>0$ بحيث:

$$\forall x\in B: \quad |x| < M$$
$$\Leftrightarrow \; -M < x < M$$
$$\Leftrightarrow \; x \in]-M,M[$$

$$\forall x\in B$$
$$\Leftrightarrow \; B \subseteq]-M,M[= N(0,M)$$

(2) في $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ يقال أن f محدودة إذا وجد $0<M$

$$\forall x\in M: \; |f(x)| < M$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in \mathbb{R}: \quad -M < f(x) < M$$
$$\Leftrightarrow \forall x\in \mathbb{R}: \quad f(x) \in]-M,M[= N(0,M)$$

$$f(\mathbb{R}) \subseteq N(0,M)$$

ملاحظة : يمكن النظر إلى تقارب متتالية في فضاء متري من x :

أي $x_n \to x \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists N \in \mathbb{N}^* \,;\, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$\iff x_n \in N(x, \varepsilon)$$

أي نقول أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من x إذا حوت

كل كرة مفتوحة مركزها x ، كل حدود المتتالية باستثناء عدد منته منها $\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2} \text{------}\} \subseteq N(x, \varepsilon)$

★ **تعريف المتتالية الكوشية في الفضاء المتري :**

نقول أن المتتالية $\{x_n\}$ من عناصر الفضاء المتري (X, d) أنها كوشية (أساسية) إذا حقق :

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists N \in \mathbb{N}^* \,:\, n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

★ **تعريف الفضاء المتري التام :**

نقول عن الفضاء المتري X أنه تام إذا كانت كل متتالية كوشية من عناصره متقاربة فيه.

مبرهنة :

ليكن (X, d) فضاء متري و $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية كوشية في هذا الفضاء عندئذٍ تكون $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة. أي (مجموعة العناصر المتتالية الكوشية تكون محدودة)

البرهان : لتكن $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية كوشية في الفضاء المتري (X, d)

حسب تعريف المتتالية الكوشية

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \,:\, n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

/ /

لنختار $\varepsilon = 1$ عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < 1$$

ولنضع $a = x_{n_0}$ ولما كانت $m \geq n_0$ فإن:

$d(x_{n_0}, x_m) < 1$ أي $d(a, x_m) < 1$

أي سيكون x_{n_0} مركز الكرة التي ستحوي كل حدود المتتالية

ولنأخذ: $r = \max\{1, d(a, x_1) + d(a, x_2) +$

$\cdots + d(a, x_{n_0-2}) + d(a, x_{n_0-1}) + 1\}$

ولنفرض أن $1 \leq m < n_0$ عندئذ:

$$d(a, x_m) \leq d(a, x_1) + d(a, x_2) + \cdots + d(a, x_{n_0-1}) < r$$

وعندما $m \geq n_0$:

$$d(a, x_m) < 1 \leq r$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^* : d(a, x_m) < r \Rightarrow x_m \in N(a, r)$$

وبالتالي وجدنا كرة مفتوحة $N(a, r)$ بحيث:

$n = m ;$ $\{x_m\} \subseteq N(a, r)$

وبالتالي $\{x_m\}$ محدودة

مبرهنة: كل متتالية متقاربة في فضاء متري (X,d) تكون كوشية.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من x $x \in X$

عندئذٍ تكون من أجل $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ توجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث $n \geq N$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \\ m \geq N \Rightarrow d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

كذلك

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذن $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

من أجل $\varepsilon > 0$ وجدنا $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث

$$n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

إذن $\{x_n\}$ كوشية.

نتيجة: كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون محدودة.

البرهان: $\{x_n\}$ متتالية متقاربة $\Leftarrow$ $\{x_n\}$ كوشية

$\Leftarrow$ وحسب ما سبق أن $\{x_n\}$ متقاربة وبالتالي كوشية وبالتالي هي محدودة.

/ /

ملاحظة: ليست كل متتالية "كوشية" متقاربة

والمثال التالي لتوضيح ذلك :

* لتكن $X = \mathbb{N}^*$ و $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

إن d مسافة على X وذلك لتحقق الشروط الأربعة.

كذلك نلاحظ أن $\{x_n = n\}$ كوشية وذلك بالتعويض بالتعريف

$$x_n = n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists N_0 \in \mathbb{N} : \; \forall m, n \geq N_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$d(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m} \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

$$\leq \frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0} = \frac{2}{N_0} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$$

أي من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ بحيث :

$$\forall m, n \geq N_0 \; ; \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

إذاً $\{x_n\}$ كوشية لكنها غير متقاربة في X

لأنه لو فرضنا أنها متقاربة من a فإن $a \in X = \mathbb{N}^*$

Scanned by CamScanner

$$d(x_n, a) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$d(x_n, a) = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{a} \right|$$

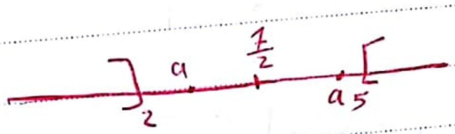
$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{a}$$

وهذا غير ممكن لأن $\frac{1}{a} \neq 0$. إذاً $\{X_n\}$ غير متقاربة في X .

مثال عن المجموعة المفتوحة :

ليكن $X = \mathbb{R}$ أثبت أن المجموعة $Q =]2,5[$ هي مفتوحة في الفضاء المتري الحقيقي المألوف $(\mathbb{R}, |.|)$.

الحل :



إذا كان $a \in Q$ وكان $\frac{7}{2} \leq a$ ، سنأخذ $r = 5 - a > 0$

عندئذ

$$]a-r, a+r[= N(a,r) \subseteq Q$$

سنبين أن

$$]a-r, a+r[\subseteq]2,5[$$

لدينا $r = 5 - a$

$$\Rightarrow N(a,r) =]a-r, a+r[$$

$$=]2a-5, 5[\subseteq]2,5[$$

/ /

ومن الواضح أن $2 < 2a-5 < 5$

ومنه تكون $]2a-5, 5[\subseteq]2,5[$

واضح أن $2 < 2a-5 < 5$

$7 < 2a < 10$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{7}{2} \leq a < 5}$$

في حال $2 < a < \frac{7}{2}$ (حسب الرسمة أي أصغر من نصف المجال)

نأخذ $r = a-2$

$N(a,r) =]a-r, a+r[$

$=]2, 2a-2[\subseteq]2,5[= Q$

واضح أن $a < \frac{7}{2} \Leftarrow$

$2a < 7$

$\Leftarrow 2 < 2a-2 < 5$

ملاحظة: وبشكل مشابه يمكن أن نرى أن كل مجال مفتوح

هو مجموعة مفتوحة //

مثال 2: لدينا $X = \mathbb{R}$ ، المجموعة $Q =]2,5[\cup]-1,1[$

هي مجموعة مفتوحة.

لأنه إذا كانت $a \in Q$ فإنّ $a \in]2,5[$ أو

$a \in]-1,1[$ ، فإذا كانت $a \in]2,5[$ $\Leftarrow$ يوجد $0 < r$

حيث $N(a,r) \subseteq]2,5[\subseteq Q$

$\Rightarrow N(a,r) \subseteq Q$

وإذا كانت $a \in]-1,1[$ فكذلك يوجد $0 < r$ حيث

$N(a,r) \subseteq]-1,1[\subseteq Q$

$\Rightarrow N(a,r) \subseteq Q$

* انتهت المحاضرة *

"خديجة الرفاعي و رشا القرصة"

التبولوجيا (1)

الدكتور: أحمد هابيل

/ /

المحاضرة السابعة:

" قام في هذه المحاضرة بحل بعض الأمثلة والتمارين تطبيقاً على تعاريف المحاضرات السابقة،
كما تابع بإعطاء بعض المبرهنات وأضاف تعريف النقطة الداخلية "

والآن ...

للإطلاع:
مثال على المتتالية الكوشية الغير متقاربة في $(Q, |.|)$

أثبت أن المتتالية $\{x_n\}$ كوشية وغير متقاربة في $(Q, |.|)$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \quad , \quad x_0 = 1$$

الحل: إنّ $\sqrt{2} \notin Q$ لذلك سنبرهن أنّ x_n متقاربة من $\sqrt{2}$ في $(IR, |.|)$ وذلك بأخذ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{(\lim x_n)^2 + 2}{2 \lim x_n}$$

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x} \Rightarrow$$

$$2x^2 = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

/ /

ومنه نجد أن $\{\alpha_n\}$ متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$ $\Longleftarrow$ $\{\alpha_n\}$

كوشية في $(\mathbb{R}, |.|)$ ، وبما أنها كوشية متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$

أي: $\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists N \in \mathbb{N}^* : m, n \geq N \Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$

ولكن من الواضح أنّ $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ وذلك لأنّ:

$$\alpha_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\alpha_0^2 + 2}{2\alpha_0} \in \mathbb{Q}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 + 2}{2\alpha_n} \in \mathbb{Q}$$

وبالتالي كل حدود المتتالية تنتمي لـ $\mathbb{Q}$

ومنه نجد أن $\{\alpha_n\}$ كوشية في $(\mathbb{Q}, |.|)$

لكنها ليست متقاربة في $\mathbb{Q}$ لأنه لو كانت $\boxed{a \in \mathbb{Q}}$

و α_n متقاربة من a في $(\mathbb{R}, |.|)$

فإنّ
$$\begin{cases} \alpha_n \to a \\ \alpha_n \to \sqrt{2} \end{cases} \Longleftarrow$$
وكذلك لدينا

$$\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} = a \in \mathbb{Q}$$

وهذا مستحيل

/ /

ونعلم أن كل متتالية محدودة ومتناقصة هي متقاربة

لذلك سنثبت أنها متناقصة :

من الواضح أن $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ كذلك أن $0 < \alpha_n$

$\forall n \geq 1$

لاحظ أن $2 < \alpha_n^2$

$\alpha_1 = \frac{1^2+2}{2\times 1} = \frac{3}{2}$

$\alpha_1^2 = \frac{9}{4} > 2$

$\vdots$

$\alpha_n^2 > 2$

ومنه $0 < (\alpha^2 - 2)^2$

$\alpha^4 - 4\alpha_n^2 + 4 > 0$

نضيف $8\alpha n^2$

$\Rightarrow \alpha_n^4 + 4\alpha n^2 + 4 > 8\alpha n^2$

$\Rightarrow (\alpha n^2 + 2)^2 > 2 \cdot 4 \cdot \alpha n^2$

$\Rightarrow \Big(\underbrace{\frac{\alpha n^2 + 2}{2\alpha n}}_{\alpha n^2+1}\Big)^2 > 2$

$\Rightarrow \alpha n^2 + 1 > 2$

اذن مهما يكن n فإن $2 < \alpha n^2$

$\alpha n^2 + 2 < 2\alpha n^2$

$\Rightarrow \frac{\alpha n^2 + 2}{2\alpha n} < \alpha n$

$\Rightarrow \alpha n+1 < \alpha n$

ومنه $\{\alpha n\}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى اذن هي متقاربة من $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

/ /

تعريف النقطة الداخلية لمجموعة :

- ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ نقول عن $a \in A$ نقطة داخلية لمجموعة A إذا وُجد $r > 0$ بحيث يتحقق $N(a,r) \subseteq A$ ونرمز لمجموعة كل النقاط الداخلية للمجموعة A بالرمز A° وندعو هذه المجموعة بداخل A.

