سنبدأ بمراجعة لما أخذناه في التحليل التابعي١

التحليل الدالي:

دراسة الفضاءات التي عناصرها دوال والعمليات عليها

تعريف التراص:

نقول عن فضاء متريX انه متراص إذا حوت كل متتالية في Xمتتالية جزئية متقاربة

مبرهنة التراص:

الشط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء منظم منتهي البعد متراصة هو أن تكون M مغلقة و محدودة

مثال :

لدينا في R^2

R كفضاء جزئي في R^2 مغلقة لأن متممتها مفتوحة حيث متمم R هو نصف المستوي العلوي بدون المحيط ونصف المستوي السفلي بدون المحيط

وكل منهما مجموعة مفتوحة و اجتماعهما مجموعة مفتوحة

إن R مجموعة جزئية في R^2 بسبب وجود تطبيق إيزومتري (هو تطبيق يحافظ على المسافة بين العناصر و صورها) و تقابل بين R و الثنائيات (x,0) في R^2 .

مبرهنة التمام :

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاما ، و بوجه خاص ، كل فضاء منظم منتهي البعد تام.

انتهت المحاضرة

إعداد : رشا رويعي

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة الثانية عنوان المحاضرة : المؤثرات الخطية

المؤثرات الخطية

المؤثر:

هو تطبيق من فضاء متجهي x إلى فضاء متجهي y

$$T: X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto Tx$$

المؤثر الخطي:

المؤثر الخطي T هو مؤثر $T: D(T) \longrightarrow R(T)$ يحقق :

١-الساحة $D(T)$ للمؤثر T فضاء متجهي ، و المدى $R(T)$ يقع في فضاء متجهي على الحقل نفسه.

٢-إذا كان $x, y \in D(T)$ فإن :

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

حيث Tx هو تبسيط للرمز $T(x)$، كما لدينا الرموز التالية :

$R(T)$ للدلالة على مدى T حيث :

$$R(T) = \{Tx \quad ; x \in D(T)\}$$

إن $R(T)$ بالحالة العامة ليس بالضرورة أن يكون فضاء متجهي لكن عندما يكون T مؤثر خطي فيجب أن يكون $R(T)$ فضاء متجهي

-الفضاء الصفري :

$$N(T) = \{x \in D(T) \ \ ; Tx = 0\}$$

-الفضاء الثابت:

$$F(T) = \{x \in X \ \ ; Tx = x\}$$

$$T: X \to X$$

حيث T مؤثراً خطياً

-كون T مؤثراً خطياً فإن كل من $F(T)$و$N(T)$ فضاءً متجهي .

* ليكن $T: X \to Y$ مؤثر خطي

كونه خطي فإنه يحقق :

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

الشرطين يكافئان الشرط $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$

فإذا أخذنا $\alpha = 0$ فإن $T0 = 0$

لكن إذا كان $Tx = 0$ فليس بالضرورة أن يكون $x = 0$

أمثلة

١-المؤثر المطابق :

$$I: X \to X$$

$$x \mapsto Ix = x$$

$N(T) = \{0\}$ حيث

$$D(T) = R(T) = F(T) = X$$

٢-المؤثر الصفري:

$$0: \mathrm{X} \to X$$

$$x \longmapsto 0x = 0$$

حيث $D(T) = N(T) = X$

$$\mathrm{R(T)} = \{0_Y\}$$

٣-مؤثر المفاضلة:

$$T: P[a, b] \to P[a, b]$$

حيث $P[a, b]$ فضاء الحدوديات على$[a, b]$

$$x \longmapsto Tx(t) = x'(t)$$

$$N(T) = \{c\, ; c \in R\}$$

والمؤثر T هنا هو تطبيق غامر

٤-مؤثر المكاملة:

$$T: C[a, b] \to c[a, b]$$

$$x \longmapsto Tx(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau$$

حيث تكامل الدالة المستمرة دالة مستمرة

$$N(T) = \{0\}$$

$$F(T) = \{0\}$$

٥-مؤثر الضرب ب t :

$$T: C[a,b] \to C[a,b]$$

$$x \mapsto Tx(t) = tx(t)$$

$$F(T) = \{0\}$$

$$N(T) = \{0\}$$

٦-جبر المتجهات الابتدائي:

$$T: R^3 \longrightarrow R^3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto Tx = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

٧-المصفوفات:

$$A \in M(K)_{n\times m}$$

$$A: K^n \longrightarrow K^n$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$

$$Ax = y$$

Tخطي كون عملية ضرب المصفوفات خطية.

