٢٥/٢/٢٠١٩

المادة: تحليل ٤ — الدكتورة: هدى شماط

المحاضرة: الأولى

* الفصل الأول: مقدمة في طبولوجيا الفضاءات الإقليدية $\mathbb{R}^n$
تعريف بعض الفضاءات (متري - منظم - جداء داخلي متري)
تعاريف طبولوجية - المجموعة ~~[illegible]~~ المتراصة - المجموعة المترابطة
النهايات والاستمرار في $\mathbb{R}^n$.

* الفصل الثاني: دراسة الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات
المشتق الجزئي
المشتق الاتجاهي ومشتق فريشيه
خواص الدوال القابلة للاشتقاق.

* الفصل الثالث: تطبيقات الحساب ~~[illegible]~~ التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات
نظرية القيمة الوسطى
نظرية تايلور
نظرية القيم القصوى (عظمى - صغرى)

* الفضاء المتري: لتكن X مجموعة ما ولنعرف عليها عمليتين
الأولى عملية الجمع $(+)$ والأخرى ضرب بعدد حقيقي وبالتالي الشروط التالية محققة:

$\forall x, y, z \in X$

1) $x + y \in X$
2) $x + y = y + x$
3) $x + (y + z) = (x + y) + z$
4) $\exists 0 \in X \quad x + 0_X = 0_X + x = x$
5) $\exists -x \in X \quad (-x) + x = x + (-x) = 0_X$

$\Rightarrow$ زمرة $(X, +)$ تبديلية

- بالنسبة للضرب بعدد حقيقي :

$\forall x, y \in X \quad , \forall \alpha, \beta \in R$

1') $\alpha x \in X$

2') $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

3') $(\alpha . \beta) x) = \alpha . (\beta x)$

4') $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

5') $\exists 1_R \in R \Rightarrow 1_R . x = x$

إذا تحققت الشروط السابقة عندئذ نقول عن $(X, +, .)$ فضاء متجهي

* الفضاء الإقليدي : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية ولنأخذ الجداء الديكارتي لـ R في نفسها n مرة عندئذ نحصل على : $R^n = \underbrace{R \times R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ مرة}}$

ولنعرف على R^n عمليتي الجمع والضرب بعدد بالتالي :

$\forall x, y \in R^n$

$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$\alpha x = \alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n$

أي $(R^n, +, .)$ فضاء متجهي

حيث حيادي $(+)$ هو $0_{R^n} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ مرة}})$

والنظير $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

مثال: لتكن $X = C[a,b]$ مجموعة كل الدوال الحقيقية والمستمرة على المجال $[a,b]$ ولنعرف على $X = C[a,b]$ عمليتي الجمع والضرب بعدد بالتالي:

$x, y \in C[a,b]$ ، $\forall t \in [a,b]$

1) $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$

2) $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$

إذاً $(C[a,b], +, \cdot)$ تشكل فضاء شعاعي.

تحليل -٤-

* تعريف الفضاء المنظم : ‖.‖

هو عبارة عن دالة حقيقية منظومة

الفضاء بحيث

$x \longrightarrow \|x\|$

شروطه : $\forall x, y \in X$

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \iff x = 0_x$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

وهي تدعى متراجحة المثلث

مثال :

$\forall x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

برهن ان $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ فضاء منظم حيث

$x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

الحل

1) $|x_i| \geq 0 \implies \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$

$\iff \|x\| \geq 0$

لأن القيمة المطلقة لكل مركبات العنصر x

وبالتالي هي غير سالبة حتماً مجموع

موجب

2) $\|x\| = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$

$\iff |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 0$

مجموع المقادير الموجبة يساوي الصفر إذا

كل المقادير تساوي الصفر

ملاحظة

[1] نعرض $(l^\infty, +, \cdot)$ فضاء متجه
حيث l^∞ مجموعة كل المتتاليات الحقيقية والمحدودة أي

$x = \{x_i\} \in l^\infty_{i \geq 1}$

$\exists C_x \in R : |x_i| \leq C_x$

ونعرف على l^∞ عمليتي الجمع والضرب التالي

$x, y \in l^\infty$

$x + y = \{x_i + y_i\}_{i \geq 1}$

$\alpha x = \alpha \{x_i\}_{i \geq 1} = \{\alpha x_i\}_{i \geq 1}$

برهن أن الدالة المعرفة بالشكل التالي:

$\|x\| = \sup_{i \geq 1} |x_i|$ *

هي دالة نظيم على l^∞.

[2] ليكن $X = C[a,b]$ فضاء متجه
ونعرف عليه الدوال التالية:

$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$

$\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt$

برهن أن $(X, \|.\|_1)$ فضاء منظم
و $(X, \|.\|_2)$ فضاء منظم

$|x_i| = 0 \quad ; i = (1, 2, 3, \ldots, n)$

$\Leftrightarrow x_i = 0 \; ; i = (1, 2, 3, \ldots n)$

$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$

$\Leftrightarrow x(0, 0, \ldots, 0) = 0_{R^n}$

3) $\|\alpha x\| = \sum_{i=1} |\alpha x_i|$

$= \sum_{i=1}^n |\alpha||x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|$

4) $\|x + y\| = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$

$= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$

$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

بما أنه حقق الشروط الأربعة
فإن $\|.\|$ دالة نظيم
ومنه $(R^n, \|.\|)$ فضاء منظم

* يمكن أن نعرف على نفس الفضاء أكثر من دالة نظيم

$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$

برهن أن $(R^n, \|.\|)$ دالة نظيم
ع R^n

الإثبات بعد كم صفحة
لأنه مراجعة كوشي شفارتز

Alamal

جبيرياماث

إعداد: كلية الصباح
علاء الدين الألفي

الجداء الداخلي: هو دالة معرفة على الجداء الديكارتي للفضاء الشعاعي X في نفسه ومستقرها $\mathbb{R}$ ونرمز لها بـ $\langle .,. \rangle$ أي

$$\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$$

* وتحقق هذه الدالة الشروط التالية:

$\forall x,y,z \in X \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) $\langle x,x \rangle \geq 0$
2) $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0_X$
3) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
4) $\langle x+y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$
$\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$
5) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$

عندئذٍ نقول عن $(X, \langle .,. \rangle)$ فضاء جداء داخلي.

مثال: لنعرف على $\mathbb{R}^n$ الدالة التالية

$$\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

اثبت أن $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ فضاء جداء داخلي؟

الحل: اثبت أن هذه الدالة هي دالة جداء داخلي؟

*) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) $\langle x,x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

2) $\langle x,x \rangle = 0$
$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i^2 = 0 \ ; \ i = 1,2,\dots,n$
$\iff x_i = 0 \ ; \ i = 1,2,\dots,n$
$\iff (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0,0,\dots,0)$
$\iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

3) $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y,x \rangle$

4) $\langle x+y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot z_i$
$= \sum_{i=1}^{n} (x_i z_i + y_i z_i)$
$= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$
$= \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

وبنفس الطريقة نجد

$\langle x, y+z \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i + z_i)$
$= \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

5) $\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) y_i$
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha (x_i y_i)$
$= \alpha \langle x,y \rangle$

بنفس الطريقة $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$

إذاً $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ فضاء جداء داخلي.

* يمكن تعريف أكثر من جداء داخلي على نفس الفضاء

* علاقة دالة الجداء الداخلي مع دالة النظيم

مبرهنة: إذا كان V فضاء جداء داخلي عندئذ

$$\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \quad \forall x,y\in V$$

البرهان:

نميز حالتين:

[1] $x = 0_V$ عندئذ

$$l_1 = \langle x,y\rangle^2 = \langle 0_V , y\rangle^2 = \langle 0_{\mathbb{R}}x , y\rangle^2 = 0_{\mathbb{R}}\langle x,y\rangle^2 = 0_{\mathbb{R}}$$

$$l_2 = \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle = \langle 0_V , 0_V\rangle \cdot \langle y,y\rangle = \langle 0_{\mathbb{R}}x , 0_{\mathbb{R}}x\rangle \cdot \langle y,y\rangle = 0_{\mathbb{R}}^2\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow l_1 = l_2$$

[2] إذا كانت $x \neq 0_V$ لنأخذ

من أجل أي $\alpha \in \mathbb{R}$

$y - \alpha x$

$$0 \le \langle y-\alpha x , y-\alpha x\rangle = \langle y,y\rangle - \langle y,\alpha x\rangle - \langle \alpha x , y\rangle + \alpha^2\langle x,x\rangle$$

$$= \langle y,y\rangle - 2\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle x,x\rangle$$

لنأخذ $\alpha = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$

عندئذ، نعوض *

$$0 \le \langle y-\alpha x , y-\alpha x\rangle = \langle y,y\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle^2}\langle x,x\rangle$$

$$0 \le \langle y,y\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}$$

$$0 \le \langle y,y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} \le \langle y,y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

وبالتالي المتراجحة محققة.

ملاحظة: تنقلب المتراجحة إلى مساواة إذا كانت $x = 0_V$ أو $y = 0_V$ أو $y = \alpha x$ أي y, x مرتبطين خطياً

وتسمى متراجحة كوشي شفارتز

مبرهنة: إذا كان V فضاء جداء داخلي فإن الدالة

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

تحدد نظيماً على V.

البرهان: نثبت شروط النظيم:

$$\forall x,y \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

1) $\langle x,x\rangle \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0$
$\Rightarrow \|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0$
$\iff \langle x,x\rangle = 0$
$\iff x = 0_V$

3) $\|x\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle x,x\rangle}$
$= |\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle}$
$= |\alpha|\,\|x\|$

4) $\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}$
$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$
$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

من متراجحة كوشي شوارز

$= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$
$\leq \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle$
$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$
$\leq (\|x\| + \|y\|)^2$
$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

متراجحة المثلث محققة.

إذن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم

نتيجة: إذا كان V فضاء جداء داخلي و $\|\cdot\|$ مولد من جداء داخلي.
عندئذ تتحقق المساواة التالية:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$

وتسمى مساواة متوازي الأضلاع.

كل جداء داخلي هو جداء منظم ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيح إلا إذا تحققت مساواة متوازي الأضلاع

مثال على ذلك: ليكن $X = \mathbb{R}^2$
ولنعرف عليه الدالة التالية: $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
أثبت أنها دالة جداء داخلي.

