٢٤ / ٢ / ٢٠١٩ - المحاضرة الأولى معادلات تفاضلية 2 الدكتورة: ملك مارديني

يسعدنا أن نبدأ بالمحاضرة الأولى من المعادلات التفاضلية 2 الذي هو يعتبر امتداداً للمعادلات التفاضلية 1

عنوان المحاضرة:

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة.

وهي من الشكل:

$$y'' + Py' + qy = 0 \quad \text{......} \, ①$$

يمكن التعبير عن الحل العام للمعادلة ① على شكل سلسلة قوى حول x_0

تعريف (1): متسلسلة القوى حول x_0 هي كل متسلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ تسمى متسلسلة قوى لـ $(x-x_0)$

نسمي a_n عوامل، و أمثال متسلسلة القوى

نسمي x_0 مركز متسلسلة القوى.

نقول عن متسلسلة القوى أنها متقاربة إذا وجدت النهاية:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x-x_0)^n$$

وتسمى هذه النهاية في حال وجودها بمجموع متسلسلة القوى.

وإذا كانت النهاية السابقة غير موجودة نقول عن المتسلسلة أنها متباعدة.

تعريف (2): نقول عن الدالة $y=f(x)$ أنها دالة تحليلية عند النقطة x_0 اذا كانت الدالة موجودة ومحدودة عند هذه النقطة.

Scanned by CamScanner

تعريف (3): نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة عادية للدالة $y = f(x)$ إذا كانت الدالة $f(x)$ تحليلية عند هذه النقطة.

مثال: لتكن لدينا الدالة $y = f(x) = x^2 - 3x$

هل هي دالة تحليلية عند $x_0 = 5$ ؟ وهل النقطة عادية؟

الحل: $f(x_0) = f(5) = 25 - 15 = 10$

ومنه موجودة ومحدودة ومنه $f(x)$ تحليلية عند $x_0 = 5$

ومنه $x_0 = 5$ هي نقطة عادية للدالة $f(x)$

تعريف (4): نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة شاذة للدالة $y = f(x)$ إذا كانت الدالة $f(x)$ غير تحليلية عند هذه النقطة.

مثال: لتكن لدينا الدالة $y = f(x) = \frac{1}{x-3}$ لندرس عند النقطة $x_0 = 3$

الحل:

إن $x_0 = 3$ هي نقطة شاذة لأنها تجعل الدالة غير تحليلية عندها

« الدالة غير معرفة عند هذه النقطة » « تعدم المقام »

تعريف (5): نسمي النقطة x_0 نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1)

إذا كانت x_0 نقطة عادية لكل من الدالتين q و p ،

أي q و p دالتان تحليليتان عند هذه النقطة.

تعريف (6): نسمي النقطة x_0 نقطة شاذة للمعادلة (1)

إذا كانت x_0 نقطة شاذة لـ p أو q أو لكلاهما معاً.

Scanned by CamScanner

مثال: حدد نوع النقاط في المعادلتين الآتيتين:

① $y'' + xy' + x^2 y = 0$

إن جميع نقاط الأعداد الحقيقية هي نقاط عادية للمعادلة

② $y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x}{x-3} y = 0$

إن جميع نقاط الأعداد الحقيقية هي نقاط عادية بإستثناء

$x = 0$ و $x = 3$ هي نقاط شاذة

حيث تكون الدالة عندهم غير تحليلية

دراسة نقطة اللانهاية العادية والشاذة للمعادلة التفاضلية ①

لتحديد نوع نقطة اللانهاية للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة نجري التحويل التالي:

$$t = \frac{1}{x} \Longrightarrow dt = -\frac{1}{x^2}\, dx \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = -t^2$$

لنرى كيف ستصبح المعادلة ① بعد إجراء التحويل ومعاملاتها تابعة لـ t بدلاً من x.

نحسب المشتقات y'' و y' بالنسبة للمتغير t

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -t^2 y'_t$$

$$y''_x = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dx}(-t^2 y'_t) = \frac{d}{dt}(-t^2 y'_t) \frac{dt}{dx}$$

$$= (-2t y'_t - t^2 y''_t)(-t^2) = t^4 y''_t + 2t^3 y'_t$$

Scanned by CamScanner

نعوض في المعادلة التفاضلية: $y''_x + P y'_x + q y_x = 0$

$$t^4 y''_t + 2t^3 y'_t + P(-t^2 y'_t) + q y_t = 0$$

$$t^4 y''_t + (2t^3 - P t^2) y'_t + q y_t = 0$$

نقسم على t^4.

$$y''_t + \frac{2t^3 - P t^2}{t^4} y'_t + \frac{q}{t^4} y_t = 0 \quad \ldots (2)$$

اذا كانت $t = 0$ نقطة عادية للمعادلة (2)

فإن $x = \infty$ نقطة عادية للمعادلة (1)

اذا كانت $t = 0$ نقطة شاذة للمعادلة (2)

فإن $x = \infty$ نقطة شاذة للمعادلة (1)

تعريف (7): نسمي النقطة x_0 بالنقطة الشاذة النظامية للمعادلة التفاضلية (1) إذا كانت الدالتان $(x - x_0)^2 q$ و $(x - x_0) P$ تحليليتان عند النقطة x_0.

- أي يجب ان تكون:

x_0 صفراً من الدرجة الأولى على الأكثر بالنسبة لـ P

x_0 صفراً من الدرجة الثانية على الأكثر بالنسبة لـ q

Scanned by CamScanner

النقطة x_0

عادية

شاذة

نظامية

غير نظامية

أمثلة: ما هو نوع النقاط (عادية - شاذة نظامية - شاذة غير نظامية)؟

① $y'' + x^2 y' + (x-7)y = 0$

إن جميع نقاط الأعداد الحقيقية هي نقاط عادية.

---

② $y'' + \frac{1}{x-1}y' + \frac{1}{(x-1)^2}y = 0$

إن جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = 1$ هي نقطة شاذة.

لنرى إذا كانت نظامية أم لا.

$P = \frac{1}{x-1}$ إن $x_0 = 1$ هي صفر من الدرجة الأولى لـ P

$q = \frac{1}{(x-1)^2}$ $x_0 = 1$ هي صفر من الدرجة الثانية لـ q

فإن $x_0 = 1$ نقطة شاذة نظامية.

---

③ $y'' + \frac{x}{(x-3)^2}y' + \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}y = 0$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = 3 , x_0 = 2 , x_0 = -1$

هي نقاط شاذة. لندرس:

Scanned by CamScanner

$x_0 = 3$ هي صفراً من الدرجة الثانية بالنسبة لـ P
ونق شاذة غير نظامية.

$x_0 = 2$ هي صفراً من الدرجة الاولى بالنسبة لـ q
ونق شاذة نظامية

$x_0 = -1$ هي صفراً من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ q
ونق شاذة غير نظامية.