تمرين : ليكن (X,d) فضاء متري وليكن $A, B \subseteq X$ عندئذٍ :

1) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

2) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$

3) $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

* سيتم حلهم في المحاضرات السابقة "

مبرهنة : 1) الكرة المفتوحة في فضاء متري هي مجموعة مفتوحة
2) الكرة المغلقة في فضاء متري هي مجموعة مغلقة .

اثبات 1) ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $N(a,r)$ كرة مفتوحة حيث $a \in X$, $r > 0$

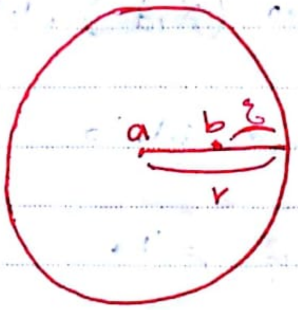
من أجل $b \in N(a,r)$

يوجد $\varepsilon = r - d(b,a) > 0$

لأن $d(b,a) < r$

/ /

و سنجد أنَّ $N(b,\varepsilon) \subseteq N(a,r)$



وذلك لأنه لنفرض

$x \in N(b,\varepsilon)$

$$\Rightarrow d(x,b) < \varepsilon = r - d(b,a)$$

$$d(x,b) + d(b,a) < r$$

وبما أن d مسافة

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a) < r$$

$$\Rightarrow d(x,a) < r$$

$$\Rightarrow x \in N(a,r)$$

اذن $N(a,r)$ مجموعة مفتوحة

اثبات 2)

إن الكرة المغلقة هي : $B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$

ولنثبت أنها مجموعة مغلقة نبرهن أن متممتها مفتوحة
أي نبرهن $B^c(a,r)$ مفتوحة

ولذلك نأخذ عنصر ما بالمتممة وليكن

$$b \in B^c(a,r)$$

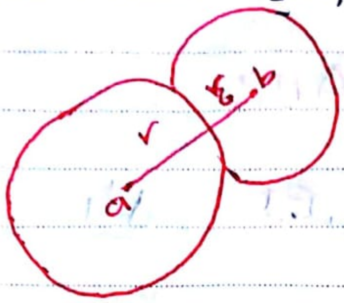
$$\Rightarrow b \notin B(a,r)$$

$$\Rightarrow d(b,a) > r$$

/ /

ليوجد $0 < \varepsilon = d(b,a) - r$ بحيث

$N(b,\varepsilon) \subseteq B^c(a,r)$



لأ نفرض أن $x \in N(b,\varepsilon)$

$\Rightarrow d(x,b) < \varepsilon = d(b,a) - r$ ★

ونريد اثبات أن $x \in B^c(a,r)$

فلو فرضنا جدلاً أنّ $x \notin B^c(a,r)$

$\Rightarrow x \in B(a,r)$

وبالتالي

$d(x,a) \leq r$

من ★

$\underbrace{d(x,a)}_{d(a,x)} + d(x,b) \leq d(x,b) + r < d(b,a)$

ولدينا $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$

$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < d(b,a)$

$\Rightarrow d(a,b) < d(a,b)$

وهذا غير ممكن اذاً $x \in B^c(a,r)$ ومنه

$N(b,\varepsilon) \subseteq B^c(a,r)$

$\Rightarrow$ مجموعة مفتوحة $B^c(a,r)$

ومنه $B(a,r)$ مغلقة.

/ /

تمرين : لتكن A , B مجموعتان محدودتان في X ⇐ $A \cup B$ محدودة.

الحل : لتكن A مجموعة محدودة وبالتالي يوجد كرة مفتوحة تحويها أي : $A \subseteq N(c_1, r_1)$

وكذلك لتكن B مجموعة محدودة ⇐ $B \subseteq N(c_2, r_2)$

وبما أن A و B محدودتان اذاً يوجد كرة تحويهما

وسنبين أن $A \cup B \subseteq N(c_1, r)$

حيث : $r = r_1 + r_2 + d(c_1, c_2)$

وللبرهان أن $A \cup B$ محدودة سنبين أن

$$A \cup B \subseteq N(c_1, r)$$

$\forall x \in A \Rightarrow x \in N(c_1, r_1)$ اما

$$\Rightarrow d(x, c_1) < r_1 < r$$

$$\Rightarrow d(x, c_1) < r$$

$$\Rightarrow x \in N(c_1, r)$$

أو $x \in B \Rightarrow x \in N(c_2, r_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(x, c_2) < r_2$$

لكن $d(x,c_1) \leq d(x,c_2) + d(c_2,c_1) < r_2 + d(c_2,c_1) < r$

$$\Rightarrow d(x,c_1) < r \Rightarrow x \in N(c_1,r)$$

اذاً $A \cup B \subseteq N(c_1,r)$

$\Rightarrow$ $A \cup B$ مجموعة محدودة

تمرين: أثبت أنّ كل مجموعة جزئية في X تكون مفتوحة ومغلقة

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

الحل: لتكن $A \subseteq X$ مجموعة جزئية ما في X

ولنثبت شرط المجموعة المفتوحة وذلك اذا أخذنا العنصر بحيث:

$$a \in X \ , \ N(a,\tfrac{1}{2}) = \{x \in X : \delta(x,a) < \tfrac{1}{2}\}$$

$$= \{x \in X : \delta(x,a) = a\} = \{a\}$$

وكذلك لو أخذنا:

$$N(a,1) = \{x \in X : \delta(x,a) < 2\}$$

وبالتالي $N(a,2) = X$

وبشكل عام يمكن أن نكتب في هذا الفضاء المتري:

/ /

$$N(a,r) = \begin{cases} X & r > 1 \\ \{a\} & r \leq 1 \end{cases}$$

اذاً المجموعة A مفتوحة في X وذلك لنفرض أن $a \in A$

فإنه يوجد $r = \frac{1}{2}$ بحيث $N(a,\frac{1}{2}) = \{a\} \subseteq A$

اذاً A مجموعة مفتوحة في (X,δ)

ولنفرض أن $B \subseteq X$ مجموعة جزئية فإن B مغلقة لأن

$A = B^c$ مجموعة مفتوحة في X اذاً B مغلقة.

مبرهنة:

لتكن (X,d) فضاء متري، عندئذٍ:

1) $\emptyset$ ، X مجموعتان مفتوحتان في (X,d)

2) اتحاد أي جماعة من المجموعات المفتوحة هي مجموعة مفتوحة

3) تقاطع مجموعتين مفتوحتين هي مجموعة مفتوحة.

تذكرة لتعريف المجموعة المفتوحة: اذا كان Q مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$

$$\forall x \in Q \; ; \exists r > 0 \; ; N(x,r) \subseteq Q$$

1) الحل: إن X مجموعة مفتوحة وذلك لنفرض $x \in X$

يوجد $r = 1$ بحيث $N(x,1) \subseteq X$

/ /

اذن X مجموعة مفتوحة.

• $\emptyset$ مجموعة مفتوحة ؛ لأنه لا يمكننا القول بأن $\emptyset$ غير مفتوحة لأن معنى ذلك أنه يوجد $x \in \emptyset$ بحيث مهما تكن $r > 0$ فإنه $N(x,r) \not\subseteq \emptyset$

2) لتكن $\{Q_i : i \in \Delta\}$ مجموعة من المجموعات المفتوحة حيث Δ مجموعة أدلة (قد تكون منتهية أو غير منتهية مثل N أو Q أو IR أو $[1,2]$)

إذن $Q = \bigcup_{i \in \Delta} Q_i$

لتكن $x \in Q$ $\Leftarrow$ يوجد $i_0 \in \Delta$ بحيث $x \in Q_{i_0}$

و Q_{i_0} مجموعة مفتوحة اذاً يوجد $r > 0$ بحيث

$$N(x,r) \subseteq Q_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} Q_i = Q$$

اذاً $N(x,r) \subseteq Q$ وبالتالي Q مجموعة مفتوحة

3) Q_1 ، Q_2 مجموعتان مفتوحتان في (X,d) ولنبرهن أن

$Q_1 \cap Q_2$ مفتوحة في (X,d) ، اذا كان $\emptyset = Q_1 \cap Q_2$ فهي مجموعة مفتوحة.

وإذا كان [illegible] $x \in Q_1 \cap Q_2$

/ /

فإن $x \in Q_1 \Rightarrow \exists r_1 > 0 : N(x, r_1) \subseteq Q_1$

$x \in Q_2 \Rightarrow \exists r_2 > 0 : N(x, r_2) \subseteq Q_2$

ولنأخذ

نجد أن $0 < r \leq \min\{r_1, r_2\}$

$N(x, r) \subseteq N(x, r_1) \subseteq Q_1$

$N(x, r) \subseteq N(x, r_2) \subseteq Q_2$

إذن $N(x, r) \subseteq Q_1 \cap Q_2$

إذن $Q_1 \cap Q_2$ مجموعة مفتوحة

ملاحظة: *ويمكن تعميم الشرط (3) على عدد منتهي من المجموعات المفتوحة

$Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n = Q_1 \cap \ldots \cap Q_{n-1} \cap Q_n$

* إذا كانت A مفتوحة فإن كل نقاطها داخلية من تعريف المجموعة المفتوحة

A مفتوحة $\Leftrightarrow A^\circ = A$

خديجة الرفاعي ♡ دش القرطاسية

د. أحمد هابيل

20/3/2019

التبولوجي (1)

المحاضرة الثانية:

- أعطى الدكتور في هذه المحاضرة بعض النتائج التي تساعدنا على إثبات أن كل مترك يولد تبولوجيا أي كل فضاء متري هو تبولوجي بالإضافة إلى بعض التعاريف والمبرهنات.

- تعريف الفضاء التبولوجي:

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن τ صفاً من أجزاء X $(\tau \subseteq P(X))$

نقول عن τ إنها تبولوجيا على X إذا تحققت الشروط التالية:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau \; ; \; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$

أي: تقاطع جماعة منتهية من عناصر τ هو عنصر من τ "لا يمكننا الحكم على التقاطع غير المنتهي"

3) $A_i \in \tau, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

أي: اتحاد لعناصر من τ هو عنصر من τ.

وندعو عندئذٍ الثنائية (X, τ) فضاء تبولوجيا. (وهو تعميم للفضاء المتري)

كذلك نجد: أن جماعة كل المجموعات المفتوحة في فضاء متري تشكل تبولوجيا ونرمز لها بـ τ_d.

مثال (1): $\emptyset \neq X$ ، $\tau = P(X)$ عندئذٍ (X, τ) فضاء تبولوجي لأن الشروط 1, 2, 3 محققة.