-يمكننا التحقق بسهولة في هذه الأمثلة بأن كلاً من المدى والفضاء الصفري للمؤثرات الخطية الواردة هي فضاءات خطية.

انتهت المحاضرة الثانية

إعداد :رشا رويعي

◄ دكتور المادة: جمال مللي

نظري

◄المحاضرة الثالثة عنوان المحاضرة: المؤثرات الخطية

سنكمل في المؤثرات الخطية :

مبرهنة (المدى والفضاء الصفري) :

إذا كان T مؤثراً خطياً ،فإننا نجد ما يلي :

١-المدى $R(T)$ هو فضاء متجهي .

٢-إذا كان $\dim D(T) = n \leq \infty$ ، فإن $\dim R(T) \leq n$.

٣-الفضاء الصفري N(T) هو فضاء متجهي.

البرهان:

١-نأخذ أي عنصرين $y_1, y_2 \in R(T)$ فيوجد عنصران $x_1, x_2 D(T)$ بحيث أن

$$Tx_1 = y_1 \quad ، \quad y_2 = Tx_2$$

كما أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$ نظرا لكون D(T) فضاء متجهي ، إن خطية T تقتضي إن يكون

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

اذن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$ وكون y_1, y_2 كيفيين من $R(T)$ و α, β كيفيان ، فأن R(T) فضاء متجهي .

٢-لنختر المتجهات $y_1, \cdots, y_{n+1} \in R(T)$ بصورة كيفية ،عندها توجد عناصر $x_1, \cdots x_{n+1} \in D(T)$

بحيث أن $Tx_1 = y_1$ و $\cdots$ و $\mathrm{T}x_{n+1} = y_{n+1}$

ولما كان $dimD(T) = n$ فأن المجموعة $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ لابد أن تكون مرتبطة خطياً

وبالتالي فأن: $\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$

حيث $\alpha_1, \cdots \alpha_{n+1}$ أعداد أحدها على الاقل مغاير للصفر ، و بما أن T خطي و ان $T0 = 0$ فأننا نجد بتطبيق T على طرفي المساواة السابقة:

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0$$

هذا يبين أن $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ مجموعة مرتبطة خطياً لأن الأعداد α_i ليست مساوية للصفر وكون هذا المجموعة كيفية من $R(T)$ ، فأننا نستنتج أن $R(T)$ لا يحوي مجموعة جزئية مستقلة خطياً و هذا يعني تعريفاً أن $dimR(T) \leq n$

٣- $\forall x_1, x_2 \in N(T)$ عندئذ يكون $Tx_1 = Tx_2 = 0$ وبما أن T خطي فأننا نجد :

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0$$

و ذلك أياً كان العددان α و β، وهذا يبين أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$ ، بالتالي $N(T)$ فضاء متجهي .

وكنتيجة مباشرة على المبرهنة السابقة:

إن المؤثرات الخطية تحفظ الارتباط الخطي .

عكس مؤثر خطي :

تذكرة:

يقال عن تطبيق $T: D(T) \to Y$ انه متباين اذا كان للنقاط المختلفة من ساحته صور مختلفة أي :

اذا كان $x_1, x_2 \in D(T)$ فان:

$$Tx_1 = Tx_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

و في هذه الحالة يوجد تطبيق: $T^{-1}: R(T) \to D(T)$

$$y_0 \longmapsto x_0$$

يسمى التطبيق T^{-1} بالتطبيق العكسي ل T.

مبرهنة (المؤثر العكسي):

ليكن X , Y فضاءين متجهيين كلاهما كلاهما حقيقي أو عقدي، و ليكن $T: D(T) \to R(T)$ مؤثراً خطياً عندئذ نجد ما يلي:

١- الشرط اللازم و الكافي كي يكون المؤثر العكسي موجود هو أن يكون :

$$Tx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

٢ - إذا كان T^{-1} موجوداً ،فإنه مؤثر خطي .

٣ - إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$، و كان T^{-1} موجودا، فأن $\dim R(T) = dimD(T)$.