هي دالة ~~جداء~~ منظم أثبتناها سابقاً.
إن هذه الدالة دالة نظيم (سابقاً)

لنأخذ $x(1,1),\ y(1,-1) \in \mathbb{R}^2$

$\|x+y\| = \|(1,1) + (1,-1)\|$
$= \|(2,0)\| = |2| + |0| = 2$

$\|x+y\|^2 = 4$

$\|x-y\| = \|(1,1) - (1,-1)\|$
$= \|(0,2)\| = |0| + |2|$
$= |2| = 2$

$\|x-y\|^2 = 4$

$\|x\| = \|(1,1)\| = |1| + |1| = 2$

$\|x\|^2 = 4$

$\|y\| = \|(1,-1)\| = |1| + |-1| = 2$

$\|y\|^2 = 4$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8$

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(8) = 16$

$8 \neq 16$

وبالتالي المساواة غير محققة

أي أنه دالة النظم ليس بالضرورة أن يكون دالة جداء

داخلي .

إعداد: علاء الداي

كلية العلوم

فريق سيريا ماث

حل وظيفة:

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أثبت أن هذه الدالة هي دالة نظيم.

الحل:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \;,\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

الشرط الأول:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

الشرط الثاني:

$$\|x\| = 0 \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i^2 = 0 \quad ; i = 1 \cdots n$$

$$\iff x_i = 0 \quad ; i = 1 \cdots n$$

$$\iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$$

الشرط الثالث:

$$\|\alpha x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^2 x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \, \|x\|$$

الشرط الرابع :

$$\|x+y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2)$$

$$\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

لكن $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$ حسب البرهنة ومنه

$<x,x> = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ نعوض :

$$= <x,x> + 2<x,y> + <y,y>$$

?? $= \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2$

حسب كوشي شفارتز $\leq \|x\|^2 + 2\sqrt{<x,x>}.\sqrt{<y,y>} + \|y\|^2$

$<x,y> \leq \sqrt{}$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2$$

$$\Longrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

تمرين: $(\ell^{\infty}, +, \cdot)$ فضاء ينتمي على المتتاليات الحقيقية واللامحدودة

$$x = \{x_i\} \quad : i = 1 \longrightarrow n$$

$$y = \{y_i\} \quad : i = 1 \longrightarrow n$$

لنفرض على هذا الفضاء الدالة التالية:

$$\|x\| = \sup_{i \in N^*} |x_i|$$

أثبت أن $(\ell^{\infty}, +, \cdot)$ فضاء منظم.

الحل: $\forall x, y \in \ell^{\infty} \quad , \forall \alpha \in R$

1) $\|x\| = \sup_{i \in N^*} |x_i| \geqslant 0$

2) $\|x\| = 0 \iff \sup_{i \in N^*} |x_i| = 0$

$$\iff |x_i| = 0 \quad : i \in N^*$$

$$\iff x = 0_{\ell^{\infty}}$$

3) $\|\alpha x\| = \sup_{i \in N^*} |\alpha x_i|$

$$= |\alpha| \sup_{i \in N^*} |x_i|$$

$$= |\alpha| \cdot \|x\|$$

Sabbagh

4) $\|x+y\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i+y_i|$

★ $i\in\mathbb{N}^*$: $|x_i+y_i|$ حيث أننا أصغر حد أعلى لـ

$$|x_i+y_i| \leqslant |x_i|+|y_i| \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|y_i|$$

★★ أي أن $\sup|x_i|+\sup|y_i|$ هو حد أعلى لـ $|x_i+y_i|$

من ★ و ★★ نجد أن:

$$\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i+y_i| \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|y_i|$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$$

تمرين: $X=C[a,b]$ مجموعة الدوال المستمرة والحقيقية على $[a,b]$

نعرف على هذه المجموعة المتراجحة:

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

أثبت أن $(X,\|\cdot\|)$ فضاء منظم.

ثم بين أن هذه المتراجحة غير مولدة من جداء داخلي.

الحل : $X = C[a,b]$ فضاء متري .

$\forall x, y \in X = C[a,b] \quad , \forall \alpha \in R$

1) $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \iff \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)| = 0$

$\iff |x(t)| = 0 : t \in [a,b]$

$\iff x = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

3) $\|\alpha x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |(\alpha x)(t)|$

$= \max\limits_{t \in [a,b]} |\alpha x(t)| = |\alpha| \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$

$= |\alpha| \, \|x\|$

4) $\|x + y\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |(x+y)(t)|$

$= \max |x(t) + y(t)|$

$\leq \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) + y(t)|$

$\leq \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |y(t)|$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

$(C[a,b], \|\cdot\|)$ هو فضاء منظم.

ملاحظة إضافية: هل مساواة متوازي الأضلاع محققة

[ذلك لكي تكون الدالة مولدة من جداء داخلي]:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{?}{=} 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$

$$x(t) = \sin t \quad , t \in [0, 2\pi]$$

$$y(t) = 2$$

$$\|x+y\| = \max_{t\in[a,b]} |(x+y)(t)|$$

$$= \max_{t\in[0,2\pi]} |x(t) + y(t)|$$

$$= \max_{t\in[0,2\pi]} |\sin(t) + 2| = 3$$

$$\|x+y\|^2 = 9$$

$$\|x-y\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

$$= \max_{t\in[0,2\pi]} |(\sin t) - 2| = 3$$

$$\|x-y\|^2 = 9$$

$$l_1 = 18$$

$$\|x\| = \max_{[0,2\pi]} |\sin t| = 1$$

$$\|x\|^2 = 1$$

$$\|y\| = \max |y(t)| = \max |2| = 2$$

$$\|y\|^2 = 4$$

$$\Rightarrow l_2 = 2[1+4] = 10$$

$$l_1 \neq l_2$$

مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

إذاً التراجة غير مولدة من جداء داخلي.

الفضاء المتري:

لتكن X مجموعة ما ولنأخذ الجداء الديكارتي لـ $X \times X$

ولنعرف على هذا الجداء الدالة:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

بحيث تحقق الشروط الآتية:

$$\forall x, y, z \in X$$

1) $d(x, y) \geq 0$

2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x)$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

ندعو هذه الدالة بدالة مسافة، وندعو (X, d) فضاء متري

ملاحظة: يمكن تعريف أكثر من دالة مسافة على المجموعة نفسها.

مثال: لنعرف على الفضاء المتجهي R^n الدالة

$$d : R^n \times R^n \longrightarrow R^n$$

$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

أثبت أن هذه الدالة دالة مسافة.

الحل:

1] $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geqslant 0$

2] $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$

$\Longleftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad : i = 1 \cdots n$

$\Longleftrightarrow x_i - y_i = 0 \quad : i = 1 \cdots n$

$\Longleftrightarrow x = y$

3] $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d(y,x)$

4] $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i|$

$$|x_i - z_i + z_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$$

$$; i = 1 —— n$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$

اذن (R^n, d) فضاء متري .

ملاحظة:

كل نظيم على فضاء متجهي X يعرف متريا" d بالمساواة التالية:

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

د. هدى شماط

المحاضرة الرابعة تحليل 4.

٧ / ٣ / ٢٠١٩ م

Date: / / Subject:

المحتوى العلمي:

1) تعاريف عن الفضاء المتري والمنظم.

2) مبرهنات.

3) تعاريف تبولوجية.

أخذنا في الملاحظة بالمحاضرة السابقة:

$d(x,y) = \|x-y\|$

ندعو d متركاً مولداً من نظيم، كل فضاء منظم هو فضاء متري

مبرهنة: ليكن d متركاً على فضاء متجهي X ومولد من نظيم عندئذ تكون الشروط التالية محققة:

$\forall x, y, z \in X \qquad \forall \alpha \in R$

1) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$

الإثبات: $\forall x, y, z \in X \quad , \forall \alpha \in R$

1) $d(x+z, y+z) = \|x+z-y-z\| = \|x-y\|$
$= d(x,y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\|$
$= |\alpha| \, \|x-y\|$
$= |\alpha| \, d(x,y)$

Date : / /

Subject:

نتيجة: ليس كل فضاء متري هو فضاء منظم إلا إذا تحققت شروط المبرهنة السابقة.

^^

❀ مثال على فضاء متري غير مولد من نظيم.

example: لتكن S مجموعة كل المتتاليات (المحدودة أو الغير محدودة) ولنعرف الدالة:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

أثبت أن d هي دالة مسافة ولكن غير مولدة من نظيم.

الحل:

$$\forall x, y \in S$$

1] $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} \geq 0$

2] $d(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} = 0$

$\iff |x_i - y_i| = 0 \qquad i = 1 \ldots n$ ———

$\iff x_i = y_i \qquad \forall i \in N^*$

$\iff x = y$

3] $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|y_i - x_i|}{1+|y_i - x_i|} = d(y,x$

Sabbagh

4] $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

$$d(x,z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|}$$

$$\overbrace{|x_i - z_i|}^{\alpha} = |x_i - y_i + y_i - z_i|$$

$$\leqslant \underbrace{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}_{B}$$

$$0 < \alpha < B$$

$$\alpha + \alpha B \leqslant B + \alpha B$$

$$\alpha(1+B) \leqslant B(1+\alpha)$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leqslant \frac{B}{1+B}$$

$$\frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \leqslant \frac{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}{1+|x_i - y_i||y_i - z_i|}$$

$$\leqslant \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|+|y_i - z_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|x_i - y_i|+|y_i - z_i|}$$

وهي أصغر منه

$$\leqslant \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i + z_i|} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|}$$

$$\Longrightarrow d(x,y) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

إذاً d مسافة

• سنثبت أنه غير مولد من نظيم:

من أجل $\alpha = 2$ نجد:

$$l_1 = d(2x, 2y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|2x_i - 2y_i|}{1 + |2x_i - 2y_i|}$$

$$= |2| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |2|\,|x_i - y_i|}$$

$$l_2 = |\alpha|\, d(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \neq l_2$$

example: (وظيفة).

ليكن d متركاً على فضاء متجهي X ومولد من نظيم ولنعرف الدالة:

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 + d(x, y) & x \neq y \end{cases}$$

أثبت أن $\tilde{d}$ متركاً وغير مولد من نظيم.

❀ ملاحظة: R^n فضاء منظم وجداء داخلي ومتري

• $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

• $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

Subject:

بعض التعاريف الطبولوجية في الفضاء الإقليدي R^n المألوف: ٨٨

1 الكرة المفتوحة:

$$N(x_0, r) = \{x : x \in R^n , d(x, x_0) = \| x - x_0 \| < r\}$$

مركز الكرة ، نصف قطر الكرة

• في R تمثل الكرة المفتوحة مجال مفتوح:

$$|x - x_0| < r$$

$$-r < x - x_0 < r$$

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

$$x \in \,]x_0 - r , x_0 + r[$$

• في R^2 تمثل الكرة المفتوحة مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة عدا المحيط.

• في R^3 تمثل الكرة المفتوحة مجموعة النقاط الواقعة داخل الكرة عدا المحيط.