مثال (2): $\emptyset \neq X$

$\tau = \{\emptyset, X\}$

نتائج: ليكن (X,d) فضاء متريا، عندئذ:

1) المجموعتان $X, \emptyset$ مجموعتان مغلقتان في (X,d)

2) اجتماع أي جماعة منتهية من المجموعات المغلقة في (X,d) هو مجموعة مغلقة في (X,d). «اجتماع مجموعتين مغلقتين هو مجموعة مغلقة»

3) تقاطع أي جماعة من المجموعات المغلقة في (X,d) هو مجموعة مغلقة في (X,d)

البرهان: 1) إن متممة المجموعة $\emptyset$ هي X، $X = \emptyset^c$
إذاً $\emptyset$ مغلقة لأن X مجموعة مفتوحة.
كذلك: متممة المجموعة X هي $\emptyset$ إذاً X مغلقة لأن $\emptyset$ مفتوحة.

2) سنبرهن على أن اجتماع أي مجموعتين مغلقتين هي مجموعة مغلقة:
لتكن لدينا E_1 و E_2 مجموعتين مغلقتين إذاً

E_1^c و E_2^c مفتوحتان وبالتالي:

$$(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c$$

حسب دومرغان

وبالتالي $E_1^c \cap E_2^c$ مجموعة مفتوحة ومنه نجد أن $E_1 \cup E_2$ مجموعة مغلقة.

3) لتكن $\{E_i ; i \in I\}$ جماعة من المجموعات المغلقة في X

ولنبرهن أن $\bigcap_{i \in I} E_i$ مجموعة مغلقة أي يجب أن نثبت

أن $\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)^c$ مفتوحة نلاحظ حسب دومرغان أن:

$$\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} E_i^c$$

/ /

ولما كانت $E_i, i\in I$ جماعة من المجموعات المغلقة كانت $\{E_i^c\}_{i\in I}$ جماعة من المجموعات المفتوحة.
وحسب المبرهنة السابقة نجد أن $\bigcup_{i\in I} E_i^c$ مجموعة مفتوحة وبالتالي $\bigcap_{i\in I} E_i$ مجموعة مغلقة.

★ مبرهنة: لتكن (X,d) فضاءً مترياً عندئذٍ، الشرط اللازم والكافي كي تكون $E\subseteq X$ مغلقة $\Leftrightarrow$ إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من عناصر E متقاربة من x فإن $x\in E$

البرهان:

$\boxed{\Leftarrow}$ لتكن E مغلقة ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر E متقاربة من $x\in X$، وسنبرهن أن $x\in E$، لنفرض جدلاً أن $x\notin E$
$\Leftarrow x\in E^c$، لكن E مغلقة $\Leftarrow E^c$ مفتوحة.
و $x\in E^c \Leftarrow$ يوجد $r>0$ بحيث: "حسب تعريف المجموعة المفتوحة"

$$N(x,r)\subseteq E^c$$

وبالتالي بما أن $x_n \to x$ فإن كل حدود المتتالية x_n تنتمي إلى $N(x,r)$ باستثناء عدد منتهي، إذاً تنتمي لـ E^c وهذا غير صحيح ~~...~~ لأن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر E أي مستحيل أن تكون عناصر من المجموعة E^c وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ ومنه $x\in E$

$(\Rightarrow)$
لنفرض أن $\{x_n\}\in E$; $x_n \to x$; $x\in E$
ولنثبت أن E مغلقة أي يجب أن نثبت أن E^c مفتوحة
لتكن $b\in E^c$ ولنفرض جدلاً أن E^c ليست مفتوحة أي من أجل كل $r>0$ سنجد أن:

$$N(b,r)\not\subseteq E^c \Rightarrow N(b,r)\cap E\neq\emptyset$$

لنأخذ $r=1$ عندئذٍ:

$$x_1 \in N(b,1)\cap E\neq\emptyset$$

" " $r=\frac{1}{2}$ " ":

$$x_2 \in N(b,\tfrac{1}{2})\cap E\neq\emptyset$$

/ /

لنأخذ $\varepsilon = \frac{1}{3}$ عندئذٍ $x_3 \in N(b, \frac{1}{3}) \cap E \neq \emptyset$

⋮

لنأخذ $\varepsilon = \frac{1}{n}$ عندئذٍ $x_n \in N(b, \frac{1}{n}) \cap E \neq \emptyset$

⋮

وبالاستمرار هكذا نحصل على متتالية $\{x_n\}$ حيث:

$$x_n \in N(b, \frac{1}{n}) \cap E \neq \emptyset \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow x_n \in N(b, \frac{1}{n}) \; ; \; x_n \in E \; ; \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

اذاً عناصر المتتالية من E كما أن:

$$0 < d(x_n, b) < \frac{1}{n}$$

وبجعل $n \to \infty$ نجد أن $d(x_n, b)$ حسب مبرهنة الإحاطة وبالتالي حصلنا على المتتالية $\{x_n\}$ التي عناصرها من E وتتقارب من العنصر $b \in E^c$ أي $b \notin E$ وهذا يناقض الفرض وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي المجموعة E^c مفتوحة و E مغلقة

تعريف النقطة الملاصقة لمجموعة في الفضاء المتري:

ليكن (X, d) فضاءً مترياً ولتكن $A \subseteq X$، نقول عن $x \in X$ إنها نقطة تجمع لـ A اذا:

$$\forall r > 0 \; ; \; N(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

ونرمز لمجموعة كل النقاط الملاصقة بـ $\bar{A}$ وتدعى لصاقة A

مثال: $A = [0, 1[$ في IR

$x = 1$ ملاصقة لـ A

$x = 0$ ملاصقة لـ A

/ /

تعريف النقطة الحدية لمجموعة في الفضاء المتري :

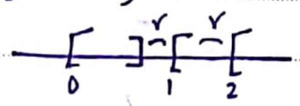
لتكن (X,d) فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ ، نقول عن $x \in X$ انها نقطة تجمع لـ A اذا :

$\forall r > 0 \; ; \; N(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

ونرمز لمجموعة كل النقاط الحدية (نقاط التجمع) لـ A بالشكل A' ويدعوها البعض بالمجموعة المشتقة .

مثال :

$X = \mathbb{R}$ ، $A = [0,1[\cup \{2\}$



$x = 1$

$A \setminus \{1\} = A$

$\forall r > 0 : N(1,r) \cap (A \setminus \{1\}) \neq \emptyset$

• ملاحظة :

1- x نقطة حدية لـ $A \Leftarrow x$ نقطة ملاصقة لـ A

السبب $A \setminus \{x\} \subseteq A$

$\emptyset \neq N(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \subseteq N(x,r) \cap A \neq \emptyset$

2- x نقطة ملاصقة لـ $A \not\Leftarrow x$ نقطة حدية لـ A ، ~~$x \in A$~~

لأن $A = A \setminus \{x\}$ ، عندما $x \notin A$

$A \setminus \{x\} = A \cap \{x\}^c$ *

تعريف جبهة مجموعة أو محيط مجموعة A : هي كل مجموعة النقاط الملاصقة لـ A والملاصقة في نفس الوقت لـ A^c

$$\text{Front}\,A \left\{ x \in X : \begin{array}{l} x \text{ ملاصقة لـ } A \\ x \text{ ملاصقة لـ } A^c \end{array} \right.$$

ونرمز له بـ

$\text{Fr}\,A$

مبرهنة: X فضاء متري $A \subseteq X$

x نقطة ملاصقة لـ $A \Leftrightarrow$ توجد متتالية من عناصر A متقاربة من x

الاثبات:

$(\Leftarrow)$ لنفرض أن x ملاصقة لـ $A \Leftarrow$

$$\forall r>0 : N(x,r) \cap A \neq \phi$$

ومنه نجد أن:

$$x_1 \in N(x,1) \cap A \neq \phi$$
$$x_2 \in N(x,\tfrac{1}{2}) \cap A \neq \phi$$
$$\vdots$$
$$x_n \in N(x,\tfrac{1}{n}) \cap A \neq \phi$$

وبالتالي نشكل متتالية $\{x_n\}$ من عناصر A بحيث:

$$x_n \in N(x,\tfrac{1}{n}) \Rightarrow d(x_n,x) < \tfrac{1}{n}$$

ومنه نجد عندما

$$d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$n = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow x_n \longrightarrow x$$

$(\Rightarrow)$ لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر A متقاربة من x سنبرهن أن x ملاصقة لـ A، ولتكن $0 < r$ عندئذ:

$$\exists N \in \mathbb{N}^* : n \geq N \Rightarrow d(x_n,x) < r$$

(لأن $x_n \to x$)

/ /

بما أن $d(x_n, x) < r$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_n \in N(x,r) \\ x_n \in A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$N(x,r) \cap A \neq \phi$$

اذن :

$$\forall r > 0 \; ; \; N(x,r) \cap A \neq \phi$$

$\Rightarrow$ x ملاصقة لـ A

مثال : عن النقطة ملاصقة لـ ليست حدية لمجموعة ما :

بما أن النقطة الملاصقة : $\forall \varepsilon > 0 \; ; \; N(x_0, \varepsilon) \cap M \neq \phi$

النقطة الحدية : $\forall \varepsilon > 0 : \; N(x_0, \varepsilon) \cap (M \setminus \{x_0\}) \neq \phi$

لنأخذ المجموعة : $A =]0,1[\cup [2]$

بما أن $x_0 = 2$ ملاصقة لـ A

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; 2 \in N(2,\varepsilon) \cap A \Rightarrow N(2,\varepsilon) \cap A \neq \phi$$

لكن $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \; N(2, \frac{1}{2}) \cap A \setminus [2]$

$$= N(2,\varepsilon) \cap]0,1[$$

د. أحمد الهابيل

التبولوجي (1)

المحاضرة الثامنة :

عنوان المحاضرة : بعض المبرهنات والتمارين عليها ما يجد

تمهيدية : X فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ بحيث A مغلقة $\iff$ $A' \subseteq A$

البرهان :

$(\Leftarrow)$ لدينا A مغلقة ونبرهن أن $A' \subseteq A$

لنفرض أن $x \in A'$ $\Leftarrow$ x نقطة حدية لـ A $\Leftarrow$ x نقطة ملاصقة لـ A «حسب تعريف النقطة الملاصقة والحدية»

وحسب تمهيدية سابقة فإنه توجد متتالية من عناصر A متقاربة من x

إذن $x \in A$ ، ومنه $A' \subseteq A$

$(\Rightarrow)$

فرضنا $A' \subseteq A$ ونبرهن أن A مغلقة وذلك ببرهان أن A^c مفتوحة.