البرهان :

١ – لنفرض أن

$$Tx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

عندئذ نجد نظرا لكون T خطيا أن المساواة $Tx_1 = Tx_2$ تقتضي :

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftarrow$$

$$x_1 = x_2 \quad \Leftarrow$$

و كون T متباين فيكون T^{-1} موجود

وبالعكس، إذا كان T^{-1} موجودا كان T متباينا و عند وضع $x_2 = 0$ و من تعريف التباين :

$$Tx_1 = T0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

٢ – سنفرض أن T^{-1} موجود ، إن ساحة T^{-1} هي $R(T)$ و هي فضاء خطي (استنادا إلى مبرهنة المدى و الفضاء الصفري)، لنأخذ $x_1, x_2 \in D(T)$ و صورتيهما :

$$Tx_1 = y_1 \quad , Tx_2 = y_2$$

عندئذ يكون

$$x_1 = T^{-1}y_1 \quad , \qquad x_2 = T^{-1}y_2 \quad \rightarrow (1)$$

بما أن T خطي ، نجد انه أيا كان β و α فإن:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

حسب (١) فأن :

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$$

بالتالي المؤثر العكسي هو مؤثر خطي .

٣ – لدينا حسب مبرهنة (المدى و الفضاء الصفري) المتباينة $\dim R(T) \leq dimD(T)$ و المتباينة $\dim D(T) \leq dimR(T)$ اعتمادا على نفس المبرهنة لدى تطبيقها على T^{-1} .

تمهيدية (عكس الجداء):

ليكن $S: Y \to Z$, $T: X \to Y$ مؤثرين خطيين متباينين و غامرين، حيث X, Y, Z فضاءات متجهية، عندئذ يكون العكس $(ST)^{-1}: Z \to X$ للجداء ST موجوداً ، ويكون :

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

المؤثرات الخطية المحدودة و المستمرة

تعريف المؤثر الخطي المحدود :

ليكن X وY فضاءين منظمين ، و ليكن $T: D(T) \to Y$ مؤثراً خطياً حيث $D(T) \subset X$ ، نقول عن المؤثر T إنه محدود اذا وجد عدد حقيقي c بحيث تحقق المتباينة :

$$\| Tx \| \leq c \| x \| \qquad \cdots \#$$

إن المؤثر الخطي المحدود ينقل المجموعات المحدودة في $D(T)$ إلى مجموعات محدودة في Y.

سؤال:

ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد c بحيث تبقى # صحيحة أياً كان العنصر غير الصفري $x \in D(T)$ ؟

نجد أن : $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$

وهذا يبين أن كبر c يجب أن يكون على الأقل بقدر الحد الاعلى للعبارة الواردة في اليسار عندما تمسح x المجموعة $D(T) - \{0\}$، لذا فأن أصغر قيمة ممكنة تأخذها c هي :

$$\| T \| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\| Tx \|}{\| x \|}$$

يسمى نظيم المؤثر T .

تمهيدية (النظيم):

ليكن T مؤثراً خطياً محدوداً عندئذ نجد ما يلي :

١ - ثمة صيغة بديلة لنظيم T محددة بالدستور

$$\| T \| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| = 1}} \| Tx \|$$

٢ – النظيم

$$\| T \| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{\| Tx \|}{\| x \|}$$

يحقق شروط النظيم.

البرهان:

١ - اذا فرضنا $\| x \| = a$ و أن $y = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{a}$ فإننا نجد $\| y \| = 1$ و بسبب خطية T :

$$\| T \| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{1}{a} \| Tx \| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \| T\left(\frac{1}{a}x\right) \| = \sup_{\substack{y\in D(T)\\ \|y\|=1}} \| Ty \|$$

اذا كتبنا x عوضا عن y في الطرف الثاني نحصل على المطلوب.

٢ – إن الشروط الثلاثة الاولى من شروط النظيم محققة(تترك للقارئ)

سنبرهن الشرط الرابع :

$$\| T_1x + T_2x \| \le \| T_1x \| + \| T_2x \|$$

$$\sup_{\|x\|=1} \| (T_1 + T_2)x \| = \sup_{\|x\|=1} \| T_1x + T_2x \| \le \sup_{\|x\|=1} \| T_1x \| + \sup_{\|x\|=1} \| T_2x \|$$

حيث $x \in D(T)$.