2 الكرة المغلقة:

$$B(x_0, r) = \{x : x \in R^n : d(x, y) = \| x - x_0 \| \leq r\}$$

$$\boxed{\text{دائماً...} \quad N(x_0, r) \subseteq B(x_0, r)}$$

3 جوار نقطة في R^n:

لتكن $x_0 \in R^n$

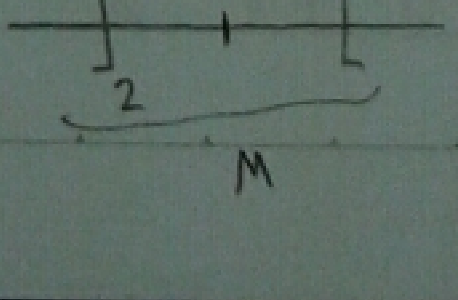
نقول أن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$ بأنه جوار لـ x_0

إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها x_0 محتواة في M.

$$M \text{ جوار } x_0 \iff \exists N(x_0, r) \subseteq M$$

$N(3, 1.5)$

$\exists \,]2.5 , 3.5[\subseteq M$



4| المجموعة المفتوحة: لتكن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$

نقول عن M أنها مجموعة مفتوحة في R^n إذا وجد لكل نقطة $x_0 \in M$
جوار $N(x_0, r)$ محتواة في M

(لكل نقطة يوجد جوار) $\forall x_0 \in M \;,\; \exists N(x_0, r) \subseteq M$

5| المجموعة المغلقة: لتكن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$

نقول عن M بأنها مغلقة إذا كانت متممها مجموعة مفتوحة.

مفتوحة. $R^n \setminus M$

نرمز للمجموعة المفتوحة M^c

ملاحظة: إن المجموعتان R^n ، $\emptyset$ هما مغلقتان ومفتوحتان بآن واحد.

ex: $\emptyset$ مغلقة فمتممها R^n مفتوحة.

R^n مغلقة فمتممها $\emptyset$ مفتوحة.

6| النقطة الداخلية: لتكن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$

نقول عن x_0 بأنها نقطة داخلية في M إذا وجد جوار لـ x_0
محتوى في M

x_0 داخلية في M $\Longleftrightarrow$ $\exists N(x_0, r) \subseteq M$

ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية بـ M° .

Date: / / Subject:

نتيجة: داخل أي مجال هو مجال مفتوح (مغلق أو مفتوح).

$$M =]1,2]$$

$$M^\circ =]1,2[$$

نستنتج: تعريف آخر للمجموعة المفتوحة.

$$\Longleftrightarrow$$

$$M = M^\circ$$

(M تساوي داخلها).

7] النقطة الحدية (التجمع، التراكم):

لتكن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$

نقول عن x_0 أنها نقطة حدية لـ M

إذا كان تقاطع أي جوار محذوف لـ x_0 مع المجموعة M لا يساوي الخالية

أما نكتب $\forall N(x_0,r)$:

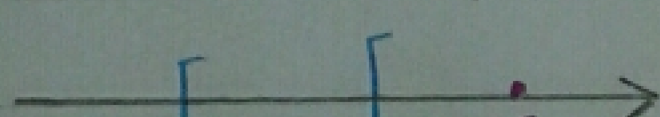
$$N(x_0,r) \cap M - \{x_0\} \neq \emptyset$$

أو نكتب $N(x_0,r) - \{x_0\} \cap M \neq \emptyset$

أو $N(x_0,r) \cap M \neq \emptyset, \{x_0\}$

نرمز لمجموعة النقاط الحدية بـ $D(M)$ أو M'

مثال: (للاطلاع غير مطلوب ^_^)



هل 2 حدية لـ $\mathring{M}$؟ $M = [0,1[\cup \{2\}$

Sabbagh

جوار لـ 2 $]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$

• $]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[\cap [0,1[\cup \{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$

• $]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}[\cap [0,1[\cup \{2\} \setminus \{2\} =]\frac{1}{2}, 1[\neq \emptyset$

2 ليست حدية لأنه يوجد جوار مساوياً الخالية.

ملاحظة: في جميع التعاريف نقول يوجد جوار إلا في تعريف النقطة الحدية و المحيطية و الملاصقة. ^_^

8] النقطة المحيطية: لتكن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$

نقول عن $x_0 \in R^n$ بأنه نقطة محيطية لـ M إذا كان

تقاطع أي جوار لـ x_0 مع M ومع M^c لا يساوي الخالية

$$\forall N(x_0, r) : N(x_0, r) \cap M \neq \emptyset$$

و $N(x_0, r) \cap M^c \neq \emptyset$

ونرمز لمجموعة النقاط المحيطية لـ M بالرمز dM

ملاحظة: أطراف المجال المغلق هي نقاط محيطية.

Date : / / Subject:

9 النقطة الملاصقة: لتكن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$

نقول عن $x_0 \in R^n$ بأنها نقطة ملاصقة لـ M

إذا كان تقاطع أي جوار لـ x_0 مع المجموعة M لا يساوي الخالية

$$\forall N(x_0, r) : N(x_0, r) \cap M \neq \emptyset$$

نرمز للنقطة الملاصقة بـ $\overline{M}$

نتيجة: كل نقطة تجمع هي ملاصقة.
غير ملاصقة $\Leftarrow$ غير تجمع.

10 النقطة المنعزلة: لتكن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$

نقول عن x_0 أنها نقطة منعزلة

$$\exists N(x_0, r) : N(x_0, r) \cap M = \{x_0\}$$

نتيجة: كل منعزلة غير حدية.
كل حدية غير منعزلة.

11 المجموعة المحدودة:

نقول عن $\emptyset \neq M \subseteq R^n$ بأنها محدودة إذا وجد جوار

$N(x, x_0)$ يحوي المجموعة M

$$\exists N(x, x_0) : M \subseteq N(x, x_0)$$

إعداد: Kalima-ALsalih, Ola-ALdalati

-Syria math-

Sabbagh

المحاضرة 5 تحليل 4

د. هدى شماط.

• المتتاليات في الفضاء الإقليدي R^n:

المتتالية هي دالة

$$f : N^* \longrightarrow R^n$$
$$m \longmapsto f(m) = x_m$$

نرمز لها $\{x_m\}_{m\in N^*}$

$$x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \_\_\_ \, x_{nm})$$

نكون قد ولدنا من $\{x_m\}_{m\in N^*}$ في R^n n متتالية حقيقية.

• تقارب متتالية في R^n:

نقول عن المتتالية $\{x_m\}_{m\in N^*}$ في R^n بأنها متقاربة من x في R^n إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N^*, \; m \geqslant n_\varepsilon : \|x_m - x\| < \varepsilon$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

ونكتب عندئذ

$$\lim_{m\to\infty} X_m = x$$

Date : / / Subject:

مبرهنة : الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_m\}_{m\in N^*}$ في R^n من x في R^n هو أن تتقارب $\{x_{im}\}_{m\in N^*}$ في R من x_i حيث $i=1 --- n$

الإثبات : لنفرض بأنه $\{x_m\}_{m\in N^*}$ في R^n متقاربة من x في R^n

عندئذٍ :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_\varepsilon \in N^* , m \geq n_\varepsilon : \|x_m - x\| < \varepsilon$$

لكن :

$$\|x_m - x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

تربيع

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2 < \varepsilon^2$$

$$(x_{1m} - x_1)^2 + (x_{2m} - x_2)^2 + ——— + (x_{nm} - x_n)^2 < \varepsilon^2$$

$\Rightarrow$ مجموع حدود أصغر من ε^2 أي كل حد منها أصغر من ε^2

$$\Rightarrow (x_{im} - x_i)^2 < \varepsilon^2 \quad (i=1 — n)$$

$$\Rightarrow |x_{im} - x_i| < \varepsilon \quad (i=1 — n)$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_{i\varepsilon} , m \geq n_{i\varepsilon} : |x_{im} - x_i| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} x_{im} = x_i \quad (i=1 — n)$$

Sabbagh

Scanned by CamScanner

Date : / / Subject:

وبالعكس: لنفرض أن $\{x_{im}\}_{m\in N^*}$ متقاربة من x_i حيث $(i=1,2,\dots n)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0$$

$$\exists\, n_{i\varepsilon} \in N^* : m \geq n_{i\varepsilon}$$

$$|x_{im} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$|x_{1m} - x_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow (x_{1m}-x_1)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$$

$$|x_{2m} - x_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x_{2m}-x_2)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$$

$$\vdots$$

$$|x_{nm} - x_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow (x_{nm}-x_n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$$

بالجمع: $\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2 < n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$

نجذر الطرفين:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\| x_m - x \| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists\, n_\varepsilon = \max(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}, \dots n_{n\varepsilon}) \in N^*$$

$$, \ m \geq n_\varepsilon :$$

$$\| x_m - x \| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \to \infty} x_m = x$$

Sabbagh

Date : / / Subject:

أخذنا $n_\varepsilon = \max(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}, \ldots, n_{n\varepsilon})$

ذلك لأن الشرط أن تكون $m \geqslant n_\varepsilon$

ولدينا $m \geqslant n_{\varepsilon_1}$

$m \geqslant n_{\varepsilon_2}$

$m \geqslant n_{\varepsilon_n}$

فنأخذ أكبر n_ε بحيث تكون أصغر من m

❀ نتائج:

1) إذا وجدت نهاية للمتتالية في R^n فهي وحيدة.

2) كل متتالية متقاربة في R^n تكون محدودة.

3) الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_m\}_{m\in N^*}$ في R^n من x في R^n هو أن يحوي أي جوار لـ x جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد محدود منها.

4) إذا كانت $\{x_m\}$ في R^n متتالية متقاربة من x في R^n وكانت $\{y_m\}$ " R^n متتالية متقاربة من y في R^n فإن:

$$\lim_{m\to\infty}(x_m \mp y_m) = x \mp y$$

5) الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة $M \subseteq R^n$ مغلقة هو أن يكون لكل متتالية متقاربة في M نهاية في M.