لنفرض أن $x \in A^c$ ولنفرض جدلاً أنه لا يوجد $r > 0$ بحيث $N(x,r) \subseteq A^c$

$$\Rightarrow \forall r > 0 ; N(x,r) \nsubseteq A^c$$

$$\Rightarrow \forall r > 0 ; N(x,r) \cap A \neq \phi$$

$\Rightarrow$ نقطة x ملاصقة لـ A $\Big\}$ $\Rightarrow$ $x \notin A$ حدية لـ A $x \in A' \subseteq A$

$\Rightarrow x \in A$

وهذا غير صحيح ، إذن يوجد $r > 0$ بحيث $N(x,r) \subseteq A^c$

وبالتالي A^c مفتوحة $\Leftarrow$ A مغلقة

/ /

تمهيدية: X فضاء متري ، $A \subseteq X$

1) $\bar{A} = K =$ تقاطع كل المغلقات التي تحوي A

2) A أصغر مغلقة تحوي A

3) $\bar{A} = A \cup A'$

4) A مغلقة $\iff A = A'$

5) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

البرهان:

قبل البرهان أن $\bar{A} = K$ ، نلاحظ أنه دوماً هناك مجموعة مغلقة تحوي A هي X ،

لنثبت أن $K^c \subseteq \bar{A}^c$ ،

لتكن E مغلقة تحوي A ، ولنفرض أن $x \notin E \Rightarrow$ $x \in E^c$ وبالتالي هي مفتوحة ، اذن يوجد $r > 0$ بحيث $N(x,r) \subseteq E^c$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : N(x,r) \cap A = \emptyset$$

$\Rightarrow$ x ليست لاصقة لـ A $\Rightarrow x \notin \bar{A}$

$$\Rightarrow x \in \bar{A}^c$$

$$\Rightarrow E^c \subseteq \bar{A}^c$$

ومنه $\bar{A} \subseteq E$.

وبالتالي $\bar{A} \subseteq (\cap E)$

$$\boxed{\bar{A} \subseteq K \iff K^c \subseteq \bar{A}^c}$$

/ /

اثبات أن $\bar{A}^c \subseteq k^c$

$x \in \bar{A}^c \Rightarrow x \notin \bar{A}$

$\Rightarrow$ x ليست نقطة ملاصقة لـ A

$\Rightarrow \exists r > 0 : N(x,r) \cap A = \phi$

$\Rightarrow A \subseteq (N(x,r))^c = E$

E مغلقة لأن $N(x,r)$ مجموعة مفتوحة (حسب مبرهنة)

E مغلقة تحوي A $\Leftarrow$ $K \subseteq E$

$\Rightarrow N(x,r) = E^c \subseteq k^c$

$\Rightarrow x \in N(x,r) \subseteq k^c \Rightarrow x \in k^c$

$\Rightarrow \bar{A}^c \subseteq k^c$

$\Rightarrow \bar{A}^c = k^c \Rightarrow \boxed{\bar{A} = k}$

2) $\bar{A}$ أصغر مغلقة تحوي A

البرهان:

$\bar{A}$ مغلقة لأنه من (1) $\bar{A}$ تقاطع مغلقات، $\bar{A}$ أصغر مغلقة تحوي A (بمعنى الاحتواء)

أي اذا كانت E مغلقة تحوي A فإن $\bar{A} = K \subseteq E$

اذن $\bar{A} \subseteq E$

/ /

٣) $\bar{A} = A \cup A'$

البرهان: لأن $\bar{A}$ تحوي A ، $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$

$x \in A \cup A' \Rightarrow$ $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$

أو

$x \in A' \Rightarrow$ x نقطة حدية لـ A

$\Rightarrow$ x نقطة ملاصقة لـ A

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

اذن :

$\bar{A} \subseteq A \cup A'$

وبالعكس $x \in \bar{A}$ $\Leftarrow$ x نقطة ملاصقة لـ A فإذا

كان $x \in A$ $\Leftarrow$ $x \in A \cup A'$

أما إذا كان $x \notin A$ $\Leftarrow$ x نقطة حدية لـ A $\Leftarrow$ $x \in A'$ $\Leftarrow$

$x \in A \cup A'$

اذن $\bar{A} \subseteq A' \cup A$

٤) A مغلقة $\Longleftrightarrow$ $A = \bar{A}$

البرهان :

($\Leftarrow$) A مغلقة $\Leftarrow$ $A' \subseteq A$ $\Leftarrow$ "مبرهنة سابقة"

من (3) $\bar{A} = A' \cup A = A \Rightarrow \bar{A} = A$

($\Rightarrow$)

$A = \bar{A}$ $\Leftarrow$ $A' \cup A = A$

$\Leftarrow$ $A' \subseteq A$ $\Leftarrow$ A مغلقة

/ /

5) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

البرهان : $\bar{A}$ لصاقة $\bar{A}$ وبما أن $\bar{A}$ مغلقة إذن من (2)

(4) لصاقة ... لصاقة لصاقتها

$$(\bar{\bar{A}}) = \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

تعاريف :

- المجموعة الكثيفة :

- X فضاء متري نقول عن المجموعة $A \subseteq X$ أنها كثيفة إذا كان $\bar{A} = X$.

- البعد بين مجموعتين :

X فضاء متري وليكن $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

$$d(A, B) = \inf \{ d(x, y) \; ; \; x \in A, y \in B$$

- البعد لنقطة a عن مجموعة B :

$$d(a, B) = \inf \{ d(a, y) \; ; \; y \in B \}$$

- قطر المجموعة A :

$$\delta(A) = \sup \{ d(x, y) \; ; \; x, y \in A \}$$

$$\delta(A) = +\infty$$

إذا لم يكن sup موجوداً .

/ /

تمارين :

1) $x \in \bar{A} \iff d(x,A)=0$

2) $A \subseteq B \Rightarrow \delta(A) \le \delta(B)$

3) $\delta(A \cup B) \le \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$ ، $A \neq \emptyset \neq B$

4) $A'' = (A')' \subseteq \bar{A}$ o $\delta(A) = \delta(\bar{A})$

** أثبت Q ليست مغلقة وليست مفتوحة في $(\mathbb{R}, |.|)$

الحل :

Q ليست مغلقة لأنه وجدنا أن المتتالية $\{x_n\}$ من عناصر Q متقاربة من $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2} \notin Q$
وحسب مبرهنة سابقة تكون Q غير مغلقة.

كذلك نجد أن $0 \in Q$ ولا توجد كرة مفتوحة بحيث
$]-r, r[= N(0,r) \subseteq Q$
لأن $]-r, r[\nsubseteq Q$

ويمكن إيجاد عدد n بحيث $\frac{\sqrt{2}}{n} < r$ ، $Q \not\ni \frac{\sqrt{2}}{n}$

$\Rightarrow Q \not\ni \frac{\sqrt{2}}{n} \in]-r, r[$

/ /

أثبت أن: $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

ليكن $x \in \bar{A} \Leftarrow \forall r > 0 ; N(x,r) \cap A \neq \phi$

$\phi \neq N(x,r) \cap A \subseteq N(x,r) \cap B$

$\Rightarrow \forall r > 0 ; N(x,r) \cap B \neq \phi$

$\Rightarrow x \in \bar{B}$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

أثبت أن: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

ليكن:

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

ولنفرض أن $x \in \overline{A \cup B} \Leftarrow$

$\forall r > 0 ; N(x,r) \cap (A \cup B) \neq \phi$

إذا كان $x \in \bar{A} \Leftarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

أما إذا كان $x \notin \bar{A}$ سنبرهن أن $x \in \bar{B}$

$x \notin \bar{A} \Leftarrow$

$\exists r_0 > 0 ; N(x,r_0) \cap A = \phi$

نوضح $\boxed{r \leq r_0}$

$\phi \neq N(x,r_0) \cap (A \cup B)$

$= (N(x,r_0) \cap A) \cup (N(x,r_0) \cap B)$

$\phi \neq \cup \left(N(x,r_0) \cap B\right)$

$\Rightarrow N(x,r_0) \cap B \neq \phi$

$\boxed{r \leq r_0}$

$\Rightarrow N(x,r) \cap A \subseteq N(x,r_0) \cap A = \phi$

$\Rightarrow N(x,r_0) \cap A = \phi$

$\Rightarrow \phi \neq N(x,r_0) \cap (A \cup B) = (\underbrace{N(x,r) \cap A}_{\phi}) \cup (N(x,r) \cap B)$

$\phi \neq N(x,r) \cap B$

أما إذا كان $r_0 < r$ $\Leftarrow$

$N(x,r_0) \subseteq N(x,r)$

$\Rightarrow \phi \neq N(x,r_0) \cap B \subseteq N(x,r) \cap B$

$\Rightarrow N(x,r) \cap B \neq \phi \Rightarrow$

x ملاصقة لـ B $\Rightarrow x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

خديجة الرفاعي & رشا القرصة

د. أحمد الهابيل

2019 / 3 / 27

التبولوجيا (1)

المحاضرة العاشرة:

- في محاضرتنا لليوم قام الدكتور بإعطاء بعض التعاريف وأكمل في المبرهنات ...

*** تعريف جوار نقطة ***

X فضاء متري

إذا كان $x \in X$ وكانت V مجموعة جزئية في X بحيث توجد مجموعة مفتوحة في X مثل W بحيث

$x \in W \subseteq V$

*** تعريف الجوار المفتوح لنقطة ***

- نقول عن V جوار مفتوح لـ x إذا كانت V مجموعة مفتوحة بحد ذاتها.

*** الاستمرار في الفضاءات المترية ***

تعريف: ليكن $f: (X,d) \to (Y,\rho)$ تابع نقول عن f مستمر عند $x_0 \in X$ إذا وجد جوار لكل جوار V لـ $f(x_0)$ جوار U لـ x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$ ويكون f مستمر على X إذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط X.