انتهت المحاضرة

اعداد : رشا رويعي

◀ دكتور المادة: جمال مللي

◀المحاضرة الرابعة　　　　عنوان المحاضرة : المؤثرات الخطية

سنبدأ بأمثلة عن المؤثرات الخطية المحدودة :

أمثلة

١-المؤثر المطابق :

$$I: X \to X$$

على فضاء منظم $X \neq \{0\}$ محدود لأن: $\| Tx \| = \| x \| \leq c \| x \|$

بالتالي تتحقق المتراجحة من أجل $c = 1$

و نظيمه $\| T \| = 1$

٢-المؤثر الصفري:

$$\mathbf{0}: \mathbf{X} \to \boldsymbol{X}$$

على فضاء منظم X محدود ونظيمه $\| T \| = 0$

حيث النظيم المعرف على المنطلق هو ذاته المعرف على المستقر .

٣- مؤثر المفاضلة:

ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من كل الحدوديات على $J = [0,1]$، حيث النظيم معطى بالمساواة

$$\| \mathrm{x} \| = \max |x(t)|$$

و $T: X \to X$

$$x(t) \longmapsto Tx(t) = x'(t) \quad , t \in [0,1]$$

مؤثر خطي وليس محدود

البرهان:

لنأخذ $x(t) = t^n$ حيث $n \in N$ من الواضح أن :

$$\| x(t) \| = 1^n = 1 \quad ; t \in [0,1]$$

كما أن :

$$\| Tx(t) \| = \| nt^{n-1} \| = n \| t^{n-1} \| = n$$

و حتى يكون المؤثر T محدودا يجب أن يوجد c يحقق المتراجحة :

$$\| Tx(t) \| \leq c \| x \|$$

$$n \leq c.1 = c$$

ولما كان $n \in N$ كيفي ،بالتالي لا يوجد c محقق لأجل كل $x(t) \in X$ ،بالتالي T ليس محدود .

٤-المؤثر التكاملي:

$$T: c[0,1] \to c[0,1]$$

$$y(t) = T\big(x(t)\big) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

حيث k دالة مستمرة على المربع [0,1]x[0,1]

إن T محدود.

البرهان :

$$\| Tx \| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| \leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau$$

لدينا $k(t,\tau)$ مستمرة على مربع مغلق فهي محدودة، بالتالي بوجد k_0 بحيث $|k(t,\tau)| \leq k_0$

كما أن $x(t)$ مستمرة على مجال مغلق فهي محدودة و أن:

$$\| x(t) \| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \geq |x(t)|$$

بالتالي نلاحظ أن:

$$\| \mathrm{Tx} \| \leq k_0 \| x \| \int_0^1 d\tau = k_0 \| x \|$$

مما يدل أن T محدود.

انتهت المحاضرة

اعداد

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة الخامسة عنوان المحاضرة : المؤثرات الخطية

مبرهنة (البعد المنتهي)

إذا كان الفضاء المنظم X منتهي البعد ، فان كل مؤثر خطي على X محدود .

البرهان :

لنفرض أن $\dim X = n$ و أن $\{e_1, \cdots, e_2\}$قاعدة ل X .

لنأخذ أي عنصر $x = \sum \xi_i e_i$ ،ولننظر في أي مؤثر خطي Tعلى X .

لما كان T خطيا فأن :

$$\| Tx \| = \| \sum \xi_i Te_i \| \le \sum |\xi_i| \, \| Te_i \| \le \max_k \| Te_i \| \sum |\xi_i| \qquad ,\{1, \dots \dots, n\}$$

و بتطبيق تمهيدية التراكيب الخطية على المجموع الأخير مفترضين أن :

$\xi_i = \alpha_i$ و $x_i = e_i$ ، ونجد أن :

$$\sum |\xi_i| \le \frac{1}{c} \| \sum \xi_i Te_i \| = \frac{1}{c} \| x \|$$

نستنتج مما سبق أن :

$$\| Tx \| \le \gamma \| x \|$$

حيث $\gamma = \frac{1}{c} \max_k \| Te_i \|$

بالتالي T محدود .

مبرهنة الاستمرار و المحدودية :

ليكن $T: D(T) \to Y$ مؤثرا خطياً ،حيث $D(T) \subset X$ و X , Y فضاءان منظمان . عندئذ نجد ما يلي :

١ - الشرط اللازم و الكافي كي يكون T مستمرا هو أن يكون محدودا .

٢ – اذا كان T مستمرا في نقطة واحدة فقط ، فانه مستمر .