٨ _ ٨

Date : / /   Subject:

• المتتالية الجزئية في R^n: (فهم)

$$\overset{\boxed{1}}{1}, \overset{\boxed{2}}{\frac{1}{2}}, \overset{\boxed{3}}{\frac{1}{4}}, \overset{\boxed{4}}{\frac{1}{5}} \cdots \overset{\boxed{5}}{\frac{1}{10}}$$

$$\overset{\boxed{1}}{\frac{1}{2}} < \overset{\boxed{2}}{\frac{1}{4}} < \overset{\boxed{3}}{\frac{1}{5}} <, \overset{\boxed{3}}{\frac{1}{10}}$$

نرمز للمتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$

كيفية بناء متتالية جزئية في R^n: (فهم فقط للاطلاع ٨٨)

$\{x_m\}$ متتالية في R^n لنأخذ أحد عناصر المتتالية $\{x_m\}$ وليكن x_{2m} أحد عناصرها نأخذه ونضعه أول عنصر في المتتالية الجديدة

ثم نقوم بحذف جميع العناصر الموجودة قبله من المتتالية الأصلية ، ثم نأخذ عنصر آخر من المتتالية $\{x_m\}$ ونضعه ثاني عنصر بالمتتالية الجديدة

ونحذف جميع العناصر الموجودة قبله وهكذا.....

إلى أن نحصل على متتالية.

ترتيب العناصر هو $1m < 2m < \dots$ فنحصل على $\{x_{m_k}\}$

حيث ترتيب عناصرها يشكل متتالية متزايدة من الأعداد الطبيعية.

▪ متتالية كوشي (الأساسية):

نقول عن المتتالية $\{x_m\}_{m\in N^*}$ بأنها متتالية كوشي في R^n

إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N^* : m, l \geq n_\varepsilon : \|x_m - x_l\| < \varepsilon$$

مبرهنة (بدون برهان):

إذا كانت $\{x_m\}_{m\in N^*}$ في R^n متقارب من x في R^n فإن أي متتالية جزئية منها تكون متقاربة من نفس العنصر x.

ملاحظة: إذا وجدت متتاليتين جزئيتين من متتالية $\{x_m\}_{m\in N^*}$ متقاربتين من نهايتين مختلفتين فإن $\{x_m\}$ متباعدة منها

$$\{(-1)^m\} = -1, +1, -1, +1 \text{ ---}$$

• كل متتالية متأرجحة متباعدة

مبرهنة: كل متتالية متقاربة في R^n هي متتالية كوشي.

الإثبات: لنفرض أن $\{x_m\}_{m\in N^*}$ متتالية في R^n متقاربة من x في R^n

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_\varepsilon \in N^*:$$

$$\|x_m - x_\ell\| = \|x_m - x + x - x_\ell\|$$

$$\leq \|x_m - x\| + \|x_\ell - x\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

وذلك من أجل $m, \ell \geq n_\varepsilon$ $\Rightarrow \{x_m\}$ كوشية

Sabbagh

Date : / /

Subject:

• تعريف الفضاء التام: (فهم فقط).

نقول عن فضاء بأنه تام إذا كانت كل متتالية كوشي هي متتالية متقاربة.

- إن R^n الفضاء المتري هو فضاء تام.

مبرهنة (دون برهان !!): في الفضاء المتري R^n كل متتالية كوشي في R^n هي متتالية متقاربة.

• التغطية: لتكن S مجموعة ما حيث $S \subseteq R^n$ ولتكن $\mathcal{U} = \{ \mathcal{U}_i : i \in I \}$ جماعة من المجموعات (المنتهية أو غير المنتهية)

نقول عن $\mathcal{U}$ بأنها تغطية لـ S إذا تحقق الشرط:

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

وتكون هذه التغطية مفتوحة إذا كانت كل من $\mathcal{U}_i$ هي عبارة عن مجموعات مفتوحة. بحيث $i \in I$

إذا طلب تعريف التغطية المفتوحة نفس تعريف التغطية لكن نكتب أن $\mathcal{U}$ هي جماعة من المجموعات المفتوحة.

Date : / / Subject:

التراص: نقول عن $S \subseteq R^n$ بأنها مجموعة متراصة إذا احتوت كل تغطية مفتوحة لـ S تغطية جزئية منتهية لـ S

$$\bigcup_{j=1}^{r} u_j \subseteq \bigcup_{i\in I} u_i$$

مثال: (فهم غير مطلوب ^.^)

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ مجموعة منتهية في R^n ولتكن $u=\{u_i, i\in I\}$ تغطية مفتوحة لـ A

أثبت أن A متراصة.

الإثبات: بما أن u تغطية مفتوحة لـ A

$A \subseteq \bigcup_{i\in I} u_i$ حسب تعريف التغطية.

$a_1\in A \;, \exists\, u'_1 \in \bigcup_{i\in I} u_i : a_1 \in u'_1$

$a_2\in A \;, \exists\, u'_2 \in \bigcup u_i : a_2 \in u'_2$

$\vdots$

وهكذا ....

$$A = a_1 \cup a_2 - \!\!-\!\!- \cup a_m \in \bigcup_{j=1}^{m} u_j \subseteq \bigcup_{i\in I} u_i$$

إذن وجدنا تغطية منتهية في A محتواة في U

نتيجة مطلوبة: كل مجموعة منتهية هي مجموعة متراصة.

مبرهنة (دون برهان): [هاين بوريل]: كل مجموعة مغلقة ومحدودة هي متراصة.

Syria math...

إعداد: كليمة الصالح - علا الوالاتي.

Sabbagh

Date : ٢٠١٩/٣/١٠ Subject:

المحاضرة السادسة تحليل 4 د.هدى شماط

المحتوى العلمي:

1. بعض التعاريف.
2. الدوال الحقيقية لعدة متغيرات.
3. مبرهنات.

• تعريف المجموعة المترابطة:

نقول عن $\emptyset \neq S \subseteq R^n$ بأنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان وغير خاليتان U , V بحيث:

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cup V = S$$

- ندعو U و V يفصلان S.
- وإذا لم تتحقق هذه الشروط عندئذٍ ندعو S بالمجموعة المترابطة.

ملاحظة: - إن المجموعة الوحيدة العنصر هي مجموعة مترابطة.
- المجموعة الخالية هي مجموعة مترابطة.

مبرهنة (دون برهان): نقول عن $\emptyset \neq S \subseteq R$ بأنها مترابطة إذا وفقط إذا كانت S مجال (مفتوح، أو مغلق أو نصف مفتوح).

Scanned by CamScanner

Date : / / Subject:

مثال: $S_1 =]0,1[\cup]3,5[$

$u =]0,1[$

$V =]3,5[$

يحقق الشروط واجتماع المجالين لا يعطي مجال ومنه S_1 غير مترابطة.

$S_2 =]0,1] - [0,\frac{1}{2}] =]\frac{1}{2},1]$

لا يحقق الشروط ($u \cap V = \emptyset$ و $u \cup V = S$)

ومنه S_2 مترابطة.

$S_3 = [0,1] \cup [1,3] = [0,3]$

S_3 مترابطة.

تعريف القطعة المستقيمة في R^n: (مهم)

$$L = \{ x + t(y - x) \ : \ t \in [0,1] \}$$

فإذا كان لدينا مجموعة من النقاط

$x_1, x_2, x_3, \text{———} x_m$

و L_1 هي القطعة المستقيمة الواصلة بين x_1 ، x_2

L_2 هي القطعة المستقيمة الواصلة بين x_2 ، x_3

⋮

L_i هي القطعة المستقيمة الواصلة بين x_i ، x_{i+1}

Date : / /

Subject:

عندئذ تشكل $\{L_1, L_2, \ldots\ldots, L_{m-1}\}$ خطاً مضلعاً يصل بين x_1 و x_m

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي تكون $\emptyset \neq S \subseteq R^n$ مترابطة حيث (S مفتوحة) هو أن يكون بالإمكان أن نصل بين أي نقطتين من S بخط مضلع يصل بين هاتين النقطتين يقع بأكمله في S.

مبرهنة: (بدون برهان ^^)

إن R^n هو فضاء مترابط.

مبرهنة: (إثباتها غير مطلوب للاطلاع ^^)

إن R^n ، $\emptyset$ مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان بآن واحد.

الإثبات:

لنفرض جدلاً بأنها غير مفتوحتين ومغلقتين بآن واحد

ولتكن S مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد ومختلفة عن R^n ، $\emptyset$

$$S \neq R^n$$

$$S \neq \emptyset$$

إذا كانت S مفتوحة $R^n \setminus S$ مغلقة

إذا كانت S مغلقة $R^n \setminus S$ مفتوحة

Date : / /

Subject:

$\{S\}$ مفتوحة و $R^n \setminus \{S\}$ مفتوحة

- $R^n \setminus \{S\} \cup \{S\} = R^n$
- $R^n \setminus \{S\} \cap \{S\} = \emptyset$

إذن $\{S\}$ و $R^n \setminus \{S\}$ فصلاً R^n.

$\Rightarrow$ R^n غير مترابط

وهذا يناقض كون R^n مترابط.

فالفرض الجدلي خاطئ.

... - نهايات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات - ...

• تعريف: لتكن $f: S \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن x_0 نقطة حدية لـ S

نقول بأن $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < \|x - x_0\| < \delta$

لأنها نقطة حدية $x \neq x_0$ أو

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

[نوهت الدكتورة أنه من المهم أن نكتب أن $0 < \|x - x_0\|$]

• تعريف آخر بدلالة المتتاليات: لتكن $f: S \subseteq R^n \longrightarrow R$

حيث أن x_0 نقطة حدية لـ S.

نقول عن $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Date : / /

Subject:

إذا قابل كل متتالية $\{x_m\}_{m\in N^*}$ من S جميع عناصرها مختلفة عن x_0
ومتقاربة من x_0 متتالية $\{f(x_m)\}_{m\in N^*}$ بحيث $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) = A$

تعريف مجموع وضرب وقسمة الدوال الحقيقية لعدة متغيرات:

لتكن $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$

$g : T \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S \cap T$

$$f+g : S\cap T \subseteq R^n \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f\cdot g : S\cap T \subseteq R^n \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g} : S\cap T \setminus \{x : g(x) = 0\} \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Date : / / Subject:

مبرهنة: (مطلوبة ومهمة جداً"):

لتكن $f: S \subseteq R^n \longrightarrow R$

$g: T \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S \cap T$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$

عندئذٍ يكون:

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = A + B$$

الإثبات:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff$

$\forall \varepsilon > 0 , \frac{\varepsilon}{2} > 0 , \exists \delta_1 > 0 :$

$$0 < \| x - x_0 \| < \delta_1$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \iff \forall \varepsilon > 0 , \frac{\varepsilon}{2} > 0 , \exists \delta_2 > 0 ,$

$$0 < \| x - x_0 \| < \delta_2$$

$$\Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

حسب خواص القيمة المطلقة.