---

(4) $(x^2-1)y'' + x^2(x-1)y' + (x^2+x)y = 0$

نقسم على امثال y''

$$y'' + \frac{x^2(x-1)}{(x^2-1)} y' + \frac{x^2+x}{x^2-1} y = 0$$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = 1$, $x_0 = -1$

$$P(x) = (x-x_0)P = (x-x_0)\frac{x^2(x-1)}{x^2-1}$$

$$Q(x) = (x-x_0)^2 q = (x-x_0)^2 \frac{x^2+x}{x^2-1}$$

$x_0 = -1$

$$P(x) = (x+1)\frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} = x^2 \xRightarrow{x_0=-1} P(x) = 1$$

$$Q(x) = (x+1)^2 \frac{(x^2+x)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)^2 \cdot x \cdot (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x+1)^2}{x-1}$$

$$\xRightarrow{x_0=-1} Q(x) = 0$$

الدالتان تحليليتان ومنه $x_0 = -1$ شاذة نظامية

$x_0 = 1$

$$P(x) = (x-1)\frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2(x-1)}{x+1}$$

$$\xRightarrow{x_0=1} P(x) = 0$$

$$Q(x) = (x-1)^2 \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = x(x-1)$$

$$x_0 = 1 \implies Q(x) = 0$$

الدالتان تحليليتان في نقطة شاذة نظامية.

---

5. $\sin x \, y'' + 3\cos x \, y' + \sin x \, y = 0$

نقسم على امثال y''

$$y'' + \frac{3\cos x}{\sin x} y' + y = 0$$

جميع النقاط عادية باستثناء النقاط $x = \{\pi K\}_{K \in Z}$ حيث $K = \{0, \mp 1, \mp 2\}$

أي النقاط التي تجعل $\sin x = 0$ هي شاذة.

لندرس اذا كانت النقاط نظامية أم لا:

$$P(x) = (x - x_0) \quad P = (x - \pi K) \frac{3\cos x}{\sin x}$$

ان $P(x)$ غير تحليلية عند هذه النقاط فإن هذه النقاط شاذة غير نظامية

وظيفة: ① $(3x-5)^5 y'' + (3x-5)^4 y' + (3x-5)^3 y = 0$

الحل: نقسم على امثال y''

$$y'' + \frac{1}{3x-5} y' + \frac{1}{(3x-5)^2} y = 0$$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = \frac{5}{3}$ شاذة

$x_0 = \frac{5}{3}$

صفراً من الدرجة الأولى بالنسبة لـ P

صفراً من الدرجة الثانية بالنسبة لـ q

من شاذة نظامية

---

② $(2x^2-4x)^3 y'' + x(2x^2-4x) y' + (2x^2-4x) y = 0$

الحل: نقسم على امثال y''

$$y'' + \frac{x}{(2x^2-4x)^2} y' + \frac{1}{(2x^2-4x)^2} y = 0$$

جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = 2$ و $x_0 = 0$

$x_0 = 0$

$$P(x) = (x-x_0)P = x \frac{x}{(2x^2-4x)^2} = \frac{x^2}{x^2(2x-4)^2}$$

نخرج x عامل مشترك

$$= \frac{1}{(2x-4)^2} \xrightarrow{x_0=0} P(x) = \frac{1}{16}$$

$$Q(x) = (x-x_0)q = x^2 \frac{1}{(2x^2-4x)^2} = \frac{1}{(2x-4)^2} \xrightarrow{x_0=0} Q(x) = \frac{1}{16}$$

Scanned by CamScanner

الدالتان تحليليتان عند $x_0 = 0$ فإنه نقطة شاذة نظامية.

$x_0 = 2$

$$P(x) = (x-2)\frac{x}{(2x^2-4x)^2} = \frac{x(x-2)}{4x^2(x-2)^2} = \frac{1}{4x(x-2)}$$

نخرج $2x$ عامل مشترك

$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

الدالة P غير معرفة عند $x_0 = 2$ فهي نقطة شاذة غير نظامية.

Scanned by CamScanner

٢٥ / ٣ / ٢٠١٩ - المحاضرة الثانية معادلات تفاضلية 2 - الدكتورة : ملك مارديني

عنوان المحاضرة :

حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وبأمثال متغيرة في جوار النقطة العادية.

نظرية الوجود : اذا كانت الدالتان $q(x)$ و $p(x)$ في المعادلة التفاضلية $y'' + py' + qy = 0$ تحليليتان عند النقطة x_0 .

وبإن نشرهما سلسلة تايلور في قوى $(x - x_0)$ متقاربان في المجال $|x - x_0| < R$ فهنالك حلان مستقلان للمعادلة ① كل منهما على شكل متسلسلة تايلور في قوى $(x - x_0)$ متقاربة في مجال ضمن المجال R

إيجاد الحل العام في جوار النقطة العادية :

1. نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية على شكل متسلسلة قوى لـ $(x - x_0)$ من الشكل : $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$
2. نوجد المشتق الأول والثاني ونعوض في المعادلة ①
3. نوحد قوى المتسلسلات الناتجة.
4. نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلات الناتجة
5. بالمطابقة نحصل على العلاقة التكرارية للحل العام
6. نحسب جميع الثوابت بدلالة c_0 و c_1 .
   ونخرج c_0 كعامل مشترك و c_1 كعامل مشترك
   نحصل على الحلين الخاصين.
7. ويكون الحل العام هو التركيب الخطي للحلين الخاصين

Scanned by CamScanner

تمرين 1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة $x_0=0$

$$y'' + xy' + (x^2+2)y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

الحل:

- نجد أن $x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1)

1- نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + \dots$$

2- نوجد المشتقات y', y'':

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots + nC_n x^{n-1} + \dots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2C_2 + 6C_3 x + \dots + n(n-1)C_n x^{n-2} + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + (x^2+2) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n}_{(2)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2}}_{(3)} + \underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{(4)} = 0$$

3- توحيد القوى:

- في المتسلسلة ① نبدل كل n بـ n+2 (ليبقى x^n)
- في المتسلسلة ③ نبدل كل n بـ n-2

$$\sum_{n+2=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n-2=0}^{\infty}c_{n-2}x^n$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

① ② ③ ④

4- توحيد الحدود الدنيا:

لتوحيد الحدود الدنيا نقوم بفك المتسلسلة حتى يبقى n = 2 (أكبر حد)

- في المتسلسلة ① نعوض n = 0 و n = 1
- في المتسلسلة ② نعوض n = 1
- في المتسلسلة ④ نعوض n = 0 , n = 1

$$\Rightarrow (2)(1)C_2+(3)(2)C_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n$$
$$+(1)C_1x+\sum_{n=2}^{\infty}nC_nx^n$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^n+2C_0+2C_1x+2\sum_{n=2}^{\infty}C_nx^n=0$$

$$\Rightarrow 2C_2+6C_3x+C_1x+2C_0+2C_1x$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)C_{n+2}+nC_n+C_{n-2}+C_n\right]x^n=0$$