البرهان :

١ - $\Rightarrow$

في حال $T = 0$ محققة وضوحا ، لنفرض الان أن $T \neq 0$

عندئذ يكون $\| T \| \neq 0$

سنفرض أولا أن T محدود ، و لنأخذ $x_0 \in D(T)$ ، $\varepsilon > 0$ عندئذ نجد بسبب خطية T :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ و } x \in D(T) \quad : \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\| T \|} \; ; \; \| x - x_0 \| < \delta$$

فأن : $\| Tx - Tx_0 \| = \| T(x - x_0) \| \leq \| T \| \| x - x_0 \| < \delta \| T \| = \varepsilon$

و بما أن $x_0 \in D(T)$ عنصر اختياري ، نستنتج أن T مستمر .

$\Leftarrow$

لنفرض أن T مستمر في نقطة اختيارية $x_0 \in D(T)$ عندئذ نجد :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad ; \; \| Tx - Tx_0 \| \leq \varepsilon$$

بحيث $\forall x \in D(T)$ الذي يحقق

$$\| x - x_0 \| \leq \delta$$

لنأخذ $0 \neq y \in D(T)x$ و لنضع $x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$ و لما كان T خطيا ، فإننا نجد :

$$\| Tx - Tx_0 \| = \| T(x - x_0) \| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\| y \|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{\| y \|} \| Ty \|$$

عندئذ يترتب على كون $\| Tx - Tx_0 \| \leq \varepsilon$ أن :

$$\frac{\delta}{\| y \|} \| Ty \| \leq \varepsilon$$

اذن $\| Ty \| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \| y \|$ نستنتج أن T محدود .

٢ – ان استمرار T في نقطة يقتضي محدودية T و المحدودية تقتضي الاستمرار (حيث الاستمرار و المحدودية متكافئان في المؤثرات الخطية) .

نتيجة :

(الاستمرار ، الفضاء الصفري) :

اذا كان T مؤثرا خطيا محدودا فأن :

١ -$x_n \to x$ حيث $x_n , x \epsilon D(T)$ يقتضي $Tx_n \to Tx$.

٢ – الفضاء الصفري $N(T)$ مغلق .

البرهان :

١ – عندما $n \to \infty$ نجد :

$$\| Tx - Tx_0 \| = \| T(x - x_0) \| \leq \| T \| \| x - x_0 \| \to 0$$

٢ – يوجد لكل $x \in N(T)$ متتالية (x_n) في $N(T)$ بحيث أن $x_n \to x$.

لذا فأن $Tx_n \to Tx$ استنادا الى (١) من هذه النتيجة . كذلك فان $Tx = 0$ لأن $Tx_n = 0$ و هذا يقتضي أن $x \in N(T)$ و كونه عنصر اختياري فأن $N(T)$ مغلق .

انتهت المحاضرة

اعداد : رشا رويعي

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة السادسة عنوان المحاضرة: المؤثرات الخطية

تساوي مؤثرين :

نقول عن مؤثرين T_1وT_2 إنهما متساويين إذا كان :

$D(T_1) = D(T_2)$ وكان $T_1 x = T_2 x$ ايا كان x من $D(T_1) = D(T_2)$

و ممدد مؤثر Tإلى مجموعة M تحوي $D(T)$هو مؤثر $\bar{T}: M \to Y$ بحيث أن $T = \bar{T}|_{D(T)}$

أي أن $\bar{T}x = Tx$ أيا كان $x \in D(T)$.

إن هذا يشمل حالة التمديد من مجموعة كثيفة في فضاء منظم X إلى الفضاء X كله . و هو يشمل أيضاً حالة التمديد من فضاء منظم X إلى اتمامه .

مبرهنة (الممدد الخطي المحدود) :

ليكن $T: D(T) \to Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث $D(T)$ واقعة في فضاء منظم X و حيث Y باناخ فضاء . عندئذ يوجد للمؤثر T ممدد هو

$$\bar{T}: \overline{D(T)} \to Y$$

حيث $\bar{T}$ مؤثر خطي محدود نظيمه : $\| \bar{T} \| = \| T \|$

البرهان :

بداية سنثبت أن $\overline{D(T)}$ فضاء متجهي :

$$\forall x, y \in \overline{D(T)} \implies \exists x_n, y_n \in D(T) \,;\, x_n \to x \,, y_n \to y$$