Date : / /

Subject:

$$|(f+g)(x) - (A+B)| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \;, \exists\, \delta = \min(\delta_1 , \delta_2) > 0 \;,\; 0 < \| x - x_0 \| < \delta$

$$\Longrightarrow |(f+g)(x) - (A+B)| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = A + B$$

ملاحظة: في الدول نكتب $\delta = \min(\delta_1 , \delta_2)$

في النهايات نكتب $\delta = \max(\delta_1 , \delta_2)$

مبرهنة: (مطلوبة ومهمة جداً):

لتكن $g : T \subseteq R^n \longrightarrow R$

و x_0 نقطة حدية لـ T

و $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$

عندئذ $g \neq 0$, $B \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

البرهان:

بما أن $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$

$\forall \varepsilon > 0 \;, \exists\, \delta > 0 \;,\; 0 < \| x - x_0 \| < \delta$

$$\Longrightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$$

Sabbagh

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{g(x)\cdot B}\right| < \frac{\varepsilon}{|B|\cdot|g(x)|} \quad \bigstar$$

$$|B| = |B - g(x) + g(x)|$$
$$\leq |B - g(x)| + |g(x)|$$
$$< \varepsilon + |g(x)|$$
(لأن $|B - g(x)| < \varepsilon$)

$$\Rightarrow |B| < \varepsilon + |g(x)|$$
$$|B| - \varepsilon < |g(x)|$$
$$\Rightarrow \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{|B| - \varepsilon}$$

من ★ لدينا أن:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\varepsilon}{|B|\cdot|g(x)|}$$

$$< \frac{\varepsilon}{|B|} \cdot \frac{1}{|B| - \varepsilon}$$
[لأن $\frac{1}{g(x)} < \frac{1}{|B|-\varepsilon}$]

بما أن ε اختياري نختاره $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{|B|}{2}} = \frac{1}{|B|} = \varepsilon'$$

$$\forall \varepsilon' > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < \|x - x_0\| < \delta$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{g} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon'$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{B}$$

Date / /   Subject:

مثال:

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{x^3 \cos y}{x^2+y^2}$$

أثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

الإثبات:

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists \delta > 0 ,\ 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3 \cos y}{x^2+y^2}\right|$$

$$\left|\frac{x^3 \cos y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2}$$ (لأن $|\cos y| \leq 1$)

$$= \frac{x^2 |x|}{x^2+y^2}$$

لكن $x^2 < x^2+y^2$ (إضافة عدد موجب)

ومنه:

$$\frac{x^2|x|}{x^2+y^2} < \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot |x| = |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

لأن $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$

$\|(x,y)\| < \delta$

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

نحلل بداية "لكي نعرف شكل الدالة.

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists \delta = \varepsilon > 0 ,\ 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3 \cos y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$$

Date : ٢٠١٩/٣/١٨ Subject:

تحليل (4)

المحاضرة السابعة

د: هدى الشام

• المحتوى العلمي:

١| حل وظيفة.

٢| الاستمرار.

٣| الاستمرار المنتظم.

تمرين وظيفة:

$$f : R^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow R$$

$$(x,y) \longmapsto f_1(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

$$f_2(x,y) = \frac{\sin(x \cdot y)}{x^2 + y^2}$$

أثبت أن ليس للدالة نهاية عند $(0,0)$

• $f_1(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$

لنأخذ المتتاليتين من نفس الشكل:

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$$

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$$

Sabbagh

نأخذ نهاية صورة الأولى ونهاية صورة الثانية :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

بالتالي $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$

ليست للدالة نهاية عندما $(x,y) \longmapsto (0,0)$

• $f_2(x,y) = \dfrac{\sin(x\cdot y)}{x^2+y^2}$

لنأخذ المتتاليتين :

$$\left[\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\left[\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{2\,\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) = \frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}$$

Date : / / Subject:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{2}{n^2}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$$

ليست للدالة نهاية عندما $(x,y) \longrightarrow (0,0)$

... - الاستمرار الدوال الحقيقية لعدة متغيرات - ...

- تعريف الاستمرار: لتكن $f: S \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن $x_0 \in S$ نقول عن الدالة f أنها مستمرة في النقطة x_0 من S

إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \delta > 0 \ , \ 0 < \delta \ \varepsilon \ , \ \|x - x_0\| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

وتكون الدالة f مستمرة على S إذا وفقط إذا كانت مستمرة في كل نقطة من نقاط S .

مبرهنة: (بدون برهان)

لتكن $f: S \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن $x_0 \in S$ نقول عن f بأنه مستمر في x_0 إذا وفقط لما إذا قابل أي جوار V لـ $f(x_0)$ جوار U لـ x_0 بحيث أيا كانت $x \in U \cap S$ فإن $f(x)$ تنتمي إلى V .

Date : / / Subject:

ملاحظة: بالاستمرار يجب أن تكون $x_0 \in S$
بالنهايات يجب أن تكون x_0 نقطة حدية

تعريف الاستمرار باستخدام المتتاليات: (فهم)
أياً كانت المتتالية $\{x_m\}$ من عناصر S والمتقاربة من x_0 وبحيث جميع عناصرها مختلفة عن x_0 $_{m \in N^*}$ فإن $\{f(x_m)\}_{m \in N^*}$ متقاربة من $f(x_0)$

مبرهنة: لتكن $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$

$x_0 \in S \cap S'$
(x_0 نقطة حدية)

f مستمر في x_0 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

الإثبات:
1) لنفرض أن f مستمرة في x_0

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , \|x - x_0\| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

بما أن x_0 نقطة حدية لـ S

$x \neq x_0$ أو $0 < \|x - x_0\|$

إذن

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < \|x - x_0\| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Date : / / Subject:

2] نفرض أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

نميز الحالتين : الحالة الأولى : $x = x_0$

$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

وهذا محقق.

الحالة الثانية : $x \neq x_0$ مباشرةً محققة من تعريف النهاية.

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , \|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ملاحظة: نستنتج من المبرهنة :

تكون f مستمرة في x_0 و x_0 نقطة حدية

عندئذٍ يمكن التبديل بين الدالة والنهاية

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$$

ملاحظة: لا يحق لنا استخدام النهاية بالاستمرار عند نقطة

(نهاية من اليمين = النهاية من اليسار = الصورة)

إلا إذا كانت النقطة التي ندرس الاستمرار عندها نقطة حدية.

Date : / / Subject:

مبرهنة : (مهمة وبتجي كتير ... ^_^)

لتكن $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن $x_0 \in S \setminus S'$ (ليست حدية (منعزلة))

عندئذ تكون f مستمرة في x_0

الإثبات :

نفرض جدلاً بأن f غير مستمرة بالنقطة x_0

(كلشي $\forall$ منكتبو $\exists$ وكلشي $\exists$ منكتبو $\forall$)

$$\exists \varepsilon > 0 , \forall \delta > 0 , \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(جوار لـ x_0)

نميز حالتان : 1 الحالة الأولى : عندما $x = x_0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 > \varepsilon$$

لكن $0 < \varepsilon$

فهذا يناقض بكون $0 < \varepsilon$

f مستمرة في x_0.

2 الحالة الثانية $x \neq x_0$

إن أي جوار لـ x_0 سوف يتقاطع مع S بنقاط مغايرة عن x_0

أي x_0 نقطة حدية وهذا يناقض الفرض

إذاً f مستمرة في x_0.

Date : / / Subject:

مبرهنة [بدون برهان] :

إذا كان $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ مستمرة بالنقطة x_0

$g : T \subseteq R^n \longrightarrow R$ مستمرة بالنقطة x_0

تنتمي لمجموعة التعريف المشتركة (بالاستمرار) $x_0 \in S \cap T$ فإن :

1) $f + g : S \cap T \subseteq R^n \longrightarrow R$

$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) $f \cdot g : S \cap T \subseteq R \longrightarrow R$

$$x \longmapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

3) $\frac{f}{g} : S \cap T - \{x : g(x) = 0\} \longrightarrow R$

$$x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

4) تركيب دوال مستمرة في دالة مستمرة إذا كان

$$S \subseteq R^n \xrightarrow[\text{مستمر في } x_0]{f} f(S) \subseteq R \xrightarrow[\text{مستمر في } x_0]{g} R$$

إن $h = g \circ f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$ هو دالة مستمرة في x

منطلق f مستقر g

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Sabbagh

Scanned by CamScanner

مبرهنة [القيمة الوسطى]:
إذا كانت لدينا دالة f معرفة ومستمرة على مجموعة جزئية S مترابطة
في R^n و $x.y \in S$ و $\alpha \in R$
بحيث $f(x) < \alpha f(y)$ عندئذٍ
$$\exists B \in S \quad , f(B) = \alpha$$

تعريف: لتكن $f: S \subseteq R^n \longrightarrow R$
1) نقول عن الدالة f بأنها محدودة من الأعلى إذا كان مداها $f(x)$ محدودة من الأعلى.
2) نقول عن f بأنها محدودة من الأدنى إذا كان مداها $f(x)$ محدودة من الأدنى.
3) نقول عن f محدودة إذا كانت f محدودة من الأعلى ومن الأدنى.

المدى: كل قيمة من f $x \in$ بحيث
$|f(x)| <$ عدد
أي هي مستقرها.

تعريف الاستمرار المنتظم: $f: S \subseteq R^n \longrightarrow R$
نقول عن f بأنها مستمرة بانتظام على S إذا وفقط إذا
تحقق الشرط:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \|x_1 - x_2\| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$
وذلك $\forall x_1, x_2 \in S$

مبرهنة (بدون برهان): $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

متراصة

و f مستمرة على S عندئذ:

1) إذاً f مستمرة بانتظام على S.

2) f تدرك (تبلغ) حدها الأعلى و حدها الأدنى.

نتائج: 1 تركيب دوال مستمرة بانتظام هي دالة مستمرة بانتظام.

2 كل دالة مستمرة بانتظام هي دالة مستمرة.

3 f غير مستمرة فهي غير مستمرة بانتظام.

4 الاستمرار على مجموعة متراصة هي مستمرة بانتظام.

مثال: $f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1$

هل الدالة مستمرة بانتظام.

الحل: $[-1,1]$ مغلقة ومحدودة فهي متراصة

الدالة f مستمرة على $[-1,1]$ لأن جمع وطرح دوال مستمرة هي دالة مستمرة، والاستمرار على متراصة هي مستمرة بانتظام.

★ منطلق f محدودة فهي متراصة

(كل مجموعة مغلقة ومحدودة فهي متراصة).

Date : / /

Subject:

مثال: $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \ln(x^2+y^2) & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ادرس الاستمرار عند $(0,0)$.