5- بالمطابقة:

الحد الثابت $2C_2+2C_0=0\Rightarrow C_2=-C_0$

Scanned by CamScanner

امثال x

$$6C_3 + C_1 + 2C_1 = 0 \Rightarrow 6C_3 + 3C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_3 = -\frac{C_1}{2}$$

امثال x^n

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} + C_{n-2} + (n+2)C_n = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = -\frac{C_{n-2} + (n+2)C_n}{(n+2)(n+1)} \;\; * \;;\; n \geq 2$$

6- نحسب الثوابت بدلالة C_0 , C_1 من العلاقة التكرارية *

$$n=2 \Rightarrow C_4 = -\frac{C_0 + 4C_2}{3\cdot 4} = -\frac{C_0 - 4C_0}{3\cdot 4}$$

$$= -\frac{-3C_0}{3\cdot 4} = \frac{C_0}{4} \Rightarrow C_4 = \frac{C_0}{4}$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = -\frac{C_1 + 5C_3}{4\cdot 5} = -\frac{C_1 + 5\left(-\frac{C_1}{2}\right)}{4\cdot 5}$$

$$= -\frac{\frac{2}{2}C_1 - \frac{5}{2}C_1}{4\cdot 5} = -\frac{-\frac{3}{2}C_1}{4\cdot 5}$$

$$= \frac{3C_1}{40} \Rightarrow C_5 = \frac{3C_1}{40}$$

7- نعوض الثوابت في شكل الحل، ونأخذ C_0 , C_1 عوامل مشتركة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \cdots$$

$$= C_0 + C_1 x - C_0 x^2 - \frac{C_1}{2}x^3 + \frac{C_0}{4}x^4 + \frac{3C_1}{40}x^5 + \cdots$$

$$y = C_0\left[1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right] + C_1\left[x - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{40}x^5 + \dots\right]$$

حل خاص ثاني   حل خاص أول

ويكون هذا هو الحل العام.

تمرين 2 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0 \quad \dots \quad (1)$$

على شكل متسلسلة قوى من القوى الكاملة

الحل: نقسم على أمثال y''

$$y'' + \frac{3x}{x^2-1}y' + \frac{x}{x^2-1}y = 0$$

$$p = \frac{3x}{x^2-1}, \quad q = \frac{x}{x^2-1}$$

نجد ان $x_0 = 0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية.

* "قسمنا على امثال y'' فقط لدراسة نوع النقطة - ولكن عند إيجاد الحل العام نعمل على المعادلة الموجودة في نص السؤال"

1- نبحث عن الحل العام من الشكل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$

$$x_0 = 0 \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$= C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + \dots$$

2- نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n C_n x^{n-2}$$

3- نعوض في المعادلة (1):

$$(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0$$

$$x^2 y'' - y'' + 3xy' + xy = 0$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

$$+ 3x \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n}}_{1} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}}_{2}$$

$$+ 3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n}}_{3} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}}_{4} = 0$$

- 3 - توحيد القوى :

في المتسلسلة ② نبدل كل n ب $n+2$

في المتسلسلة ④ نبدل كل n ب $n-1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} x^{n} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^{n} = 0$$

- 4 - توحيد الحدود الدنيا

في المتسلسلة ② نعوض $n=0$, $n=1$

في المتسلسلات ③ و ④ نعوض $n=1$

$$-(2)(1) C_2 - (3)(2) C_3 x + (3)(1) C_1 x + C_0 x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1) C_n - (n+1)(n+2) C_{n+2} + 3n C_n + C_{n-1} \right] x^{n} = 0$$

5- بالمطابقة:

الحد الثابت: $-2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

امثال x: $-6C_3 + 3C_1 + C_0 = 0$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{C_1}{2} + \frac{C_0}{6}$$

لمثال x^n: $n(n-1)C_n - (n+1)(n+2)C_{n+2} + 3nC_n + C_{n-1} = 0$

$$-(n+1)(n+2)C_{n+2} + \underbrace{(n^2 - n + 3n)}_{(n^2+2n)}C_n + C_{n-1} = 0$$

$$C_{n+2} = \frac{(n^2+2n)C_n + C_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \quad \ast \quad n \geq 2$$

6. نحسب الثوابت بدلالة C_0 و C_1 من العلاقة التكرارية $\ast$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{0 + C_1}{3\cdot 4} = \frac{C_1}{12} \Rightarrow C_4 = \frac{C_1}{12}$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{15\, C_3 + 0}{4\cdot 5} = \frac{\cancel{15}^{3}\left[\frac{C_1}{2} + \frac{C_0}{6}\right]}{4\cdot \cancel{5}}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_0}{6}\right) \Rightarrow C_5 = \frac{3C_1}{8} + \frac{C_0}{8}$$

7- نعوض الثوابت بشكل الحل ونخرج C_0 و C_1 عامل مشترك.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x + 0 + \left[\frac{C_1}{2} + \frac{C_0}{6}\right]x^3 + \frac{C_1}{12}x^4 + \left[\frac{3C_1}{8} + \frac{C_0}{8}\right]x^5 + \dots$$

$$= C_0\underbrace{\left[1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{8} + \dots\right]}_{\text{حل خاص اول}} + C_1\underbrace{\left[x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{8} + \dots\right]}_{\text{حل خاص ثاني}}$$

يكون هذا هو الحل العام.

Galaxy

Scanned by CamScanner

تمرين 3: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية حول النقطة $x_0=0$

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad \ldots (1)$$

الحل: نقسم على امثاله y'':

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

نجد ان جميع النقاط عادية باستثناء $x_0 = 1$

اي $x_0=0$ نقطة عادية

1. نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$$

$$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

2. نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

- نعوض بالمعادلة التفاضلية (1):

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

$$xy'' - y'' - xy' + y = 0$$

$$x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-1}}_{1} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}}_{2} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n}}_{3} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n}}_{4} = 0$$

3. نوحد القوى:

في المتسلسلة (1) نبدل كل n ب $n+1$

في المتسلسلة (2) نبدل كل n ب $n+2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, C_{n+1}\, x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, C_{n+2}\, x^{n}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n\, x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^{n} = 0$$

4- نوحد الحدود الدنيا

في المتسلسلات (2) و (4) نعوض $n = 0$

$$-(2)(1)\, C_2 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1)\, C_{n+1} - (n+1)(n+2)\, C_{n+2} + (1-n)\, C_n \right] x^{n} = 0$$

5- بالمطابقة :