ولتكن α وβ من الحقل K عندئذ :

$$\alpha x_n + \beta y_n \underbrace{\in}_{D(T)\text{ فضاء متجهي}} D(T)$$

إن $\alpha x_n + \beta y_n \longrightarrow \alpha x + \beta y \quad \Leftarrow \quad \alpha x + \beta y \in \overline{D(T)}$

حيث وجدنا متتالية من $D(T)$ تسعى إليه بالتالي $\overline{D(T)}$ فضاء متجهي

- بناء $\bar{T}$:

$$\forall x \in \overline{D(T)} \Longrightarrow \exists x_n \to x \ ; \quad x_n \in D(T)$$

x_n متقاربة من x فهي كوشية في $D(T)$ أي أن :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in N \, , \forall m,n \geq n_0 \implies \| x_m - x_n \| < \varepsilon$$

و نجد أن :

$$\| Tx_m - Tx_n \| = \| T(x_m - x_n) \| \leq \| T \| . \| x_m - x_n \| < \| T \| . \varepsilon$$

و ذلك بسبب المحدودية ل T

مما سبق نجد أن Tx_n كوشية في Y و كون Y فضاء باناخ فأن Tx_n متقاربة أي $Tx_n \longrightarrow y \in Y$

نعرف المؤثر $\bar{T}$ بالمساواة $\bar{T}\, x = y$

- اثبات الخاصة التابعية ل $\bar{T}$:

علينا اثبات أن النقطة y مستقلة عن اختيار المتتالية المتقاربة من X

لنأخذ متتاليتين x_nوz_n بحيث أن :

$$x_n \to x \text{ و } z_n \to x$$

و لنثبت أن المتتاليتان Tx_n , Tz_n متقاربتين إلى نفس النقطة في Y

لنأخذ المتتالية :

$$v_m = \{x_1 z_1, \cdots, x_n z_n\} \longrightarrow x$$

إن المتتالية v_m تتقارب من x و ذلك كون أي متتالية جزئية منها تتقارب إلى x .

$$\| Tv_n - Tv_m \| \leq \| T \| . \| v_n - v_m \| \quad \cdots \quad @$$

لما كانت v_n متقاربة بالتالي v_n كوشية بالتالي :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in N \, , \forall m,n \geq n_0 \implies \| v_n - v_m \| < \varepsilon$$

بالتعويض في @ نجد أن Tv_n كوشية وفي فضاء باناخ فهي متقاربة

بالتالي كل متتالية جزئية منها ستتقارب إلى نفس النهاية و هذا يعطي أن y مستقل عن المتتالية المأخوذة في المنطلق و المتقاربة من x

بالتالي y تتعين بشكل وحيد أي أن $\bar{T}$ يتمتع بالخاصة التابعية .

- لنثبت الخطية ل $\bar{T}$:
سنثبت شرط الضرب ب α
- $\forall \alpha \in K , x \in \overline{D(T)} \Longrightarrow x_n \to x \,; \quad x_n \in D(T)$

$\Longrightarrow \exists \alpha x_n \to \alpha x$ (صحيحة بسبب التقارب)

لدينا $\bar{T}\, x = y$

بالتالي $\bar{T} \alpha x_n \to \alpha y$

$$\bar{T}(\alpha\, x) = \alpha \bar{T}\, x$$

و بنفس الطريقة نثبت شرط المجموع .

- اثبات أن $\bar{T} = T$ و يتطابق مع T على $D(T)$ أي أن $\bar{T}$ يمدد ل T :

$$\forall x \in D(T) \subseteq \bar{D}(T) \Longrightarrow x \in \bar{D}(T)$$

$$\exists x_n \to x \implies \bar{T}x = \lim_{n\to\infty}(Tx_n) \underbrace{=}_{\text{محدود فهو مستمر } T} T \lim_{n\to\infty}(x_n) = Tx$$

- اثبات أن $\bar{T}$ محدود و يحقق المساواة : $\| \bar{T} \| = \| T \|$:

إن $\bar{T}$ محدود لأن :

$$\forall x \in \overline{D(T)} \Longrightarrow \exists x_n \to x \,; \quad x_n \in D(T)$$

و كون T محدود فأن :

$$\| Tx_n \| \le \| T \| . \| x_n \|$$

$$\lim_{n\to\infty} \| Tx_n \| \le \lim_{n\to\infty} \| T \| \| x_n \|$$

كون النظيم مستمر $\| \lim_{n\to\infty} Tx_n \| \le \| T \| . \| \lim_{n\to\infty} x_n \|$

$$\| \bar{T}x \| \le \| T \| . \| x \| \quad \ldots \quad \$$$

و منه $\bar{T}$ محدود .