الحل: $(0,0)$ نقطة حدية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y \cdot \ln(x^2+y^2)$$

$$\lim_{z\to 0} z \ln z = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)$$

$$= \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}}_{\text{نهايتها عدد غير معرفته}} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)$$

$$\lim \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} \cdot 0 = 0$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

ومنه f مستمرة عند $(0,0)$

مثال: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cdot \cos y}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

هل الدالة مستمرة عند $(0,0)$

Sabbagh

Date : / /

Subject:

الحل: (0,0) نقطة حدية.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \cos y}{x^2+y^2}$$

$$= 0 = f(0,0)$$

f مستمرة.

تمرين وظيفة:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x \cdot y} - 1}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

انتهت المحاضرة ★

كلية الصالح

و

فاديان حلو

Sabbagh

Date : / /

Subject:

التحليل (4)

المحاضرة الثامنة

د. هدى سمّا

المحتوى العلمي:

• حل أمثلة عن الاستمرار والنهايات.

مثال 1: $f: R^2 \longrightarrow R$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; (x,y) = (0,2) \\ \dfrac{(x^2+(y-2)^2+1)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2+(y-2)^2} & ; (x,y) \neq (0,2) \end{cases}$$

1) أثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$

2) هل الدالة f مستمرة في (0,2).

الحل: $\forall \varepsilon > 0 \,,\, \exists \delta > 0 \,,\, 0 < \|(x,y)-(0,2)\| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x,y) - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon$$

نسمي $x^2+(y-2)^2 = \alpha$ (لتسهيل الحل).

$$\|(x,y)-(0,2)\| = \|x, y-2\| = \sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{\alpha}$$

$$|f(x,y) - \tfrac{1}{2}| = \left| \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right|$$

Date : / / Subject:

نوحد المقامات:
$$\left|\frac{2\sqrt{\alpha+1}-2-\alpha}{2\alpha}\right|$$

نكتب $-2=-1-1$:
و $-(1+\alpha)=-1-\alpha$:
$$=\left|\frac{-(+1+\alpha)+2\sqrt{\alpha+1}-1}{2\alpha}\right|$$

والقيمة المطلقة لـ $|-z|=|z|$:
$$=\left|\frac{(1+\alpha)-2\sqrt{\alpha+1}+1}{2\alpha}\right|$$

لدينا $(\sqrt{1+\alpha}-1)^2=(1+\alpha)-2\sqrt{\alpha+1}+1$

جذر الأول ، إشارة الثاني ، جذر الثاني.
$$=\frac{(\sqrt{1+\alpha}-1)^2}{2\alpha}$$

نضرب بـ بمربع مرافق البسط:
$$=\frac{(1+\alpha-1)^2}{2\alpha(\sqrt{1+\alpha}+1)^2}$$
نختصر α^2 مع α
$$=\frac{\alpha}{2(\sqrt{1+\alpha}+1)^2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\delta^2}{2}$$

لأن $\|(x,y)-(0,2)\|=\sqrt{\alpha}<\delta$ ومنه $\alpha<\delta^2$ ومنه $\frac{\alpha}{2}<\frac{\delta^2}{2}$

نسمي $\varepsilon=\frac{\delta^2}{2}$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{2\varepsilon}>0,\ \|(x,y)-(0,2)\|<\delta$$
$$\Longrightarrow\left|f(x,y)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

$\boxed{2}$ $(0,2)$ نقطة حدية:
$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}f(x,y)=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,2)$$

Sabbagh

Date : / / Subject:

مثال :

$$f : R^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$$

أثبت أنه لا توجد نهاية للدالة عندما $(x,y) \to (0,0)$

الحل :

نأخذ حالتين : الحالة الأولى $x = y$ حيث $(x,y) \longrightarrow (0,0)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$ (نهاية مشهورة أو حسب أوبيتال)

الحالة الثانية : $y = 0$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \to 0} f(x,0) = 0$$

إذاً لا توجد للدالة نهاية عندما

$$(x,y) \longrightarrow (0,0)$$

بالاثبات لإثبات أنه لا توجد نهاية للدالة نختار نقطتين كل منهما تسعى للصفر (مثلاً) لكن نهاية الصور غير متساوية .

مثال 3 :

$$f : R^2 \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

هل الدالة مستمرة .

الحل : بما أن ليس للدالة نهاية (من التمرين السابق)

Sabbagh

Date : / / Subject:

لا يوجد للدالة $\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$ نهاية عندما $(x,y)\to(0,0)$

بالتالي الدالة f غير مستمرة عندما $(0,0)$

مثال 4:

$$f,g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

1) أثبت أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

2) ثم بين أنه لا توجد نهاية للدالة g في $(0,0)$

الحل:

حسب التعريف:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\Rightarrow \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x\cdot y} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x\cdot y}\right| = |x^2+y^2|\ \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x\cdot y}\right|}_{\text{دائما أصغر أو تساوي } 1}$$

$$\leq x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

لأن $\|(x,y)-(0,0)\| = \|x,y\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

بالتربيع $x^2+y^2 < \delta^2$

Sabbagh

Date : / / Subject:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} > 0 , \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x)-(0,0)| < \varepsilon$$

إذاً $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

---

2 نأخذ المتتاليتين : $\{(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\} \longrightarrow (0,0)$

$$\{(\frac{2}{n},\frac{1}{n})\} \longrightarrow (0,0)$$

$$g(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = 0$$

$$g(\frac{2}{n},\frac{1}{n}) = \frac{\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(\frac{2}{n},\frac{1}{n}) = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \neq \lim_{n\to\infty} g(\frac{2}{n},\frac{1}{n})$$

مثال 5: ادرس استمرار الدالة في $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & : (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

الحل :

لايمكن استخدام النهاية ، $(0,0)$ نقطة حدية لكن لا يوجد نهاية للدالة $\dfrac{x^4}{x^2+y^2}$

Sabbagh

ندرسها حسب تعريف الاستمرار :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^4}{x^2+y^2} - 0\right|$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot x^2 < \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot x^2$$

$$< x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

كذلك حسب شكل بالتربيع

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$x^2+y^2 < \delta^2$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} > 0 , \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

أي الدالة f مستمرة عند $(0,0)$.

مثال 6 : $f : R^2 \longrightarrow R$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^4} & : (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

برهن أن الدالة f مستمرة على كل مستقيم مار من $(0,0)$ وذلك دون

Date : / / Subject:

أن تكون مستمرة في $(0,0)$.

الحل : معادلة المستقيم المار من مبدأ الإحداثيات $(0,0)$

$$y = \alpha x$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^2 x^3}{x^2+\alpha^4 x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^2 x}{1+\alpha^4 x^4} = 0 \Longrightarrow f(0,0) = 0$$

إذاً الدالة f مستمرة على المستقيم $y=\alpha x$ المار من $(0,0)$

- سنثبت أنها غير مستمرة في $(0,0)$.

نأخذ نقطة $x = y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

إذاً f غير مستمرة عند $(0,0)$

ملاحظة : إذا كان السؤال أثبت أنه ليس للدالة نهاية :
نأخذ نقطتين و نصورهم .
أما في الاستمرار [أثبت أن الدالة غير مستمرة] :
نأخذ فقط نقطة واحدة .

مثال 7 : $f: R^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow R$ (فهم غير مطلوب ^^)

$$f(x,y) = Ln(x^2+y^2)$$

الحل :

$$h: R^2 \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$$

مستمرة على R^2

$$g: R^{+*} \longrightarrow R$$
$$z \longmapsto Ln\, z$$

مستمرة على R^{+*}

$$R^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{h} R^{+*} \xrightarrow{g} R$$

$f = g \circ h$ مستمرة على $R^2 \setminus \{0,0\}$.

مثال 8 : (فهم غير مطلوب ^^)

$$f_2(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot Ln(x^2+y^2) & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

برهنا استمرارها عند 0 .

$f_1(x,y) = x \cdot y \cdot Ln(x^2+y^2)$.

مستمرة على $R^2 \setminus \{0,0\}$

و من تمرين سابق أثبتنا أنها مستمرة عند $(0,0)$

ومنه f_2 مستمرة على R^2

Date : / / Subject:

مثال 9:

$$f: R^2 \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = \sin x \cdot y$$

هل الدالة f مستمرة على R^2

نأخذ تركيب دالتين:

$$h: R^2 \longrightarrow R$$

$$(x,y) \longmapsto h(x,y) = x \cdot y$$

مستمرة على R^2 [لأنه تركيب جداء دالتين مستمرتين مستمر].

$$g: R \longrightarrow R$$

$$z \longmapsto \sin z$$

دالة مستمرة على R.

$$R^2 \xrightarrow[\text{مستمرة على } R^2]{h} R \xrightarrow[\text{مستمرة على } R^2]{g} R$$

$$(x,y) \longmapsto z \longmapsto \sin z$$

$$f: g \circ h: R^2 \longrightarrow R$$

$$(x,y) \longmapsto \sin(x \cdot y)$$

الدالة مستمرة على R^2.

انتهت المحاضرة ☺

كلية الصالح

و

نادي ان جلو

Sabbagh

Date : ٢٠١٩ / ٢ / ٢٨ Subject:

التحليل (4)

المحاضرة التاسعة

s: هدى الشحام

٥٥٥ - مشتقات وتكاملات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات - ٥٥٥

تعريف: لتكن $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

مفتوحة

ولتكن $C \in D^\circ$ فإذا وجدت النهاية التالية:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c_1 + h, c_2, \ldots\ldots, c_n) - f(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n)}{h}$$

عندئذ نقول إن للدالة f مشتق جزئي في C بالنسبة للمتغير الأول x_1

ونرمز له بـ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$ أو $F_{x_1}(c)$ أو $D_1 F(c)$

وبنفس الطريقة نكتب المشتق الجزئي لـ f بالنسبة للمتغير الثاني x_2 بالنقطة C

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, c_2 + h, c_3, \ldots\ldots c_n) - f(c_1, c_2, \ldots c_n)}{h}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, c_2, \ldots\ldots c_i + h, \ldots\ldots, c_n) - f(c_1, \ldots\ldots c_n)}{h}$$

$i = 1, 2 \ldots n$:

Sabbagh

Date : / / Subject:

ملاحظة: h بالمركبة الأولى ⟸ نشتق بالنسبة للمركبة الأولى
h بالمركبة الثانية ⟸ نشتق بالنسبة للمركبة الثانية.
إذاً نضيف h على المتغير الذي نشتق بالنسبة له.

لنأخذ $f_{x_1} : D^{\circ} \subseteq R^{n} \longrightarrow R$ دالة

ولتكن $C \in D^{\circ}$ لنأخذ:

$$\frac{d}{dx_1} F_{x_1} = \frac{d}{dx_1} \cdot \frac{dF}{dx_1}(c) = \frac{d^2 F}{dx_1^2}$$

المشتق الجزئي للمتغير الأول بالنقطة C.