الحد الثابت

$$-2C_2 + C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2}$$

امثال x^n

$$n(n+1)\, C_{n+1} - (n+1)(n+2)\, C_{n+2} + (1-n)\, C_n = 0$$

$$C_{n+2} = \frac{n(n+1)\, C_{n+1} + (1-n)\, C_n}{(n+1)(n+2)} \quad \cdots * \quad n \geq 1$$

6- نحسب الثوابت بدلالة C_0 و C_1 من العلاقة التكرارية *

$$n = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{2C_2 + 0}{2 \cdot 3} = \frac{2\left(\frac{C_0}{2}\right)}{2 \cdot 3} \Rightarrow C_3 = \frac{C_0}{6}$$

$$n = 2 \Rightarrow C_4 = \frac{2 \cdot 3\, C_3 + (-1)\, C_2}{3 \cdot 4} = \frac{6\,\frac{C_0}{6} - \frac{C_0}{2}}{3 \cdot 4}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow C_4 = \frac{C_0}{24}$$

$$n = 3 \Rightarrow C_5 = \frac{3(4)\, C_4 + (-2)\, C_3}{4 \cdot 5} = \frac{12 \frac{C_0}{24} - 2 \frac{C_0}{6}}{4 \cdot 5}$$

$$= \frac{\frac{C_0}{2} - \frac{2C_0}{6}}{4 \cdot 5} \Rightarrow C_5 = \frac{C_0}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow C_5 = \frac{C_0}{5!}$$

7. نعوض الثوابت بشكل الحل ونخرج C_0 و C_1 كعامل مشترك

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x + \frac{C_0}{2} x^2 + \frac{C_0}{6} x^3 + \frac{C_0}{24} x^4 + \frac{C_0}{5!} x^5 + \dots$$

$$= C_1 x + C_0 \left[1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots \right]$$

$$= C_1 x + C_0 \left(e^x - x \right)$$

$$= C_0 e^x + (C_1 - C_0)\, x$$

وهو الحل العام.

Scanned by CamScanner

٣ / ٣ / ٢٠١٩ المحاضرة الثالثة معادلات تفاضلية 2 د. ملك ماردينى

عنوان المحاضرة:

معادلة ليجندر.

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - K(K+1)y = 0$$

وندعوها معادلة ليجندر من المرتبة K.

الحل: نقسم على امثال y'' نجد أن:

$$P = \frac{2x}{x^2-1} , \quad q = \frac{K(K+1)}{x^2-1}$$

ومنه نجد أن $x_0 = 0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية

1. نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

2. نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

- نعوض في المعادلة:

$$x^2 y'' - y'' + 2xy' - K(K+1)y = 0$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$
$$- K(K+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\underset{①}{\sum_{2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n} - \underset{②}{\sum_{2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}} + \underset{③}{2\sum_{1}^{\infty} n c_n x^n}$$
$$\underset{④}{- K(K+1) \sum c_n x^n} = 0$$

Galaxy

Scanned by CamScanner

3- نوحد القوى:

في المتسلسلة ② نبدل كل n ب $n+2$

$$\sum_{2}^{\infty} n(n-1) C_n x^n - \sum_{0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n$$

$$+ 2 \sum_{1}^{\infty} n C_n x^n - K(K+1) \sum_{0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

4- نوحد الحدود الدنيا.

في المتسلسلات ② و ④ نفك $n=0, n=1$

في المتسلسلة ③ نفك $n=1$

$$-(2)(1) C_2 - (3)(2) C_3 x + 2(1) C_1 x$$
$$- K(K+1) C_0 - K(K+1) C_1 x$$

$$+ \sum_{2}^{\infty} \left[n(n-1) C_n + 2n C_n - K(K+1) C_n - (n+2)(n+1) C_{n+2} \right] \cdot x^n = 0$$

5- بالمطابقة:

- الحد الثابت $\quad -2C_2 - K(K+1) C_0 = 0$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{K(K+1)}{2!} C_0$$

- أمثال x $\quad -6C_3 + 2C_1 - K(K+1) C_1 = 0$

$$\Rightarrow -6C_3 - (K^2 + K - 2) C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_3 = -\frac{(K+2)(K+1)}{6} C_1 \Rightarrow C_3 = \frac{(K+2)(1-K)}{3!} C_1$$

Galaxy

Scanned by CamScanner

/ /

- امثال x^n: $n(n-1)C_n + 2nC_n - K(K+1)C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2} = 0$

التبسيط

$$[n(n-1) + 2n - K(K+1)]\, C_n$$
$$= [n^2 - n + 2n - K^2 - K]\, C_n$$
$$= [n^2 + n - K^2 - K]\, C_n$$
$$= [(n-K) + (n^2 - K^2)]\, C_n$$
$$= [(n-K) + (n-K)(n+K)]\, C_n$$
$$= (n-K)(1 + (n+K))\, C_n$$
$$= (n-K)(n+K+1)\, C_n$$

$$(n-K)(n+K+1)\, C_n - (n+2)(n+1)\, C_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{(n-K)(n+K+1)}{(n+1)(n+2)}\, C_n \quad ; \quad n \geq 2$$

b. نحسب الثوابت بدلالة C_0 و C_1:

$$n = 2 \Rightarrow C_4 = \frac{(2-K)(2+K+1)}{3.4}\, C_2$$

$$= \frac{(2-K)(3+K)}{3.4}\left(-\frac{K(K+1)}{2!}\, C_0\right)$$

$$\Rightarrow C_4 = -\frac{(3+K)(2-K)(1+K)K}{4!}\, C_0$$

Scanned by CamScanner

$$n = 3 \Rightarrow C_5 = \frac{(3-k)(3+k+1)}{4 \cdot 5} C_3$$

$$= \frac{(3-k)(4+k)}{5 \cdot 4} \left(\frac{(k+2)(1-k)}{3!} C_1 \right)$$

$$\Rightarrow C_5 = \frac{(4+k)(3-k)(2+k)(1-k)}{5!} C_1$$

$$n = 4 \Rightarrow C_6 = \frac{(4-k)(4+k+1)}{5 \cdot 6} C_4$$

$$= \frac{(4-k)(5+k)}{6 \cdot 5} \left(- \frac{(3+k)(2-k)(1+k)k}{4!} C_0 \right)$$

$$\Rightarrow C_6 = - \frac{(5+k)(4-k)(3+k)(2-k)(1+k)k}{6!} C_0$$

7- نعوض الثوابت بالشكل العام :

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

$$= C_0 + C_1 x - \frac{(k+1)k}{2!} C_0 x^2 + \frac{(k+2)(1-k)}{3!} C_1 x^3 - \cdots$$

$$= C_0 \left[1 - \frac{(k+1)k}{2!} x^2 - \frac{(3+k)(2-k)(1+k)k}{4!} x^4 - \cdots \right]$$

$$+ C_1 \left[x + \frac{(k+2)(1-k)}{3!} x^3 + \frac{(4+k)(3-k)(2+k)(1-k)}{5!} x^5 + \cdots \right]$$

ويكون الحل العام هو تركيب خطي للحلين الخاصين .