الان لنثبت أن $\| \bar{T} \| = \| T \|$:

من $ نجد :

$$\frac{\| \bar{T}x \|}{\| x \|} \leq \| T \|$$

$$\sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in D(T)}} \frac{\| \bar{T}x \|}{\| x \|} \leq \| T \|$$

$$\| \bar{T} \| \leq \| T \|$$

و من جهة اخرى $D(T) \subseteq \overline{D(T)}$ و بالتالي نجد :

$$\sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in D(T)}} \frac{\| \bar{T}x \|}{\| x \|} \leq \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in D(T)}} \frac{\| \bar{T}x \|}{\| x \|}$$

لكون $\bar{T}$ ممدد T $\quad \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in D(T)}} \frac{\|\bar{T}x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in D(T)}} \frac{\|\bar{T}x\|}{\|x\|}$

و منه : $\| T \| \leq \| \bar{T} \|$

مما سبق نجد أن $\| \bar{T} \| = \| T \|$.

و هو المطلوب .

انتهت المحاضرة

اعداد : رشا رويعي

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة السابعة عنوان المحاضرة: الداليات الخطية

نظري

الداليات الخطية

الدالي : هو مؤثر يقع مداه في المحور الحقيقي أو المستوي العقدي .

تعريف الدالي الخطي :

الدالي الخطي f هو مؤثر خطي ، تقع ساحته في فضاء متجهي X و مداه في الحقل العددي K للفضاء X ، و هكذا فأن :

$$f: D(T) \to K$$

حيث $K = R$ اذا كان X حقيقيا ، و $K = C$ اذا كان X عقديا .

تعرف الدالي الخطي المحدود :

الدالي الخطي المحدود f هو مؤثر خطي محدود ، يقع مداه في الحقل العددي للفضاء المنظم X الذي تقع فيه الساحة $D(T)$. لذا فهناك عدد حقيقي c بحيث انه أيا كان $x \in D(T)$ فأن :

$$|f| \le c \parallel x \parallel$$

و نظيم f هو :

$$\parallel f \parallel = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \ne 0}} \frac{|f(x)|}{\parallel x \parallel}$$

أو

$$\parallel f \parallel = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \parallel x \parallel = 1}} |f(x)|$$

و يكون : $|f(x)| \le \parallel f \parallel \parallel x \parallel$.

مبرهنة الاستمرار و المحدودية :

الشرط اللازم و الكافي كي يكون الدالي الخطي f الذي ساحته D(f) واقعة في فضاء منظم مستمرا هو أن يكون f محدودا .

أمثلة

١ – النظيم :

النظيم $\|.\|: X \to R$ على فضاء منظم $(X, \|.\|)$ هو دالي على X ، و هذا النظيم غير خطي لأن النظيم يحقق متراجحة المثلث ، أي أن :

$$\| x_1 + x_2 \| \leq \| x_1 \| + \| x_2 \|$$

٢ – الجداء العددي :

يعين الضرب العددي المألوف لدى تثبيت أحد العاملين داليا $f : R^3 \to R$ وفق القاعدة :

$$f(x) = x.a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3$$

حيث $a = (\alpha_i) \in R^3$ متجه مثبت .

أثبت كونه خطي و أوجد نظيمه .

إن f خطي . كذلك ، فإن f محدود ، لدينا :

$$|f(x)| = |x.a| \leq \| x \| \| a \|$$

و هكذا نجد أن $\| f \| \leq \| \alpha \|$ استنادا إلى $\| f \| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$ و ذلك إذا أخذنا الحد الأعلى لكل العناصر x التي نظيم كل منها يساوي الواحد . و نجد من جهة ثانية عند أخذ $x = \alpha$ و استخدام $|f(x)| \leq \| f \| \| x \|$ أن :

$$\| f \| \geq \frac{|f(x)|}{\| a \|} = \frac{\| a \|^2}{\| a \|} = \| a \|$$

لذا فأن نظيم f هو

$$\| f \| = \| a \|$$

٣ – التكامل المحدد :

$$f : C[a, b] \to R$$

$$x \longmapsto f(x) = \int_a^b x(t)dt$$

حيث $x \in C[a,b]$

إن f خطي . سنثبت أنه محدود ، و أن نظيمه هو $\| f \| = b - a$

إن :

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq (b-a) \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = (b-a) \| x \|$$

حيث $x(t)$ مستمرة على مجال مغلق فهي محدودة .