المشتق الثاني لـ F بالنسبة للمتغير الأول

ويساوي بدلالة النهايات:

$$\frac{d}{dx_1} F_{x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_1}(c_1+h, c_2 \dots c_n) - f_{x_1}(c_1, c_2 \dots c_n)}{h}$$

نشتق F_{x_1} بالنسبة لـ x_2:

$$\frac{d}{dx_2} F_{x_2}(c) = \frac{d}{dx_2} \frac{dF}{dx_1}(c) = \frac{d^2 F}{dx_2 dx_1} = (f_{x_1})_{x_2} = f_{x_1 x_2}$$

$$f_{x_1 x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_1}(c_1, c_2+h, \dots c_n) - f_{x_1}(c_1, c_2, \dots c_n)}{h}$$

Date : / / Subject:

وهكذا نعرف المشتقات الجزئية من مراتب عليا .

لنأخذ :
$$f: R^2 \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$\frac{\partial^m F}{\partial x^m}, \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-1}\partial y}, \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-2}\partial y^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^m F}{\partial x\, \partial y^{m-1}}, \frac{\partial^m F}{\partial y^m}$$

نسمي المشتقات الجزئية الصرفة بالشكل :
$$\frac{\partial^m F}{\partial x^m}, \frac{\partial^m F}{\partial y^m}$$

نسمي هذه المشتقات الجزئية المشتقات الجزئية المختلطة :
$$\frac{\partial^m F}{\partial x^i \partial y^{m-i}} \quad : i = 1 \text{ --- } m-1$$

حيث عدد المشتقات الجزئية هي $m+1$

مثال :
$$f: R^2 \longrightarrow R$$
$$f(x,y) = x^3 y^5$$

أوجد :
$$f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y), f_{xx}(x,y), f_{yy}(x,y)$$

الحل :
$$f_x(x,y) = 3x^2 y^5$$
$$f_{xy}(x,y) = 15x^2 y^4$$

Date : / / Subject:

$f_{xx}(x,y) = 6xy^5$

$f_y(x,y) = 5x^3y^4$

$f_{yx}(x,y) = 15x^2y^4$

$f_{yy}(x,y) = 20x^3y^3$

ومنه $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

مثال : $f : R^2 \longrightarrow R$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

أوجد $f_{xy}(0,0)$ ، $f_{yx}(0,0)$

الحل : يجب علينا حساب $f_y(0,0)$ ، $f_x(0,0)$ و $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$

ملاحظة : دائماً عند الـ $(0,0)$ نستخدم النهاية

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

نعوض بالفرع الثاني لأن النقطة $(h,0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x(xy^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

مشتق البسط بالمقام - مشتق المقام بالبسط على مربع المقام .

Sabbagh

Scanned by CamScanner

Date : / / Subject:

$$= \frac{-x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{-x^2y^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & : (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2y(xy^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & : (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

ملاحظة: إذا طُلِبَ $f_y(0,0)$ أو $f_x(0,0)$ نستخدم فقط نهايات
أما إذا طلب $f_{xy}(0,0)$ نضطر للاشتقاق مرة ثانية لأنه مشتق مختلط ..

عند $(0,h)$ $\quad f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h}$

Sabbagh

Date : / / Subject:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^4}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^4} - 0}{h} = 0$$

نستنتج أن $f_{yx}(0,0) \neq f_{xy}(0,0)$

مبرهنة: $f : D \subseteq R^2 \longrightarrow R$

مفتوحة

ولتكن $C \in D^\circ$

ولنفرض تحقق الشرطين:

1) f_x ، f_y ، f_{xy} ، f_{yx} عند النقطة موجودة في الساحة D

2) المشتقات الجزئية المختلطة f_{xy} ، f_{yx} مستمرة في النقطة C

عندئذ $f_{xy}(x) = f_{yx}(C)$

مبرهنة: لتكن $f : D \subseteq R^n \longrightarrow R$ ولتكن $C \in D^\circ$ ولنفرض

تحقق الشرطين: 1) المشتقات الجزئية الصرفة حتى المرتبة $m-1$ بما فيها

$(m-1)$ موجودة بالساحة D.

2) المشتقات الجزئية المختلطة حتى المرتبة m موجودة في D ومستمرة في النقطة C

عندئذ المشتقات الجزئية المختلطة تكون متساوية بغض النظر عن ترتيب الاشتقاق

انتهت المحاضرة ≠ ~

كليمة & نارعان

Sabbagh

التحليل (4)

المحاضرة العاشرة

د: هدى أشما

المحتوى العلمي:

١] المشتق المتجهي.

٢] تفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات.

تعريف: لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

مفتوحة.

ولتكن $c \in D^\circ$ و $u \in \mathbb{R}^n$ بحيث $\|u\| = 1$

فإذا وجدت النهاية التالية

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

عندئذٍ نقول عن الدالة f فإن لا مشتق في النقطة c باتجاه u

ونرمز لهذه النهاية بالرمز $\frac{\partial F(c)}{\partial u}$

$u = e_1(1, 0, 0, \ldots, 0)$

Date : / / Subject:

$$\frac{\delta F}{\delta u}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1+h, c_2, c_3, \ldots, c_n) - f(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{h}$$

$$= \frac{dF}{dx_1}(c)$$

$$c + hu = (c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) + h\,(1, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$$
$$= (c_1+h, c_2, c_3, \ldots\ldots c_n)$$

إذاً" المشتق الاتجاهي هو تعميم للمشتق الجزئي فيما لو أخذنا u هو أحد الأشعة القانونية في R^n :

$e_1\,(1, 0, \ldots\ldots 0)$, $e_2\,(0, 1, 0, \ldots\ldots 0)$

$\ldots\ldots\ e_n\,(0, 0, 0, \ldots\ldots 1)$

مثال : لو أخذنا الدالة : $f : R^2 \longrightarrow R$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$u = (\alpha, \beta)$ بحيث $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ، أوجد $\frac{\delta F}{\delta u}(0,0)$

Date : / / Subject:

الحل: إذن $\|u\| = \|(\alpha, \beta)\|$

$$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(C+hu) - f(C)}{h}$$

النقطة هي: $C = (0,0)$

$$hu = h(\alpha, \beta) = (h\alpha, h\beta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h\alpha, h\beta) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3 \alpha \beta^2}{h^2\alpha^2 + h^2\beta^2} - 0}{h}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha \beta^2}{1} = \alpha\beta^2$$

مثال: لتكن $f: R^n \longrightarrow R$

$f(x) = \|x\|^2$: $C \in R^2$

$u = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots\ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ أوجد $\frac{\partial F}{\partial u}(C)$

الحل:

$$\|u\| = \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots\ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

Date : / / Subject:

$$C+hu=(C_1,C_2,\ldots\ldots C_n)+\left(\frac{h}{\sqrt{n}},\frac{h}{\sqrt{n}},\ldots\ldots,\frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left(C_1+\frac{h}{\sqrt{n}},\ C_2+\frac{h}{\sqrt{n}},\ldots\ldots,C_n+\frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$

- $f(C+hu)=\|C+hu\|^2=\left(C_1+\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2+\left(C_2+\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2+\ldots\ldots+\left(C_n+\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2$

$$=C_1^2+C_2^2+\ldots\ldots+C_n^2+\frac{2h}{\sqrt{n}}(C_1+C_2+\ldots+C_n)$$

$$+\underbrace{\left(\frac{h^2}{n}+\frac{h^2}{n}+\ldots\ldots+\frac{h^2}{n}\right)}_{n\left(\frac{h^2}{n}+\frac{h^2}{n}+\ldots+\frac{h^2}{n}\right)=h^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i^2+\frac{2h}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}C_i+h^2$$

- $f(C)=\|C\|^2=C_1^2+C_2^2+\ldots\ldots+C_n^2=\sum_{i=1}^{n}C_i^2$

- $\frac{\partial F}{\partial u}(C)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}C_i^2+\frac{2h}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}C_i+h^2-\sum_{i=1}^{n}C_i^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}C_i+h\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}C_i$$

Sabbagh

Date : / / Subject:

ـ ٥٥٥ تفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات ـ ٥٥٥

فهم ليست للحفظ (غير مطلوبة ٨٨)

لتكن $f : D \subseteq R^n \longrightarrow R$

مفتوحة

ولتكن $(a, b) = C \in D^\circ$

ولنفرض وجود عددين حقيقيين $h, K \in R$ بحيث

$\|(h, K)\| < \delta$ فإذا وجدت الأعداد A, B بحيث يحقق:

$$f(a+h, b+K) - f(a, b) = Ah + BK + \mu(h, K)\sqrt{h^2 + K^2}$$ (ليس للحفظ ٨٨)

وكانت $\lim\limits_{(h,K) \to (0,0)} \mu(h, K) = 0$

عندئذ نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق (المفاضلة) في النقطة (a, b)

ـ لتعيين A : نفرض $K = 0$

$$f(a+h, b) - f(a, b) = Ah + \mu(h, K)\sqrt{h^2}$$

نقسم على h الطرفين:

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A + \mu(h, K)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A + \underbrace{0}_{\lim \mu = 0}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$$

Date : / / Subject:

بنفس الطريقة لنقيس B : نفرض h = 0

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = B$$

للحفظ

ومنه :

• $f(a+h, b+k) - f(a,b) = h f_x(a,b) + k f_y(a,b) + \mu \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\|(h,k)\|}$

إذا تحقق : $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \mu = 0$

عندئذ f تكون قابلة للاشتقاق (المفاضلة).

مثال : ادرس قابلية الاشتقاق $f : R^2 \longrightarrow R$
في النقطة (0,0)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,0) \\ \frac{x y^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

الحل :

$$f(a+h, b+h) = f(h,k) = \frac{h k^2}{h^2+k^2}$$

$$f(a,b) = f(0,0) = 0$$

[اشتقاق عند نقطة حدية] $f_x(0,0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0} - 0}{h} = 0$$

Date : / / Subject:

$$f_y(0.0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0.0+h) - f(0.0)}{h} = 0$$

$$\frac{hk^2}{h^2+k^2} - 0 = 0 + 0 + \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\mu = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)(\sqrt{h^2+k^2})}$$

$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ جمع الأسس

$$\mu = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لحساب النهاية نأخذ فرضاً أن $h=k$

$$\mu = \frac{h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\lim \mu \neq 0$ من أجل نقطة ما فإن النهاية $\neq 0$

f غير قابلة للاشتقاق عند (0.0) .