Scanned by CamScanner

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 6y = 0$$

الحل: نلاحظ أنه من شكل معادلة ليجندر من المرتبة $n = 2$

نجد انه $x_0 = 0$ هي نقطة عادية.

1. نبحث عن الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_0^\infty c_n (x - x_0)^n \Rightarrow y = \sum_0^\infty c_n x^n$$

2. نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_1^\infty n c_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة:

$$x^2 y'' - y'' + 2xy' - 6y = 0$$

$$\sum_2^\infty n(n-1) c_n x^n - \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2} + 2 \sum_1^\infty n c_n x^n$$
① ② ③

$$- 6 \sum_0^\infty c_n x^n = 0$$
④

3. نوحد القوى

في المتسلسلة ② نبدل كل n بـ $n+2$

$$\sum_2^\infty n(n-1) c_n x^n - \sum_0^\infty (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + 2 \sum_1^\infty n c_n x^n$$
① ② ③

$$- 6 \sum_0^\infty c_n x^n = 0$$
④

4. نوحد الحدود الدنيا.

في المتسلسلات ② و ④ نفك $n = 0, n = 1$

③ 〃 〃 〃 $n = 1$

Scanned by CamScanner

$-2(1)C_2 - 3(2)C_3 x + 2C_1 x - 6C_0 - 6C_1 x$

$+\sum[n(n-1)C_n + 2nC_n - 6C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2}]x^n = 0$

5 - بالمطابقة:

الحد الثابت: $-2C_2 - 6C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = -3C_0$

امثال x: $-6C_3 + 2C_1 - 6C_1 = 0$

$\Rightarrow -6C_3 - 4C_1 = 0$

$\Rightarrow C_3 = -\frac{2}{3}C_1$

امثال x^n: $(n^2 - n + 2n - 6)C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2} = 0$

$\Rightarrow (n^2 + n - 6)C_n - (n+2)(n+1)C_{n+2} = 0$

$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+1)(n+2)}C_n \qquad n \geq 2$

6 - نحسب الثوابت بدلالة C_0 و C_1

$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{5 \cdot 0}{3 \cdot 4}C_2 \Rightarrow C_4 = 0$

$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{(6)(1)}{4 \cdot 5}C_3$

$C_5 = -\frac{6 \quad 2}{5 \cdot 4 \cdot 3}C_1 = -\frac{6 \cdot 2 \cdot 2}{5\,4\,3\,2}C_1$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow C_5 = -\frac{6 \cdot 4}{5!} C_1$$

$$n = 4 \Rightarrow C_6 = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 6} C_4$$

$$= \frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 5} \cdot 0 \Rightarrow C_6 = 0$$

$$n = 5 \Rightarrow C_7 = \frac{8 \cdot 3}{6 \cdot 7} C_5$$

$$= -\frac{8 \cdot 3}{7 \cdot 6} \frac{6 \cdot 4}{5!} C_1$$

$$\Rightarrow C_7 = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{7!} C_1$$

7- نعوض الثوابت بالشكل العام.

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x - 3 C_0 x^2 - \frac{2}{3} C_1 x^3 + 0 - \frac{24}{5!} C_1 x^5 - \dots$$

$$= C_0 [1 - 3x^2] + C_1 [x - \frac{2}{3} x^3 - \frac{24}{5!} x^5 - \frac{576}{7!} x^5 - \dots]$$

وهذا هو الحل العام.

Scanned by CamScanner

ملاحظات هامة:

$y''+Py'+qy=0$ معادلة تفاضلية متجانسة

$y''+Py'+qy=R$ معادلة تفاضلية غير متجانسة.

أولاً: اذا طلب منا إيجاد **الحل العام** للمعادلة التفاضلية **غير المتجانسة** في جوار النقطة العادية $x_0 \neq 0$ عندئذ نجري الانسحاب $X = x - x_0$ ونبحث عن حل عام من الشكل $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ وذلك بعد أن نكتب كلاً من R, q, P بدلالة X.

ثم نبدل كل X بـ $(x-x_0)$ فنحصل على الحل العام بجوار النقطة $x_0 \neq 0$

ثانياً: إن كل نقطة شاذة لحل المعادلة التفاضلية هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية والعكس غير صحيح بالضرورة.

مثال: يبين $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x^2}$ هو حل للمعادلة $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{4}{x^2}y=0$

نلاحظ أن $x_0=0$ نقطة شاذة لحل المعادلة وهي نقطة شاذة للمعادلة

مثال معاكس: يبين $y=c_1x+c_2x^2$ هو حل للمعادلة $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$

نلاحظ أن $x_0=0$ نقطة شاذة للمعادلة.

بينما نقطة غير شاذة لحلها

ثالثاً: عندما ننشر بقوى $(x-x_0)$ نميز حالتين:

① اذا كان P, q كثيرا حدود بقوى $(x-x_0)$ أيضاً عندئذ نحدد الحد العام للسلاسل بهذه القوى.

Scanned by CamScanner

② اذا كان q و P كثيرا حدود بقوى x عندئذٍ نكتب q و P بقوى $(x-x_0)$ بالشكل:

$$P = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$q = \beta_0 + \beta_1(x-x_0) + \beta_2(x-x_0)^2 + \dots$$

بالفك والمطابقة نحصل على الأمثال $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_0, \beta_1, \dots$;

بالتعويض نحصل على q و P بقوى $(x-x_0)$

مثال: نعين التعبير عن كثير الحدود (x^2+1) بشكل سلسلة قوى $(x-1)$

أي $x_0 = 1$ بالشكل:

$$P = x^2 - 1 = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2$$

« نقف عند α_2 لأن لدينا x^2 في P »

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x - \alpha_1 + \alpha_2(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x - \alpha_1 + \alpha_2 x^2 - 2\alpha_2 x + \alpha_2$$

$\Rightarrow$ بالمطابقة $\Leftarrow$ الحد الثابت: $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \dots ①$

أمثال x: $\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \quad \dots ②$

أمثال x^2: $\alpha_2 = 1 \quad \dots ③$

نعوض ③ في ② $\Leftarrow$ $\alpha_1 - 2(1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2 \quad \dots ④$

نعوض ③ و ④ في ① $\Leftarrow$ $\alpha_0 - 2 + 1 = 1$

$\Rightarrow \alpha_0 = 2 \quad \dots ⑤$

نعوض 3 و 4 و 5 في شكل P $\Leftarrow$

$$P = x^2 + 1 = 2 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

Scanned by CamScanner

٤ / ٣ / ٢٠١٩ المحاضرة الرابعة معادلات تفاضلية 2. د. ملك مارديني.