*** مثال ***

ليكن $f: (X,d) \to (Y,\rho)$

$\forall x \in X : f(x) = b \quad ; b \in Y$

أثبت أن f تابع مستمر على X

*** الحل ***

لتكن $x_0 \in X$ ولتكن V جوار لـ $f(x_0) = b$ عندئذ يوجد جوار U لـ x_0 هو $U = X$ ولدينا $f(X) = \{b\} \subseteq V$ ومنه f مستمر عند $x_0 \in X$ وبالتالي كون x_0 اختيارية من X فإن f مستمر على X

مبرهنة «مهمة»

f مستمر على X $\Leftrightarrow$ الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y مجموعة مفتوحة في X

البرهان

لنفرض أن F مستمر ولتكن V مجموعة مفتوحة في Y والمطلوب برهان أن

$$F^{-1}(V)=\{x\in X ; F(x)\in V\} \subseteq X$$

ليكن $x\in f^{-1}(V) \Rightarrow F(x)\in V$

V مجموعة مفتوحة وبالتالي V جوار مفتوح لـ $f(x)$ وبالتالي يوجد جوار U لـ x بحيث $F(U)\subseteq V$

$$F(U)\subseteq V \Longrightarrow U\subset F^{-1}(V)$$

U جوار لـ x وبالتالي يوجد W مجموعة مفتوحة بحيث:

$x\in W \subseteq U$ «حسب تعريف الجوار»

اذا يوجد $r>0$ بحيث $N(x,r)\subseteq U$

$N(x,r) \subseteq F^{-1}(V)$

إذا $F^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X

الشرط (*) محقق «الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y مجموعة مفتوحة في X» أي نريد اثبات ان f مستمر في $x\in X$ حيث x نقطة من X

ليكن V جوار لـ $f(x)$ في Y

اذا نوجد Z مجموعة مفتوحة بحيث:

$$F(x)\in Z\subseteq V$$

Z مجموعة مفتوحة إذاً $f^{-1}(Z)$ مجموعة مفتوحة في X

وكون $F(x)\in Z \Leftrightarrow x\in f^{-1}(Z)$

إذن يوجد $r>0$ بحيث

$$N(x,r)\subseteq F^{-1}(Z)$$

$$\Rightarrow F(N(x,r))\subseteq Z\subseteq V$$

إذن وجدنا $U = N(x, r)$ جوار لـ x بحيث
$F(U) \subseteq V$
إذن F مستمرة في x وبالتالي F مستمرة على X

"نتيجة"
F مستمر على $X \Leftrightarrow$ الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في Y مجموعة مغلقة في X

البرهان

$\Leftarrow$ لنفرض أن f مستمر على X ولتكن E مغلقة في X
وبالتالي E^c مفتوحة في Y
- حسب مبرهنة سابقة أن الصورة العكسية لـ E^c
هي مجموعة مفتوحة $F^{-1}(E^c)$ مفتوحة في X

$f^{-1}(E^c) = (F^{-1}(E))^c$ "حسب خواص الصورة العكسية"
إذن $(F^{-1}(E))^c$ مفتوحة إذن $F^{-1}(E)$ مغلقة

$\Rightarrow$ الشرط ⊛ محقق "الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في Y مجموعة مغلقة في X"
ولإثبات أن F مستمر يكفي إثبات إن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y مجموعة مفتوحة في X
- لتكن V مجموعة مفتوحة في Y
V^c مجموعة مغلقة في Y
- باستخدام ⊛ نجد أن:
$F^{-1}(V^c) = (F^{-1}(V))^c$ مغلقة في X
$(F^{-1}(V))^c$ مجموعة مغلقة $\Rightarrow$ $F^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X
إذن F مستمر على X "استناد لمبرهنة سابقة"
إذا وجدنا $U = N(x, r)$ جوار لـ x بحيث
$F(U) \subseteq V$
إذن F مستمر في x وبالتالي F مستمر على X

"Delete" قام الدكتور بحذف هذه البرهنة "مبرهنة"

ليكن $f:(X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$

F مستمر في x $\Longleftrightarrow$ $x_n \to x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$

البرهان:

$\boxed{\Leftarrow}$ F تابع مستمر في x ولإثبات أن:

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow F(x_n) \longrightarrow F(x)$$

- لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة في x ونريد برهان أن:

$$F(x_n) \longrightarrow F(x)$$

وبما أن F مستمر في x إذن مقابل كل جوار V لـ $F(x)$

يوجد جوار U لـ x إذن $F(U) \subseteq V$

- ليكن $V = N(f(x),\varepsilon)$ جوار لـ $F(x)$

إذن يوجد جوار U لـ x بحيث: $F(U) \subseteq V = N(F(x),\varepsilon)$

U جوار لـ x $\Leftarrow$ هناك مجموعة مفتوحة W بحيث

$$x \in W \subseteq U$$

وبما أن $x \in W$ و V مجموعة مفتوحة إذن:

$$\exists\ r > 0 : N(x,r) \subseteq W \subseteq U$$

ولدينا $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من x وبالتالي من أجل $r > 0$

$$\exists N \in N^* : n \geqslant N \ ; \ d(x_n, x) < r$$

$$\Rightarrow n \geqslant N \Rightarrow x_n \in N(x,r)$$

$$\Rightarrow x_n \in U$$

وبالتالي $F(x_n) \in V$ إذن:

$$F(x_n) \in N(F(x),\varepsilon)$$

$$\Rightarrow F(F(x_n), F(x)) < \varepsilon$$

نلخص ما سبق:

- من أجل $\varepsilon > 0$ وجدنا $N^* \in N$

بحيث $n \geqslant N \Leftarrow F(F(x_n), f(x)) < \varepsilon$

إذن $F(x_n) \longrightarrow F(x)$

$\Rightarrow$ الشرط ⊛ محقق والمطلوب برهان أن f مستمر في x

نفرض جدلاً أن f غير مستمرة في x

يوجد جوار V لـ $f(x)$ بحيث أنه مهما يكن الجوار U لـ x فإن : $f(U) \not\subseteq V$

نختار الجوارات :

$U_n = N(x, \frac{1}{n})$ لـ x $\quad n = 1, 2, \ldots$

إذن $\quad f(U_n) \not\subseteq V$

وبالتالي توجد نقطة $x_n \in U_n$ بحيث

$$f(x_n) \notin V$$

المتتالية $\{x_n\}$ بحيث $x_n \in N(x, \frac{1}{n})$ ومنه

$$\Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

تمارين "

لتكن $\quad f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$

[f مستمر على X $\Leftrightarrow$ $\forall A \subseteq X : f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

" صورة اللصاقة محتواة في لصاقة الصورة "

[f مستمر على X $\Leftrightarrow$ $\forall B \subseteq Y : \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$

[f مستمر على X $\Leftrightarrow$ $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$

[f مستمر على X $\Leftrightarrow$ $\forall B \subseteq Y : Fr\, f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Fr\, B)$

انتهت المحاضرة

دلشا القرصة

&

خديجة الرفاعي

د: أحمد هابيل 2019/3/30

التبولوجيا (1)

المحاضرة: الحادية عشر

★ حل بعض التمارين اعتماداً على ما سبق:

$\boxed{1}$ ليكن لدينا $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع مسافة

أ) أثبت أن $\rho = \dfrac{3d}{5+7d}$ مسافة على X

الحل: إن $\rho(x,y) = \dfrac{3d(x,y)}{5+7d(x,y)}$

إن d مسافة $\Leftarrow$ $\dfrac{7}{5}d$ مسافة $\Leftarrow$ $\dfrac{\frac{7}{5}d}{1+\frac{7}{5}d}$

(وذلك لأننا نعلم سابقاً أن $d' = \alpha d$ مسافة)

((كما أننا نعلم أن $d' = \dfrac{d}{1+d}$ مسافة))

$\Leftarrow$ بما أن $\dfrac{\frac{7}{5}d}{1+\frac{7}{5}d}$ مسافة $\Leftarrow$ $\dfrac{7d}{5+7d}$ مسافة على X

$\Leftarrow$ نضرب بـ $\dfrac{3}{7}$ $\Leftarrow$ $\dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{7d}{5+7d}$ $\Leftarrow$

$\rho = \dfrac{3d}{5+7d}$ مسافة على X وهو المطلوب

ب) أثبت أن $D = \min\{3d, 2\}$ مسافة على X.

الحل: d مسافة $\Leftarrow$ $\frac{3}{2}d$ مسافة على X

نعلم أن $k\min\{\alpha, \beta\} = \min\{k\alpha, k\beta\}$.

ومنه نجد:

$2\min\{1, \frac{3}{2}d\}$ مسافة

$\Leftarrow$ $\min\{2, 3d\}$ مسافة على X

/ /

2 لتكن (X,d) فضاء متري . أثبت أنه اذا كان :
$d(x,A)=0 \iff x\in\bar{A}$

$(\Leftarrow)$

لتكن $x\in\bar{A} \Leftarrow$ توجد متتالية $\{x_n\}$ من عناصر A
بحيث $x_n \to x \Leftarrow$

$$0 \leq d(x,A) \leq d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

لأن $\inf_{a\in A} d(x,a)$

$$\Rightarrow 0 \leq d(x,A) \leq 0 \Rightarrow d(x,A)=0$$

$(\Rightarrow)$

$$\Leftarrow \quad d(x,A)=0$$

$$\forall \varepsilon>0 \; ; \exists a\in A \; ; d(x,a) < d(x,A)+\varepsilon = 0+\varepsilon=\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \; ; \exists a\in A \; ; d(x,a)<\varepsilon$$

من أجل $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$

يوجد $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
بحيث

$$d(x,a_n) < \frac{1}{n}$$

اذاً لدينا متتالية $\{a_n\}$ من عناصر A بحيث
$$d(x,a_n) < \frac{1}{n}$$
بجعل $n\to\infty$ نجد ; $d(x,a_n)\to 0$
$$a_n \to x$$
$$\Rightarrow x\in\bar{A}$$

/ /

$\boxed{3}$ A° مجموعة مفتوحة دوماً.

أن A° مجموعة كل النقاط الداخلية في A

الحل: لتكن $x \in A^\circ \Leftarrow x$ نقطة داخلية في A

وبالتالي يوجد $\epsilon > 0$ بحيث $N(x,\epsilon) \subseteq A$

سنبرهن أن $N(x,\epsilon) \subseteq A^\circ$

لتكن $y \in N(x,\epsilon) \Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث

$$\Rightarrow N(y,r) \subseteq N(x,\epsilon) \subseteq A$$

$$N(y,r) \subseteq A$$

إذاً: y نقطة داخلية في $A \Leftarrow y \in A^\circ \Leftarrow$

$$N(x,\epsilon) \subseteq A^\circ$$

إذاً: A° مجموعة مفتوحة.

ملاحظة: إذا كانت Θ مفتوحة ومحتواة في A فإن

$$\Theta \subseteq A \Rightarrow \Theta \subseteq A^\circ$$

$\boxed{4}$ $(B^\circ)^c = \overline{B^c}$ " متمم داخل B يساوي لصاقة متمم B

الحل:

$B^\circ \subseteq B \Rightarrow (B^\circ)^c \supseteq B^c$ (أخذنا المتمم)

لكن B° مجموعة مفتوحة (حسب التمرين السابق)

إذاً: $(B^\circ)^c$ مغلقة تحوي B^c، وبالتالي بالاعتماد على تمهيدية سابقة نجد

$$\overline{B^c} \subseteq (B^\circ)^c$$

وبالنسبة للاحتواء الثاني لدينا: $\overline{B^c}$ مجموعة مغلقة لأنه لصاقة أي مجموعة تكون مغلقة حسب تمهيدية سابقة.