مثال: ادرس قابلية الاشتقاق في (a, b)

$$f : R^2 \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy$$

الحل:

$$f(a+h, b+k) = (a+h)^2 + 2(a+h)(b+k)$$

$$= a^2 + 2ah + h^2 + 2ab + 2ak + 2hb + 2hk$$

$$f(a,b) = a^2 + 2ab$$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = 2ah + h^2 + 2ak + 2hb + 2hk$$

$$f_x(x,y) = 2x + 2y \Longrightarrow f_x(a,b) = 2a + 2b$$

$$f_y(x,y) = 2x \Longrightarrow f_y(a,b) = 2a$$

Date : / / Subject:

ومنه نعوض بقانون قابلية الاشتقاق :

$$2ah+h^2+2aK+2hb+2hK=2ah+2bh+2aK+\mu\sqrt{h^2+K^2}$$

$$h^2+2hK=\mu\sqrt{h^2+K^2}$$

$$\mu=\frac{h^2+2hK}{\sqrt{h^2+K^2}}$$

$$\lim_{(h,K)\to(0,0)}\mu\overset{?}{=}0$$

حسب تعريف النهايات :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 0<\|(h,K)\|<\delta$$
$$\Rightarrow|\mu-0|<\varepsilon$$

$$\frac{h^2+2hK}{\sqrt{h^2+K^2}}=\frac{h^2}{\sqrt{h^2+K^2}}+\frac{2hK}{\sqrt{h^2+K^2}}<\frac{h^2+K^2}{\sqrt{h^2+K^2}}+\frac{h^2+K^2}{\sqrt{h^2+K^2}}$$

ذلك لأن $2hK\leqslant h^2+K^2$

$$\Rightarrow h^2-2hK+K^2\geqslant0$$
$$\Rightarrow(h-K)^2\geqslant0$$

$$\frac{h^2+2hK}{h^2+K^2}<\frac{2(h^2+K^2)}{\sqrt{h^2+K^2}}=2\sqrt{h^2+K^2}=2\delta$$
$$=\varepsilon$$

ومنه :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0,\ 0<\|(h,K)\|<\delta$$
$$\Rightarrow|\mu-0|<\varepsilon$$

Sabbagh

Date : / /

Subject:

ملاحظة: اذا لم تكن $\|u\| = 1$:
نقسم على الطويلة

$$V = \frac{u}{\|u\|}$$

انتهت المحاضرة S

كلية الصالح
و
ناريما نجلو

Sabbagh

Date: / /

Subject:

التحليل (4)

المحاضرة (11)

s: هدى شماع

المحتوى العلمي:

1] مشتق فريشيه.

2] تعميم مشتق فريشيه وقابلية الاشتقاق.

3] مبرهنات + تمارين.

- لتكن $f: D \subseteq R^n \longrightarrow R$ مفتوحة

$C \in R^*$

$(h,K) \in R^2$ بحيث $\|(h,K)\| < \delta$

فهناك أعداد A, B بحيث:

$$f(a+h, b+K) - f(a,b) = \underbrace{A}_{f_x(a,b)} h + \underbrace{B}_{f_y(a,b)} K + \lambda \sqrt{h^2+K^2}$$

$$\lim_{(h,K)\to(0,0)} \lambda = 0$$

مشتق فريشيه : لتكن $d_c F : D \subseteq R^2 \longrightarrow R$

$$(h,k) \longmapsto d_c F(h,k) = h f_x(a,b) + k f_y(a,b)$$

ندعو هذه الدالة الخطية بـ f_x, f_y بمشتق فريشيه في (h,k)

مثال : $f : R^2 \longrightarrow R$

أوجد $d_c F(x-c)$

حيث $C = (0,-2)$

$$f(x,y) = x^3 + 4xy^2 + 2xy\sin x$$

الحل :

$$x - C = (x,y) - (0,-2) = (x, y+2)$$

$$d_{(0,-2)} F(x-C) = d_{(0,-2)} F(x, y+2) = x f_x(0,-2) + (y+2) f_y(0,-2)$$

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 2y\sin x + 2xy\cos x$$

$$f_x(0,-2) = 16$$

$$f_y(x,y) = 8xy + 2x\sin x$$

$$f_y(0,-2) = 0$$

$$d_{(0,-2)} F(x-C) = 16x + 0 = 16x$$

غير مطلوب

تعميم قابلية الاشتقاق بحالة $n \geq 3$: لتكن $f : D \subseteq R^n \longrightarrow R$

مفتوحة

$C \in D^\circ$ عندئذ توجد كرة مفتوحة مركزها C نصف قطرها δ

محتواة بـ D فإذا كانت $h = (h_1, h_2, \dots\dots, h_n) \in R^n$ بحيث $\|h\| < \delta$

Date : / / Subject:

فهنالك الأعداد $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \in R$

$$f(C+h) - f(C) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \lambda \|h\|$$

بشرط

$$\lim_{\|h\| \to 0} \lambda = 0$$

لتعيين A_1 نفرض: $h_1 \neq 0 \ , h_2 = h_3 = \ldots = h_n = 0$

إذا $\quad f(C+h) = f(C+h_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$

$$f(C+h) - f(C) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \lambda \|h\|$$

$$f(C_1+h_1, C_2, \ldots, C_n) - f(C_1, C_2, \ldots, C_n) = A_1 h_1 + \lambda \|h_1\|$$

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(C_1+h_1, C_2, C_3, \ldots C_n) - f(C_1, C_2, \ldots C_n)}{h_1} = A_1 \mp \lim_{\|h_1\| \to 0} \lambda$$

لكن بما أن: $\lim_{\|h_1\| \to 0} \lambda = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(C) = A_1$$

ومنه $\quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(C) = A_i$

وذلك بفرض $h_i \neq 0$

$h_j \neq 0$ من أجل $j \neq i$

Sabbagh

Date : / / Subject:

هذا القانون فقط مطلوب وللحفظ :

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n} h_i\, f_{x_i}(c)+\lambda\,\|h\|$$

بشرط $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\lambda=0$

تعميم مشتق فريشيه : (غير مطلوبة فقط القانون للحفظ ^_^)

لتكن $d_c f : D\subseteq R^n \longrightarrow R$

$C\in D^\circ$

حفظ . ★ $h \longmapsto d_c F(h)=\sum_{i=1}^{n} h_i\, F_{x_i}(C)$

ندعو هذه الدالة الخطية بمشتق فريشيه .

- ولتحقيق الانسجام بين الرموز القديمة والجديدة نفرض

$$d_{x_i} : R^n \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto d\,x_i(x)=x_i$$

$$h \longmapsto d\,h_i(x)=h_i$$

★ $d_i F(h)=\sum_{i=1}^{n} h_i\, F_{x_i}(c)$

$$d_c F(h)=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(c)\, d\,x_i(h)$$

$$\Longrightarrow d_c F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(c)\,\partial x_i$$

Sabbagh

Scanned by CamScanner

Date : / /

Subject:

مثال:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = e^{-(x+y+z)}$$

أوجد مشتق فريشيه في $x-C$ حيث $C(0,0,0)$

الحل:

$$x-C = (x,y,z)-(0,0,0) = (x,y,z)$$

$$d_C F(x-C) = d_{(0,0,0)} F(x,y,z) = x f_x(0,0,0) + y f_y(0,0,0) + z f_z(0,0,0)$$

$$f_x(x,y,z) = -e^{-(x+y+z)} = f_y(x,y,z) = f_z(x,y,z)$$

$$f_x(0,0,0) = f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = -1$$

$$d_C F(x,y,z) = -x-y-z$$

مبرهنة: (مكررة في الدورات ٨-٨)

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$،

ولتكن $C \in D^\circ$

فإذا كانت f قابلة للاشتقاق في C فهنالك عددان موجبان K, δ

بحيث يحقق $\|x-C\| < \delta$

كان $|f(x)-f(C)| < K\|x-C\|$

Sabbagh

Date : / / Subject:

الإثبات: بما أن f قابلة للاشتقاق ، يوجد δ_1 موجب

بحيث إذا كانت $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n \in R^n$

بحيث $\|h\| < \delta$

فهنالك $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \in R$ بحيث

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \lambda \|h\|$$

بشرط أن:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \lambda = 0$$

$$|f(c+h) - f(c)| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \lambda \|h\|\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i||h_i| + |\lambda| \|h\|$$

ولكن لأن

$$\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$$

$$|h_i| \leq \|h\|$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n} |A_i| + |\lambda|\right] \|h\|$$

لكن من الفرض

$$\lim_{\|h\| \to 0} \lambda = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \varepsilon = 1, \ \exists \delta_\varepsilon > 0, \ 0 < \|h\| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\lambda - 0| < 1$$

$$|f(c+h) - f(c)| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |A_i| + |\lambda|\right] \|h\| < \left[\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1\right] \|h\|$$

نسمي $K = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1$, $c+h = X$

Sabbagh

Date : / / Subject:

نعوضا :

$$|f(x) - f(c)| < k\|x-c\|$$

أي يوجد k موجبة $0<$

بحيث $0 < \varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\|h\| < \delta$$

أي $\|x-c\| < \delta$

فإن $|f(x) - f(y)| < k\|x-c\|$

مبرهنة : (مطلوبة ومهمة ٨٨)

لتكن $f : D \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن $c \in D^{\circ}$ فإذا كانت f قابلة للاشتقاق في c

فإن F مستمر في c

الإثبات :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x-c\| < \delta$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

ليكن ε عدد موجب وبما أن f قابلة للاشتقاق

يوجد عددات موجبات k, δ بحيث إذا كان

$$\|x-c\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < k\|x-c\| < k\delta$$

$$< k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

بالتالي بفرض $\delta \leq \frac{\varepsilon}{k}$

أي f مستمرة في c ومنه f قابلة للاشتقاق $\Longrightarrow f$ مستمرة

f غير قابلة للاشتقاق $\Longleftrightarrow f$ غير مستمرة

Sabbagh

Date : / / Subject:

$f: R^2 \longrightarrow R$

تمرين :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & : y \neq 0 \\ 0 & : y = 0 \end{cases}$$

أثبت أن f غير قابلة للاشتقاق عند $(0,0)$

الحل : يكفي إثبات أن f غير مستمرة

$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon = \frac{1}{2},\ \exists \delta > 0,\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$

$\Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$

بفرض $x = y = \underbrace{\frac{\delta}{2}}$

نختار نقط بحيث تكون أصغر من δ

$\|(x,y)\| = \|(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})\| = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \sqrt{(\frac{\delta}{2})^2} < \frac{\delta}{2}$

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right| = 1 > \frac{1}{2}$$

أي f غير مستمرة عند $(0,0)$ فهي غير قابلة للاشتقاق

انتهت المحاضرة :

لكم الصحة

ناريمان جلو