عنوان المحاضرة:

حل بعض التمارين باستخدام سلاسل القوى.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية بجوار النقطة $x_0 = 1$

$$y'' + (x^2+1)y' + y = 0$$

الحل: نجد أن: $(x^2+1) = P$ ومن المحاضرة السابقة نكتب بقوى $(x-1)$

$$P = (x^2+1) = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2$$

$$= 2 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

1. نبحث عن حل عام من الشكل $y = \sum_0^\infty c_n (x-1)^n$

2. نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_1^\infty n c_n (x-1)^{n-1} \qquad y'' = \sum_2^\infty (n-1) n c_n (x-1)^{n-2}$$

3. نعوض في المعادلة التفاضلية الجديدة:

$$y'' + (2 + 2(x-1) + (x-1)^2) y' + y = 0$$

$$y'' + 2y' + 2(x-1)y' + (x-1)^2 y' + y = 0$$

$$\sum_2^\infty n(n-1) c_n (x-1)^{n-2} + 2\sum_1^\infty n c_n (x-1)^{n-1} + 2(x-1)\sum_1^\infty n c_n (x-1)^{n-1}$$

$$+ (x-1)^2 \sum_1^\infty n c_n (x-1)^{n-1} + \sum_0^\infty c_n (x-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_2^\infty n(n-1) c_n (x-1)^{n-2} + 2\sum_1^\infty n c_n (x-1)^{n-1} + 2\sum_1^\infty n c_n (x-1)^n$$

$$+ \sum_1^\infty n c_n (x-1)^{n+1} + \sum_0^\infty c_n (x-1)^n = 0$$

ونكمل الحل.

نحن نقوم بنشر P, q بقوى $x-x_0$ حتى نستطيع ادخالها للـ $\sum$ أي:

$$P y' = (x^2+1) y' = x^2 y' + y' = x^2 \sum_1^\infty n c_n (x-1)^{n-1}$$

لا نستطيع ادخالها.

Galaxy

Scanned by CamScanner

/ /

تكملة الملاحظات:

رابعاً: لا يمكننا النشر في جوار النقطة الشاذة غير المنتظمة وذلك لأن الحل في هذه الحالة لا يمكن نشره بسلسلة تزايدية القوى.

خامساً: لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''+Py'+qy=R$ نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرافقة لها $y''+Py'+qy=0$ ثم نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة.

ولإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة نفك مفكوك السلسلة لحدود التي هي من درجة أكثر الحدود R ثم نطابقه ونوجد الأمثال

تمرين: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة بجوار $x_0=0$

$$y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2$$

الحل: نوجد أولاً الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرافقة لها y_1

$$y''-2x^2y'+4xy=0$$

ثم نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة y_2

ويكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو $y=y_1+y_2$

1- نبحث عن الحل العام من الشكل $y=\sum_0^\infty c_n x^n$

2- نوجد المشتقات:

$y'=\sum_1^\infty n c_n x^{n-1}$ $\qquad$ $y''=\sum_2^\infty (n-1)n\, c_n x^{n-2}$

3- نعوض في المعادلة المتجانسة:

$$\sum_2^\infty n(n-1)c_n x^{n-2}-2x^2\sum_1^\infty n c_n x^{n-1}+4x\sum_0^\infty c_n x^n=0$$

$$\underbrace{\sum_2^\infty n(n-1)c_n x^{n-2}}_{1}-2\underbrace{\sum_1^\infty n c_n x^{n+1}}_{2}+4\underbrace{\sum_0^\infty c_n x^{n+1}}_{3}=0$$

Galaxy

Scanned by CamScanner

4. توحيد القوى:

- يمكن توحيدهم إلى x^n كما تعودنا، وأيضاً يمكن توحيدهم إلى x^{n+1} للسهولة

- في المتسلسلة ① نعوض عن n ب $n+3$

$$\underbrace{\sum_{-1}^{\infty}(n+3)(n+2)C_{n+3}x^{n+1}}_{①} - 2\underbrace{\sum_{1}^{\infty} nC_n x^{n+1}}_{②} + 4\underbrace{\sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+1}}_{③} = 0$$

5. توحيد الحدود الدنيا:

- في المتسلسلة ① نفك $n=-1$ و $n=0$

- في المتسلسلة ③ نفك $n=0$

$$2C_2 + 6C_3x + 4C_0x + \sum_{1}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)C_{n+3} - 2nC_n + 4C_n\right]x^{n+1} = 0$$

5. بالمطابقة:

الحد الثابت

$$2C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

امثال x

$$6C_3 + 4C_0 = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{2}{3}C_0}$$

امثال x^{n+1}

$$(n+3)(n+2)C_{n+3} - 2nC_n + 4C_n = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+3} = -\frac{4C_n - 2nC_n}{(n+3)(n+2)}$$

$$\boxed{C_{n+3} = +\frac{2(n-2)}{(n+3)(n+2)}C_n} \qquad n \geq 1$$

/ /

6- نوجد الثوابت بدلالة C_0 , C_1

$n=1 \Rightarrow C_4 = \frac{-2}{4.3} C_1 \Rightarrow \boxed{C_4 = \frac{-1}{6} C_1}$

$n=2 \Rightarrow \boxed{C_5 = 0}$

$n=3 \Rightarrow C_6 = -\frac{2}{6.5} C_3 = -\frac{2.2}{6.5.3} C_0$

$\Rightarrow \boxed{C_6 = -\frac{2}{45} C_0}$

7- نعوض في الحل العام للمعادلة المتجانسة.

$y_1 = \sum_0^\infty C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$

$y_1 = C_0 + C_1 x + 0 - \frac{2}{3} C_0 x^3 - \frac{1}{6} C_1 x^4 + 0 - \frac{2}{45} C_0 x^6 + \ldots$

$y_1 = C_0 (1 - \frac{2}{3} x^3 + \ldots) + C_1 (x - \frac{1}{6} x^4 - \frac{2}{45} x^6 \ldots)$

- الآن لنوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

- بنأخذ العلاقة * ونأخذ هامع $x^2+2x+2=R$

- فكل المتسلسلة إلى درجة تكل الحدود أي إلى الدرجة الثانية.