فإذا أخذنا $x_0 = 1$ الذي نظيمه $\| x_0 \| = 1$

نجد أن :

$$\| f \| = \sup_{\substack{x\in D(T) \\ \|x\|=1}} |f(x)| \geq |f(x_0)| = \int_a^b dt = b - a$$

مما يبين أن : $\| f \| = b - a$

٤ – الفضاء $C[a,b]$:

ليكن $f_1 : C[a,b] \to K$

$$x \longmapsto f_1(x) = x(t_0) \quad ; \quad t_0 \in [a,b] \text{مثبت}$$

إن f_1 خطي (اثبت ذلك)

كما أن f_1 محدود لأن :

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \max_{t_0\in[a,b]} x(t_0) = \| x \|$$

بالتالي نلاحظ أن : $\| f_1 \| \leq 1$

هذا من جهة و من جهة أخرى فإن :

$$\| f_1 \| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{|f_1(x)|}{\| x \|} \geq f_1(1) = 1$$

بالتالي فأن : $\| f_1 \| = 1$.

٥ – الفضاء l^2 :

ليكن $f: l^2 \longrightarrow K$

$$x = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$$

حيث $l^2 \in (a_i) = a, (\varepsilon_i) = x$

إن f محدود حيث :

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i a_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2} = \| x \| . \| a \|$$

بالتالي يكون f محدودا و أن $\| f \| \leq \| a \|$

و باختيار $x = a$ عنصرا مثبتا نجد أن :

$$\| \mathrm{f} \| \geq \frac{\| a \|^2}{\| a \|} = \| a \|$$

و يكون $\| f \| = \| a \|$

....

الفضاء الثنوي الجبري الأول و الثاني

لنأخذ مجموعة كل الداليات الخطية المعرفة على فضاء متجهي X ، إن هذه المجموعة بحد ذاتها فضاء متجهي حيث أن عناصرها داليات معرفة على فضاء متجهي X، وفق العمليتين التاليتين :

$$(f_1 + f_2)x = f_1 x + f_2 x$$

$$(\alpha \mathrm{f})(\mathrm{x}) = \alpha . \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

يدعى هذا الفضاء بالفضاء الثنوي الجبري ل X و يرمز له بالرمز X^* .

وكذلك نعرف الفضاء الثنوي الجبري ل X^* و يرمز له بالرمز X^{**} الذي عناصرها داليات معرفة على X^*

يبين الجدول التالي الفرق بين الفضاءات :

القيمة في نقطة	العنصر العام	الفضاء
	x	X
$\mathbf{f(x)}$	f	X^*
$\mathbf{g(x)}$	g	X^{**}
....		

إن $g \in X^{**}$ هو دالي خطي معرف على X^* بالشكل :

$$g(f) = g_x(f) = f(x)$$

حيث x عنصر مثبت و f دالي متغير في X^*

و كتبنا g_x دليل على تثبيت العنصر x عند نغير الداليات f

إن $g = g_x$ خطي (اثبت ذلك) .

- لقد عرفنا الفضاء الثنوي الجبري ل X و الفضاء الثنوي الثاني لX، لايجاد علاقة تربط بين الفضاء Xو الفضاء الثنوي الثاني له حيث اننا نعرف التطبيق :

$$C: X \to X^{**}$$

$$x \longmapsto C(x) = g_x$$

و يدعى C التطبيق القانوني ل X في X^{**}

إن C خطي (اثبت ذلك) . (اثبات الخطية لكل التطبيقات السابقة مطلوب و يثبت بسهولة).

الفضاءين الايزومورفيزميين (المتماثلين)

نقول عن X و $\hat{X}$ انهما متماثلين أذا وجد تطبيق T متباين و غامر بينهما :

$$T: X \to \hat{X}$$

و يحافظ على المسافة بين العناصر و صورها ، و يسمى T ايزومورفيزم .

.. انتهت المحاضرة .. اعداد: رشا رويعي