وداعاً: $B^c \subseteq \overline{B^c}$ $\Leftarrow$ $B \supseteq (\overline{B^c})^c$

مفتوحة

حسب الملاحظة $O \subseteq A^\circ$

$\Leftarrow$ $B^\circ \supseteq (\overline{B^c})^c$

$\Leftarrow$ $(B^\circ)^c \subseteq \overline{B^c}$ بأخذ المتمم

اذاً: $\overline{B^c} = (B^\circ)^c$

$\boxed{5}$ $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$

نحصل على المساواة لنوضح

$B = A^c \Rightarrow B^c = A$

~~بالتعويض~~ مرمنه

$((A^c)^\circ)^c = \bar{A}$

بأخذ المتمم للطرفين

$(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$

$\boxed{6}$ $Fr\,A = \bar{A} \setminus A^\circ$

$A^\circ = A \setminus Fr\,A$

الحل: $Fr\,A = \bar{A} \cap \bar{A^c}$

من التمرين السابق لدينا: $(A^\circ)^c = \bar{A^c}$

$\Rightarrow Fr\,A = \bar{A} \cap (A^\circ)^c = \bar{A} \setminus A^\circ$

أما $A^\circ = A \setminus Fr\,A$

$A \setminus Fr\,A = A \cap (Fr\,A)^c$

$= A \cap (\bar{A} \setminus A^\circ)^c$

/ /

$$= A \cap (\bar{A} \cap (A^\circ)^c)^c$$

$$= A \cap [(\bar{A})^c \cup ((A^\circ)^c)^c]$$

$$= A \cap ((\bar{A})^c \cup A^\circ)$$

$$= \underbrace{(A \cap \bar{A}^c)}_{\phi} \cup (A \cap A^\circ)$$

$$= \phi \cup A^\circ = A^\circ$$

$\boxed{7}$ A مفتوحة $\Longleftrightarrow$ $A \cap Fr\, A = \phi$

$(\Leftarrow)$ A مفتوحة $\Leftarrow$ $A^\circ = A$

$$A \cap Fr\, A = A^\circ \cap (\bar{A} \setminus A^\circ)$$

$$= A^\circ \cap \bar{A} \cap (A^\circ)^c$$

$$= (A^\circ \cap (A^\circ)^c) \cap \bar{A}$$

$$= \phi \cap \bar{A} = \phi$$

$(\Rightarrow)$ اذا كان $A \cap Fr\, A = \phi \Longleftarrow A \cap (\bar{A} \setminus A^\circ) = \phi$

وبالتالي

$$\phi = A \cap (\bar{A} \cap (A^\circ)^c)$$

$$= (A \cap \bar{A}) \cap (A^\circ)^c$$

$$\phi = A \cap (A^\circ)^c \Longrightarrow$$

$$A \subseteq A^\circ \subseteq A$$

$\Longrightarrow A = A^\circ \Longrightarrow$ A مجموعة مفتوحة

/ /

$$\delta(A\cup B) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$$ 8

الحل :

اذا كان $\delta(A)=\infty$ أو $\delta(B)=\infty$

فإن $\delta(A\cup B)=\infty$

والمتراجحة محققة من أجل $\infty=\infty$

اذاً فقط نأخذ الحالة :

$\delta(A)\,,\ \delta(B)\in\mathbb{R}$

لتكن $a\in A$, $b\in B$ ~~نبين~~ أن

$\forall x,y\in A\cup B$:

$$d(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

نميز أربع حالات :

① اذا كان $x\in A\,,\ y\in B$ في هذه الحالة :

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$$

$x,a\in A$, $y,b\in B$

$$d(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

② $x,y\in A$

$$d(x,y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

③ $x,y\in B$

$$d(x,y) \leq \delta(B) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

④ $x\in B\,,\ y\in A$

$$d(x,y) \leq d(x,b) + d(b,a) + d(a,y)$$

$x,b\in B$, $a,y\in A$

$$d(x,y) \leq \delta(B) + d(a,b) + \delta(A)$$

/ /

في جميع الحالات وجدنا $\forall x,y \in A\cup B$

فإن $d(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$

تذكرة: $\delta(A\cup B) = \sup_{x,y\in A\cup B} d(x,y)$

$$\Rightarrow \delta(A\cup B) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

$$\Rightarrow \delta(A\cup B) - \delta(A) - \delta(B) \leq d(a,b) \quad \forall a\in A,\ b\in B$$

$$\Rightarrow \delta(A\cup B) - \delta(A) - \delta(B) \leq \inf d(a,b) = d(A,B)$$

$$\Rightarrow \delta(A\cup B) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$$

$\boxed{9}$ $\delta(A) = \delta(\bar{A})$ $\in \mathbb{R}$

واضح أن $A \subseteq \bar{A} \Leftarrow \delta(A) \leq \delta(\bar{A})$

ولنبرهن أن $\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$

من التعريف $\delta(\bar{A}) = \sup_{x,y\in\bar{A}} d(x,y)$ ومن أجل $0<\varepsilon$

فإنه يوجد $D = \{d(x,y) : x,y\in\bar{A}\}$ بحيث

$\delta(\bar{A}) - \varepsilon < d(x,y)$

ولكن $x,y\in\bar{A} \Leftarrow$ يوجد حسب مبرهنة سابقة يوجد متتالية $\{x_n\}$ من عناصر A متقاربة من x، ومتتالية $\{y_n\}$ من عناصر A متقاربة من y بحيث

$$x_n \to x \ , \quad y_n \to y$$

/ /

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad x_n, y_n \in A$$
$$d(y_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \delta(\bar{A}) - \varepsilon < d(x, y) \leq d(x, x_n) + \underbrace{d(x_n, y_n)}_{\in A} + d(y_n, y)$$

$$\delta(\bar{A}) - \varepsilon < \underbrace{d(x, x_n)}_{0} + \delta(A) + \underbrace{d(y_n, y)}_{0}$$

بجعل $n \to \infty$ نجد

$$d(x_n, x) \to 0 \quad , \quad d(y_n, y) \to 0$$

$$\Rightarrow \delta(\bar{A}) - \varepsilon \leq \delta(A)$$

بجعل $\varepsilon \to 0$ نجد

$$\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$$
$$\delta(\bar{A}) \leq \delta(A) \leq \delta(\bar{A})$$

ومنه $\delta(A) = \delta(\bar{A})$

سؤال دورة...

10 f مستمر على X $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall A \subseteq X ; f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}}$ *

($\Leftarrow$) f مستمرة على X ولدينا $\overline{f(A)}$ ومغلقة

الأخيرة لصادقة الصورة ومغلقة في Y

وبالتالي حسب (نتيجة سابقة) الصورة العكسية لها مغلقة

$$f^{-1}(\overline{f(A)})$$

وبما أن

$$f(A) \subseteq \overline{f(A)}$$

من خواص الصورة العكسية $\Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$

كما أن $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$$A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$ وبالتالي

حسب تعريف سابقة $\Rightarrow \bar{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$

$$\Rightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

$\forall A \subseteq X$

$(\Rightarrow)$ لكن محققة ★ ونبرهن أن f مستمرة على X

(حسب النتيجة كل مجموعة مغلقة في Y مغلقة في X)

لتكن B مجموعة مغلقة في Y ولنثبت أن صورتها العكسية مغلقة في X

لنكتب $A = f^{-1}(B)$

$$\overline{f(f^{-1}(B))} = f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} = f(\overline{f^{-1}(B)})$$

من ★

ولدينا

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

لكن B مغلقة فإن $\bar{B} = B$

$$\Rightarrow f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \bar{B}$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$$

وبالتالي $f^{-1}(B)$ مغلقة في X اذاً f مستمرة على X

11. f مستمرة على $X \iff \boxed{\forall A \subseteq Y : \overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})}$ *

الحل: $(\Leftarrow)$ f مستمرة على X ونريد البرهان *

لتكن $A \subseteq Y$ لدينا $A \subseteq \overline{A} \Leftarrow$

$$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$$

$\overline{A}$ مغلقة و f مستمرة فرضاً إذاً $f^{-1}(\overline{A})$ مغلقة

وتحوي $f^{-1}(A)$ إذاً $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ حسب مبرهنة سابقة

$(\Rightarrow)$ لتكن * صحيحة ونريد برهان أن f مستمرة على X

لتكن $A \subseteq Y$ مغلقة في Y وبالتالي $\overline{A} = A$

وبالتالي $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A}) = f^{-1}(A)$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(A)$$

$$f^{-1}(A) \subseteq \overline{f^{-1}(A)}$$

إذاً $\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(A)$

ومنه $f^{-1}(A)$ مغلقة في X ومنه f مستمرة على X حسب المبرهنة السابقة

خديجة & رشا

د. أحمد هابيل

2019 / 4 / 13

التبولوجي (1)

المحاضرة: الثانية عشر *

" التراص في الفضاءات المترية " " التبولوجية "

- تعريف:
- ليكن (X, d) فضاء متري $K \subseteq X$ نقول عن الجماعة $\Gamma = \{A_i : i \in \Delta\}$ من المجموعات الجزئية في X أنها تغطية للمجموعة K اذا كان $K \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} A_i$

ونقول أنَّ $\Gamma_1 = \{A_i : i \in J\}$ تغطية جزئية من Γ اذا كان $J \subseteq \Delta$.

ونقول أن التغطية Γ_1 منتهية اذا كان عدد مجموعاتها منتهي أي J منتهي

ونقول عن التغطية Γ مفتوحة اذا كانت المجموعات A_i مفتوحة.

تعريف المجموعة المتراصة:

- نقول عن المجموعة $K \subseteq X$ إنها متراصة إذا أمكن أن نستخرج من أي تغطية مفتوحة للمجموعة K تغطية جزئية منتهية.

بمعنى آخر..

اذا كانت $\Gamma = \{O_i : i \in \Delta\}$ تغطية مفتوحة لـ K عندئذٍ توجد تغطية جزئية منتهية من التغطية المفترحة لـ K مثل:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} O_i \Rightarrow \exists \{O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots\ldots, O_{i_n}\} \subseteq \Gamma$$

$$; \quad K \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \ldots\ldots \cup O_{i_n}$$

/ /

* ونقول عن الفضاء X متراص إذا كانت المجموعة $X = K$ متراصة.

أمثلة: 1) * كل مجموعة منتهية في فضاء متري (X,d) تكون متراصة

<< وضحوها >> [[لم يقم الدكتور بإثباتها]]

الإثبات: لتكن K مجموعة منتهية بحيث: $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

ولتكن S تغطية مفتوحة لـ K بحيث $S = \{A_i, i \in I\}$

وبما أن S تغطية مفتوحة لـ K فهي تحقق التعريف:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

عندئذ: $\forall\, x_1 \in K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists A_{i_1} \in S : x_1 \in A_{i_1}$

$$\forall\, x_2 \in K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists A_{i_2} \in S : x_2 \in A_{i_2}$$

$$\vdots$$

$$\forall\, x_n \in K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists A_{i_n} \in S : x_n \in A_{i_n}$$

ومنه نجد أن: $K \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n}$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

إذاً K متراصة.

2) إذا كانت متتالية $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ من فضاء متري متقاربة من x فالمجموعة $K = \{x_n\} \cup \{x\}$ متراصة.