حيث $n=1$ نجعل * من الدرجة الثانية لذا نقل $n=1$

$2C_2 + (6C_3 + 4C_0)x + (12C_4 + 2C_1)x^2$

$+ \sum_2^\infty [(n+3)(n+2)C_{n+3} - 2nC_n + 4C_n] x^{n+1} = x^2 + 2x + 2$

Scanned by CamScanner

بالمقارنة :

الحد الثابت
$$2C_2 = 2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$$

امثال x
$$6C_3 + 4C_0 = 2 \Rightarrow C_3 = \frac{2 - 4C_0}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{1 - 2C_0}{3}}$$

امثال x^2
$$12C_4 + 2C_1 = 1 \Rightarrow C_4 = \boxed{\frac{1 - 2C_1}{12}}$$

امثال $x^{n+1} = 0$

$$\boxed{C_{n+3} = \frac{2(n-2)}{(n+3)(n+2)} C_n} \qquad n \geq 2$$

نحسب الثوابت :

$$n = 2 \Rightarrow C_5 = 0 = C_8 = C_{11} = C_{14} \; ---$$

لإيجاد حل خاص نختار قيم لـ C_0 و C_1 بحيث ننعدم C_3 ، C_4

نختار $C_0 = \frac{1}{2}$ ، $C_1 = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $C_3 = C_4 = 0$

$$n = 3 \Rightarrow C_6 = 0 = C_9 = C_{12} \; --$$

$$n = 4 \Rightarrow C_7 = 0 = C_{10} = C_{13} \; ---$$

اذاً اصبح الحل الخاص للمعادلة عن المتتابعة

$$y_2 = C_0 + C_1 x \; --- = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{1-2C_0}{3}x^3 \; ---$$

ومنه يكون الحل العام للمعادلة عن المتتابعة هو

$$y = y_1 + y_2$$

Scanned by CamScanner

/ /

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار $x_0 = 0$

$$y'' + y = x^2 + 1$$

الحل: بما أن $x_0 = 0$ هي نقطة عادية.

أولاً: نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة أي

$$y'' + y = 0$$

1- نبحث عن حل عام من الشكل:

$$y = \sum_0^\infty C_n x^n$$

2- نشتق:

$$y' = \sum_1^\infty n C_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_2^\infty n(n-1) C_n x^{n-2}$$

3- نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\sum_2^\infty n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_0^\infty C_n x^n = 0$$

3- نوحد القوى:

نبدل كل n بـ $n+2$ في المتسلسلة الأولى

$$\sum_0^\infty (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \sum_0^\infty C_n x^n = 0 \quad \cdots ☆$$

4- الحدود الدنيا موحدة.

5- نطابق

نمثال x^n مجموعة

$$\sum_0^\infty [(n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n] x^n = 0$$

$$(n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = -\frac{C_n}{(n+1)(n+2)} \quad ; n \geq 0$$

Scanned by CamScanner

6. نوجد الثوابت

$$n=0 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_0}{2} = -\frac{C_0}{2!}$$

$$n=1 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_1}{2.3} = -\frac{C_1}{3!}$$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = -\frac{C_2}{4.3} = \frac{C_0}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = -\frac{C_3}{5.4} = \frac{C_1}{5!}$$

7. نعوض في الحل العام. ونحن 2 على اشتراك

$$y_1 = \sum_0^\infty C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2!}x^2 - \frac{C_1}{3!}x^3 + \frac{C_0}{4!}x^4 + \frac{C_1}{5!}x^5 + \dots$$

$$\Rightarrow y_1 = C_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right] + C_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right]$$

$$\Rightarrow y_1 = C_0 \cos x + C_1 \sin x$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

$$y'' + y = x^2 + 1$$

من العلاقة *:

$$\sum_0^\infty (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \sum_0^\infty C_n x^n = x^2 + 1$$

$$\sum_0^\infty \left[(n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n\right] x^n = x^2 + 1$$

Scanned by CamScanner

نجد أن في الطرف الثاني $1 + x^2$ نفك المتسلسلة أول ثلاث حدود من $n=0, n=1, n=2$ لنصل إلى x^2

$$(2C_2 + C_0) + (2\cdot 3\cdot C_3 + C_1)x + (3\cdot 4\, C_4 + C_2)x^2$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)C_{n+2} + C_n\right]x^n = x^2 + 1$$

- بالمطابقة

الحد الثابت $2C_2 + C_0 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1-C_0}{2}$

أمثال x $6C_3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_1}{6}$

أمثال x^2 $12C_4 + C_2 = 1 \Rightarrow C_4 = \frac{1-C_2}{12}$

$$\Rightarrow C_4 = \frac{1-\frac{1-C_0}{2}}{12} = \frac{1+C_0}{24}$$

- نختار $C_1 = 0 \;,\; C_0 = -1$

$$\Rightarrow C_2 = 1 \;,\; C_3 = 0 \quad C_4 = 0$$

- نعوض

$$y_2 = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

الحل الخاص $y_2 = x^2 - 1$

ومنه يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y = y_1 + y_2 = C_0 \cos x + C_1 \sin x + x^2 - 1$$

Scanned by CamScanner

/ /

تدريب: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار $x_0 = 0$

$$y'' + y' = x^2 + 1$$

الحل: نجد ان $x_0 = 0$ نقطة عادية للمعادلة

أولاً: نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة لـ

$$y'' + y' = 0$$

1. نبحث عن حل عام من الشكل:

$$y = \sum_{0}^{\infty} C_n x^n$$

2. نشتق

$$y' = \sum_{1}^{\infty} n C_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة

$$\sum_{2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{1}^{\infty} n C_n x^n = 0$$

3. نوحد القوى

نبدل كل n بـ $n+1$ في المتسلسلة الأولى

$$\sum_{1}^{\infty} (n+1) n C_{n+1} x^{n-1} + \sum_{1}^{\infty} n C_n x^{n-1} = 0$$

4. الحدود الدنيا موحدة

5. بالمطابقة

$$\sum_{1}^{\infty} \left[n(n+1) C_{n+1} + n C_n \right] x^{n-1} = 0 \quad \star$$

امثال x^n معدومة

$$C_{n+1} = -\frac{C_n}{n+1} \quad ; \quad n \geq 1$$

6. نوجد الثوابت

$$n = 1 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_1}{2!}$$

$$n = 2 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_2}{3} = \frac{C_1}{3!}$$

Scanned by CamScanner

$$n=3 \Rightarrow C_4 = -\frac{C_3}{4} = -\frac{C_1}{4!}$$

$$n=4 \Rightarrow C_5 = -\frac{C_4}{5} = \frac{C_1}{5!}$$

7- نعوض بالحل العام ونخرج C_0 و C_1 عامل مشترك.

$$y_1 = C_0 + C_1\left[x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right]$$

ثانياً: نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة.