الحل: لتكن $S = \{A_i, i \in I\}$ تغطية مفتوحة لـ K $\Leftarrow$

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

ولكن $x \in K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 : x \in A_{i_0}$

وبما أن A_{i_0} مجموعة مفتوحة أي يوجد $r>0$ بحيث:

$$N(x,r) \subseteq A_{i_0}$$

ولما كانت x نهاية المتتالية أي $x_n \longrightarrow x$ فإنها ستحوي جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهي منها

ومنه يوجد n_0 بحيث:

$$\forall n \geq n_0 \ ; \ x_n \in N(x,r) \subseteq A_{i_0}$$

أما بخصوص العناصر $x_1, x_2 \ldots x_{n_0}$ فإنه:

$$x_1 \in K \ ; \ \exists A_{i_1} \in S \ : \ x_1 \in A_{i_1}$$
$$x_2 \in K \ ; \ \exists A_{i_2} \in S \ : \ x_2 \in A_{i_2}$$
$$\vdots$$
$$x_{n_0-1} \in K \ ; \ \exists A_{i_{n_0-1}} \in S \ : \ x_{n_0-1} \in A_{i_{n_0-1}}$$

وبالتالي حصلنا على $S' = \{A_{i_0}, A_{i_1}, A_{i_2} \ldots A_{i_{n_0-1}}\}$

$$\Rightarrow K \subseteq A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{n_0-1}\}$$

أي أن S' تغطية جزئية منتهية من S $\Leftarrow$ K متراصة .

3) $(\mathbb{R}, |.|)$ فضاء غير متراص .

لنأخذ التغطية المفتوحة $\Gamma = \{]-n, n[\ ; n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, n[$$

في هذه التغطية لا يمكن أن نجد فيها تغطية جزئية منتهية

لأنه إذا أخذنا

$$]-n_1, n_1[, \ldots,]-n_r, n_r[\subseteq \Gamma \ , \ r \in \mathbb{N}^*$$

فإن

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{i=1}^{r}]-n_i, n_i[=]-n, n[$$

حيث $n = \max_{1 \leq i \leq r} [n_i]$

/ /

التوضيح : اذا أخذنا المجموعة : $S = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$

بحيث أن

$Q_1 =]-1, 1[$

$Q_2 =]-2, 2[$

$\vdots$

$Q_n =]-n, n[$

من الواضح أن Q_n عبارة عن مجموعة مفتوحة بحيث أن $1 \leq n$

وكما أن S تغطية لأن

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} Q_n = \mathbb{R}$$

ولتكن S' مجموعة جزئية منتهية من S

$$S' = \{Q_{n_1}, Q_{n_2}, \dots, Q_{n_n}\}$$

$n = \max\{n_1, \dots, n_n\}$

$$n_i \leq n$$

$$Q_{n_i} \subseteq Q_n$$

$$\Rightarrow \bigcup Q_{n_i} \subseteq Q_n$$

ولنفرض جدلاً أن S' تغطية لـ $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_{n_i} \subseteq Q_n =]-n, n[$$

وهذا مستحيل $\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ غير متراصة.

تمرين : في $(\mathbb{R}, |.|)$ اذا كانت $\{I_n\}_{n \in N^*}$ مجالات بحيث

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \dots$$

I_n طول المجال $\ell(I_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$

فإن $I_n = \{a_n, b_n\}$

ويكون $x = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$

/ /

$a_n \longrightarrow a$ ، متزايدة $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$

$b_n \longrightarrow b$ ، متناقصة $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$

$\ell(I_n) = b_n - a_n \longrightarrow b - a = 0 \quad ; \quad x = a = b$

مثال : $I_1 = [0,1]$ مجموعة متراصة في $(\mathbb{R}, |.|)$

تمرين : ليكن (X, δ) حيث X مجموعة غير منتهية عبرهن أن X فضاء غير متراص

وليكن δ معرفة بالشكل :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

الحل : إن الفضاء X غير متراص لأن التغطية المفتوحة $\{\{x\} : x \in X\} =$ حيث $\{x\}$ مجموعة مفتوحة و $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ تغطية مفتوحة ولا يمكن أن نستخرج منها تغطية جزئية منتهية من حيث

غير منتهية $X \neq \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \{x_n\} = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ منتهية

مبرهنة : ليكن X فضاء منتهِ ، K مجموعة متراصة $\Leftarrow$ K مغلقة.

البرهان : سنبرهن أن K مغلقة وذلك ببرهان أن K^c مفتوحة

ليكن $y \in K^c$.

لدينا المجموعة $\Gamma = \{N(x,r) : x \in K, r = \frac{1}{2} d(x,y)\}$ هي تغطية مفتوحة لـ K لأن :

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} N(x,r)$$

وبما أن K متراصة $\Leftarrow$ هناك تغطية جزئية منها ولتكن

$$\{N(x_1,r_1), \dots, N(x_n,r_n)\} \subseteq \Gamma$$

$$K \subseteq N(x_1,r_1) \cup \dots \cup N(x_n,r_n)$$

عندئذٍ $N(y,\varepsilon) \subseteq K'$ حيث $\varepsilon = \min\{r_1, \dots r_n\}$

وذلك لأن: $\phi = N(y,\varepsilon) \cap N(x_i, r_i) \; ; \; i \in \{1, \dots n\}$

لأنه إذا كانت

$$\exists \in N(y,\varepsilon) \cap N(x_i, r_i)$$

فإن:

$$\exists \in N(y,\varepsilon) \; , \; \exists \in N(x_i, r_i)$$

$$d(\exists, y) < \varepsilon \leq r_i$$
$$d(\exists, x_i) < r_i$$
$$\Rightarrow d(x_i, y_i) \leq d(x_i, \exists) + d(\exists, y_i)$$

$$< r_i + r_i = 2r_i = d(x_i, y)$$

وهذا غير ممكن

$$N(y,\varepsilon) \cap K \subseteq N(y,\varepsilon) \cap N(x_i, r_i)$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N(y,\varepsilon) \cap N(x_i, r_i)$$

$$= \phi \cup \phi \cup \dots \cup \phi = \phi$$

أي: $N(y,\varepsilon) \cap K = \phi$

ومنه $N(y,\varepsilon) \subseteq K'$ ومنه فإن K' مجموعة مفتوحة

ومنه K مغلقة.

مبرهنة: K متراصة $\Leftarrow$ K محدودة.

<u>البرهان</u>: لتكن $x_0 \in X$ ولتكن $\Gamma = \{N(x_0, n) : n \in N^*\}$

تغطية لـ K وبالتالي:

$$K \subseteq \bigcup_{x=1}^{\infty} N(x_0, n)$$

لأنه إذا كان:

$$x \in X \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : d(x_0, x) < n \Rightarrow x \in N(x_0, n)$$

ولكون K متراصة فتوجد تغطية جزئية منتهية مثل :

$$\{N(x_0,n_1), N(x_0,n_2), \dots, N(x_0,n_m)\}$$

وبالتالي :

$$K \subseteq N(x_0,n_1)\cup N(x_0,n_2)\cup \dots \cup N(x_0,n_m) = N(x_0,n)$$

حيث $n = \max n_i$
$1 \le i \le m$

$$\Rightarrow K \subseteq N(x_0,n)$$

ومنه K محدودة.

نتيجة : اذا كانت K متراصة فإن K مغلقة ومحدودة ولكن العكس غير صحيح دوماً.

مثال : الفضاء (X,S) حيث X مجموعة غير منتهية

$$S(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

ولتكن $K\subseteq X$ أي مجموعة غير منتهية

$K \subseteq X \subseteq N(x_0,2)$ حيث K مغلقة ومحدودة ولكنها غير متراصة كما رأينا سابقاً.

تمرين :

أ - لتكن f مستمر حيث $f:(X,d)\to(Y,d)$ فإن

$$\bar{A}=\bar{B} \Rightarrow \overline{f(A)} = \overline{f(B)}$$

ب - X فضاء متراص $\Leftrightarrow$ أي جماعة $\{F_i ; i\in\Delta\}$ من المجموعات المغلقة التي يكون تقاطع عدد منته من مجموعاتها غير خالٍ يكون تقاطع كل مجموعاتها غير خالٍ.

مبرهنة : اذا كانت K مغلقة في فضاء متري متراص فإن K متراصة.

البرهان : لإثبات أن K متراصة نأخذ تغطية مفتوحة ما لـ K

ولتكن $\Gamma = \{O_i ; i\in\Delta\}$ أي :

$$K \subseteq \bigcup_{i\in\Delta} O_i$$

وبما أن الفضاء X متراص فإنه $X = K\cup K^c \subseteq \left(\bigcup_{i\in\Delta} O_i\right)\cup K^c = X$

اذاً $\{K^c\} \cup \{O_i \; ; \; i \in D\}$

تغطية مفتوحة للفضاء المتراص X ، اذاً توجد تغطية جزئية منتهية منها

إما K^c من التغطية الجزئية أي $x = O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \cup K^c$

$$\Rightarrow K = K \cap X = (K \cap O_{i_1}) \cup (K \cap O_{i_2}) \cup \dots \cup (K \cap O_{i_n}) \cup (K \cap K^c)$$

تغطية منتهية $K \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$

أو K^c ليست من التغطية المنتهية لـ X أي :

$$K \subseteq X = O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$$

اذاً في هذه الحالة لدينا :

$\{O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_n}\}$ تغطية جزئية منتهية لـ K

وبالتالي K مجموعة متراصة .

تمرين : لتكن $f : X \longrightarrow Y$ مستمر على $X \Leftrightarrow \forall A \subseteq Y : f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$

$(\Leftarrow)$ f مستمرة على X فرضاً ، $\Leftarrow$ A° مجموعة مفتوحة في Y ومنه $f^{-1}(A^\circ)$ مجموعة مفتوحة في X .

$$A^\circ \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(A^\circ) \subseteq f^{-1}(A)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$$

$(\Rightarrow)$ إن العلاقة صحيحة فرضاً ونبرهن أن f مستمرة على X .

إذا كانت A مجموعة مفتوحة في Y فإن : $A = A^\circ$ إذن من

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ \subseteq f^{-1}(A)$$

اذاً $(f^{-1}(A))^\circ = f^{-1}(A)$

ومنه $f^{-1}(A)$ مفتوحة في X فيكون f مستمرة على X .

خديجة الرفاعي و رش القرحية

د. أحمد الهابيل

/ /

"التبولوجيا (I)"

المحاضرة: الثالثة عشر:

* سنتابع في هذه المحاضرة ببعض النتائج والمبرهنات في بحث التراص..

نتيجة: اذا كان (X,d) فضاء متري و $K \subseteq X$ متراصة و $H \subseteq K$ مغلقة في (X,d) فإن H متراصة.

البرهان: مشابه تماماً للمبرهنة السابقة"

مبرهنة: (X,d) فضاء متري إذا كان A مجموعة غير منتهية محتواة في K متراصة، فإن K تحوي لنقطة حدية لـ A واحدة على الأقل.

البرهان:

لنفرض جدلاً أنه لا توجد في K نقطة حدية لـ A اذاً مهما تكن $x \in K$ فإن x ليست نقطة حدية

تذكرة: تعريف النقطة الحدية: $\forall r > 0 : N(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$

فإذا كانت غير حدية تصبح: $\exists r_x > 0 : N(x,r_x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$

اذاً يوجد $0 < r_x$ بحيث:

$$N(x,r_x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$$

$$\Rightarrow N(x,r_x) \cap A \subseteq \{x\}$$

الشرح:

$$N(x,r_x) \cap A \cap \{x\}^c = \phi$$

$$\Rightarrow N(x,r_x) \cap A \subseteq \{\{x\}^c\}^c = \{x\}$$

لدينا $\{N(x,r_x) ; x \in K\}$ هي تغطية مفتوحة لـ K، وبما أن K متراصة فتوجد تغطية جزئية منتهية فيها ولتكن

أي: $\{N(x_1,r_{x_1}), \dots, N(x_n,r_n)\}$

/ /

$$K \subseteq N(x_1, r_{x_1}) \cup \dots \cup N(x_n, r_{x_n})$$

$$A = A \cap K \subseteq (A \cap N(x_1, r_{x_1})) \cup \dots \cup (A \cap N(x_n, r_{x_n}))$$

$$A \subseteq \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

غير منتهية $\boxed{\subseteq}$ منتهية

وهذا غير ممكن وبالتالي

توجد في K نقطة حدية لـ A واحدة على الأقل .

ملاحظة :

ما تؤكده المبرهنة السابقة هو أن $A' \neq \phi$

وذلك بسبب التراص وذلك لأنه يكفي أن تكون

K مغلقة لكي يكون $(A' \subseteq K)$ لأن K مغلقة $\Leftarrow$

ولدينا : $K' \subseteq K$.

$$A \subseteq K \Rightarrow A' \subseteq K' \subseteq K \Rightarrow A' \subseteq K$$

مثال : في $(\mathbb{R}, |.|)$ ، $K = \mathbb{R}$ مغلقة ، $\mathbb{Z} = A$

و A غير منتهية ، و $A \subseteq K$ لكن $A' = \phi$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow N(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow N(x, \tfrac{1}{2}) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$$

نتيجة : إذا كانت K متراصة في (X, d) وكانت $\{x_n\}$ متتالية

من عناصر K فإن $\{x_n\}$ تحوي متتالية جزئية متقاربة من $x \in K$

البرهان : لدينا حالتان :

1) مجموعة نقاط المتتالية $\{x_n\}$ منتهية .

أي أنها تساوي عدد منتهي ولتكن :

$$\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

عندئذ هناك على الأقل نقطة ثابتة أي تساوي عدد غير منتهي من الحدود

إذن يمكن إيجاد متتالية

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

بحيث يكون : $a_r = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots$

اذاً $\{x_{n_k}\}$ هي متتالية جزئية من $\{x_n\}$ متقاربة من $a_r \in K$

ب) مجموعة نقاط المتتالية غير منتهية اذاً نرمز لهذه المجموعة بـ A فيكون $A \subseteq K$ غير منتهية

اذاً حسب المبرهنة السابقة لـ A يوجد نقطة حدية في K مثل $x \in K$

اذاً

$$\forall r > 0 : N(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

لنأخذ $r_1 = 1$ اذاً :

$$N(x, r_1) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

نختار من هذه المجموعة العنصر x_{n_1} بحيث يكون n_1 هو أصغر دليل لعنصر من A في هذه المجموعة اذاً :

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \notin N(x_1, r_1) \cap (A \setminus \{x\})$$

من أجل :

$$0 < r_2 = \min\{\tfrac{1}{2}, d(x, x_{n_1})\}$$

$$\Rightarrow N(x, r_2) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$$

نختار من هذه المجموعة العنصر x_{n_2} بحيث يكون أصغر دليل لعنصر من A في هذه المجموعة . اذاً

$$d(x, x_n) < r_2 < d(x, x_{n_1})$$

$$d(x_{n_2}, x) < \tfrac{1}{2} \quad x_{n_2} \neq x_{n_1}$$

كذلك $n_1 < n_2$

وهكذا بشكل مشابه نجد أن $n_3, n_4, \dots\dots$

بحيث يكون النقاط :

$$n_1 < n_2 < \dots, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$$

اذاً نكون قد حصلنا على متتالية جزئية من $\{x_n\}$

$$d(x_{n_r}, x) < \frac{1}{r}$$

/ /

وبالتالي $d(x_{n_i}, x) \longrightarrow 0$
$i \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow x_{n_i} \longrightarrow x$

** مبرهنة : لتكن $f:(X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$
f مستمر على X و $K \subseteq X$ متراصة $\Leftarrow f(K)$
متراصة في Y

البرهان :

لتكن $\{O_i \; , i \in \Delta\}$ تغطية مفتوحة لـ $f(K)$
في Y إذاً :

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in\Delta} O_i$$

وبالتالي : $K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in\Delta} O_i) = \bigcup f^{-1}(O_i)$

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i\in\Delta} f^{-1}(O_i)$$

إذاً $\{f^{-1}(O_i) \; , i\in\Delta\}$ تغطية مفتوحة
لـ K ((لأنه بما أن f مستمر و O_i مجموعة مفتوحة ~~حسب~~ حسب مبرهنة
سابقة))

وبما أن K متراصة $\Leftarrow$ هناك تغطية جزئية منتهية مثل :

$$\{f^{-1}(O_{i_1}), \ldots, f^{-1}(O_{i_n})\}$$

$$\Rightarrow K \subseteq f^{-1}(O_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(O_{i_n})$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f(f^{-1}(O_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(O_{i_n}))$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$$

/ /

اذا $\{O_{i_1}, \dots, O_{i_n}\}$ تغطية جزئية منتهية لـ $f(K)$

ومنه نجد أن $f(K)$ متراصة.

تمرين : اذا كان f مستمر على X حيث

$$f:(X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$$

و $A \subseteq X$ متراصة فإن :

$$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$$

لدينا A متراصة في X حسب مبرهنة سابقة فإن $f(A)$ متراصة في Y . ومنه حسب مبرهنة سابقة $f(A)$ مغلقة ومنه حسب مبرهنة سابقة :

$$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$$

$f: X \longrightarrow Y$

تمرين : f مستمرة على X $\Longleftrightarrow$ $\forall A \subseteq X : Fr\, f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(Fr(A))$

$(\Leftarrow)$ f مستمرة على X $\Leftarrow$

$$Fr\, f^{-1}(A) = \overline{f^{-1}(A)} \setminus (f^{-1}(A))^\circ$$

$$Fr\, f^{-1}(A) = \overline{f^{-1}(A)} \cap ((f^{-1}(A))^\circ)^c$$

من تمرين سابق

$$1)\ \overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\bar{A})$$

$$f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$$

$$2)\ ((f^{-1}(A))^\circ)^c \subseteq (f^{-1}(A^\circ))^c$$

تقاطع المتراجحتين (1) و (2)

$$Fr\, f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\bar{A}) \cap (f^{-1}(A^\circ))^c$$

$$Fr\, f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\bar{A}) \cap f^{-1}((A^\circ)^c)$$

$$Fr\, f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\bar{A} \cap (A^\circ)^c)$$

$$Fr\, f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\bar{A} \setminus A^\circ)$$

$$Fr\, f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(Fr(A))$$

$(\Rightarrow)$ نفرض أن * صحيحة ولنبرهن أن f مستمر على X

لنأخذ A مجموعة مفتوحة في Y، ولنبين أن $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة، (استناداً لتمرين سابق)

أي برهان أن:

$$f^{-1}(A) \cap Fr\, f^{-1}(A) \overset{?}{=} \phi$$

$$Fr\, f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(Fr(A)) \cap f^{-1}(A)$$

$$\Rightarrow (Fr\, f^{-1}(A)) \cap f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}((Fr A) \cap A)$$

$(Fr\, A) \cap A = \phi$ لأن A مفتوحة فرضاً

إذاً:

$$(Fr\, f^{-1}(A)) \cap f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\phi) = \phi$$

$$\Rightarrow Fr\, f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A) = \phi$$

إذاً $f^{-1}(A)$ مفتوحة في X،

إذاً f مستمر على X. (حسب برهنة)

تمرين: $f: X \longrightarrow Y$ مستمرة على X
$A, B \subseteq X : \bar{A} = \bar{B} \Rightarrow \overline{f(\bar{A})} = \overline{f(\bar{B})}$

الحل: بما أن f مستمر على X اذاً:
$f(B) \subseteq f(\bar{B}) = f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
حسب تمرين سابق
$\Rightarrow f(B) \subseteq \underbrace{\overline{f(A)}}_{\text{منغلقة}} \Rightarrow \overline{f(B)} \subseteq \overline{f(A)}$

وبشكل مشابه:
$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(B)}$
اذاً $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$

تمرين: X فضاء متري و X متراص $\Leftrightarrow$ اذا كانت $\{F_i : i \in D\}$ جماعة الجموعات المنغلقة
$\underbrace{\forall J \subseteq D : \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset}_{*} \Rightarrow \bigcap_{i \in D} F_i \neq \emptyset$

الحل: X متراص ولدينا $\{F_i : i \in D\}$ جماعة من المغلقات بحيث
أن تقاطع أي جماعة عدد منتهي من عناصرها لا يساوي الخالية
والمطلوب برهان أن:
$\bigcap_{i \in D} F_i \neq \emptyset$
وهذا صحيح لأنه اذا كانت: $\bigcap_{i \in D} F_i = \emptyset$

$\Rightarrow \left(\bigcap_{i \in D} F_i\right)^c = \emptyset^c \Rightarrow X = \bigcup_{i \in D} F_i^c$

اذاً $\{F_i^c : i \in D\}$ تغطية مفتوحة لـ X (لأن F_i منغلقة)
وكذلك كون X متراصة هناك تغطية جزئية منتهية

$\{F_{i_1}^c, \dots, F_{i_n}^c\}$

/ /

بحيث $X = F_{i_1}^c \cup \dots \cup F_{i_n}^c$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{r=1}^{n} F_{i_r}^c \Rightarrow$$

$$\phi = \left(\bigcup_{r=1}^{n} F_{i_r}^c\right)^c = \bigcap_{r=1}^{n} F_{i_r} = \phi$$

وهذا يناقض الفرض لكون التقاطع غير خالي ومنه

$$\bigcap_{i \in D} F_i \neq \phi$$

$(\Rightarrow)$ الشرط * محقق ونريد اثبات أن X متراص

لتكن $\{O_i \; ; \; i \in D\}$ تغطية مفتوحة لـ X

اذن ؛

$$X = \bigcup_{i \in D} O_i \Rightarrow$$

بأخذ المتمم $\phi = \bigcap_{i \in D} O_i^c$

اذاً $\{O_i^c \; ; \; i \in D\}$ جماعة من المجموعات المغلقة في X

بحيث تقاطع كلها يساوي ϕ

اذاً وجدنا ؛

$J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$

$$\bigcap_{r=1}^{n} O_{i_r}^c = \phi$$

تذكرة

$\forall J \subseteq D : \bigcap_{i \in J} F_i \neq \phi \Rightarrow$

$\bigcap_{i \in D} F_i \neq \phi$

* $\bigcap_{i \in D} F_i = \phi \Rightarrow$

$\exists J \subseteq D : \bigcap_{i \in J} F_i = \phi$

بأخذ المتمم

$$X = \bigcup_{r=1}^{n} O_{i_r} = O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$$

تغطية جزئية منتهية لـ X

اذاً X متراصة .

انتهت المحاضرة