من *

$$\sum_{1}^{\infty}\left[n(n+1)\,C_{n+1} + n\,C_n\right]x^{n-1} = x^2+1$$

نفك من المتسلسلة اول ثلاث حدود $n=1,\ n=2,\ n=3$

$$(2C_2 + C_1) + (2.3\,C_3 + 2C_2)x + (3.4\,C_4 + 3C_3)x^2$$

$$+ \sum_{4}^{\infty}\left[n(n+1)\,C_{n+1} + n\,C_n\right]x^{n-1} = x^2+1$$

بالمطابقة

$$2C_2 + C_1 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1-C_1}{2}$$ الحد الثابت

$$6C_3 + 2C_2 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_2}{3}$$ امثال x

$$12C_4 + 3C_3 = 1 \Rightarrow C_4 = \frac{1-3C_3}{12}$$ امثال x^2

$$\Rightarrow C_4 = \frac{1+C_2}{12}$$

Scanned by CamScanner

- نختار $C_1 = 3$ ، $C_0 = 0$

$$\Rightarrow C_2 = -1 \quad , \quad C_3 = \frac{1}{3} \quad , \quad C_4 = 0$$

نعوض في الحل العام

$$y_2 = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

الحل الخاص

$$y_2 = 3x - x^2 + \frac{1}{3} x^3$$

ومنه يكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = C_0 + C_1 \left[x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots \right] + 3x - x^2 + \frac{1}{3} x^3$$

Scanned by CamScanner

١٠ / ٣ / ٢٠١٩ المحاضرة الخامسة تفاضلية ٢ .... د. ملك مارديني

عنوان المحاضرة:

حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة بجوار النقطة الشاذة النظامية:

مبرهنة الوجود والوحدانية:

بفرض أن النقطة x_0 نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية عندئذٍ يوجد حل واحد على الأقل للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة x_0 يكون قابلاً للنشر على شكل متسلسلة:

$$y = (x-x_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$ متقاربة على المجال $|x-x_0| < R$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة الشاذة النظامية:

لتكن المعادلة:

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0) P(x) y' + q(x) y = 0$$

1 نبحث عن حل عام من الشكل:

$$y = (x-x_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n \quad : \quad C_0 \neq 0$$

ولنفرض أن النقطة الشاذة هي $x_0 = 0$ فيصبح الحل:

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} \quad : \quad C_0 \neq 0$$

2 نوجد المشتق الأول والثاني ـ نعوض في المعادلة ـ نوحد القوى ـ نوحد الحدود الدنيا ثم ننتهي بالمطابقة فنحصل على العلاقة التكرارية.

Galaxy

Scanned by CamScanner

3- نوجد المعادلة المميزة:

$$\lambda(\lambda-1)+P(0)\lambda+q(0)=0$$

وهي تمثل أمثال الحد الأول للمتسلسلة الناتجة وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة λ. نوجد جذور المعادلة المميزة λ_1, λ_2 بحيث $\lambda_1 \geq \lambda_2$ «أي نأخذ الجذر الأكبر هو λ_1».

* - (دائماً نأخذ $P(0)$ و $q(0)$ حتى لو كانت النقطة شاذة $x_0 \neq 0$)
* - (نقصد بأمثال الحد الاول للمتسلسلة الناتجة أي المتسلسلة التي نحصل عليها بعد توحيد الحدود الدنيا - امثال اول حد منها = المعادلة المميزة)

4- نعوض λ_1 (الجذر الأكبر) بالعلاقة التكرارية فنحصل على الحل الخاص الأول:

$$\boxed{y_1 = x^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$$

5- نوجد الحل الخاص الثاني وذلك حسب الحالات التالية:

P- $(\lambda_1-\lambda_2)$ ليس عدد صحيح فيكون:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n x^n \quad \text{حيث}$$

ب- $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ جذر مضاعف فيكون:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n x^n + y_1 \ln|x|$$

ج- $(\lambda_1-\lambda_2)$ عدد صحيح فيكون:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n x^n + a\,y_1 \ln|x|$$

حيث a عدد ثابت

* نلاحظ في الحل الخاص الثاني وضعنا خط فوق الـ C_n أي $\bar{C}_n$

لأن $\bar{C}_n$ ثوابت جديدة تختلف عن C_n

6. يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية تركيب خطي للحلين الخاصين:

$$y = Ay_1 + By_2$$

تمرين: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

الحل: نقسم على امثال y'':

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$$

نجد ان $x_0 = 0$ نقطة شاذة:

نرى إذا كانت نظامية أم لا:

$$P(x) = xP = x\frac{1}{2x} \overset{x=0}{=} \frac{1}{2}$$ تحليلية

$$Q(x) = x^2 q = x^2\frac{1}{4x} = \frac{x}{4} \overset{x_0=0}{=} 0$$ تحليلية

منه نقطة شاذة نظامية

الطريقة الأولى: بإيجاد المعادلة المميزة والجذور:

- نرد المعادلة إلى الشكل النظامي:

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)P(x)\, y' + q(x)y = 0$$

$$x^2 y'' + xP(x)\, y' + q(x)y = 0$$

نضرب المعادلة بـ $\frac{x}{4}$ فتصبح:

$$x^2 y'' + \frac{x}{2} y' + \frac{x}{4} y = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad q(x) = \frac{x}{4}$$

* "نجد أن في $P(x)$ لم نأخذ $\frac{x}{2}$ كلها لأن في الشكل النظامي للمعادلة $P(x)$ مضروبة بـ x

أما في $q(x)$ أخذنا x وذلك لأن في الشكل النظامي للمعادلة $q(x)$ غير مضروبة بـ x"

تكون المعادلة المميزة:

$$\lambda(\lambda - 1) + P(0)\lambda + q(0) = 0 \qquad P(0) = \frac{1}{2} , q(0) = \frac{0}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{2}\lambda + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(2\lambda - 1) = 0 \quad \text{---} \quad \text{المعادلة المميزة}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \lambda_2 = 0$$

ونسمي أن λ_1 هي الجذر الأكبر.

Galaxy

Scanned by CamScanner

عن طريق الامثال

/ /

طريقة ثانية لإيجاد المعادلة المميزة والجذور.

- نوجد الحل من الشكل:

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda}$$

- نشتق:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda-1)(n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-2}$$

* نلاحظ أن حدود الـ Σ يبدأ من $n=0$ بعد الاشتقاق لأن $x^{n+\lambda}$ لا تنعدم الأس عند $n=0$ لذلك لا يؤثر.

نعوض بالمعادلة التفاضلية:

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

$$4x \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda-1)(n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow 4 \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda-1)(n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1} + 2\sum_{0}^{\infty} (n+\lambda) x^{n+\lambda-1}$$

$$+ \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} = 0$$

نخرج x^{λ} عامل مشترك

$$x^{\lambda}\left[4\sum_{0}^{\infty} (n+\lambda-1)(n+\lambda) C_n x^{n-1} + 2\sum_{0}^{\infty} (n+\lambda) C_n x^{n-1}\right.$$

$$\left. + \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n}\right] = 0 \quad ; x^{\lambda} \neq 0$$

Galaxy

Scanned by CamScanner

نقسم على $x^{\lambda} \neq 0$

$$4\sum_{0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n x^{n-1} + 2\sum_{0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n-1}$$

$$+ \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n} = 0$$

- نوحد القوى:

في المتسلسلة الأخيرة نبدل كل n بـ $n-1$

$$4\sum_{0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n x^{n-1} + 2\sum_{0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n-1}$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} C_{n-1} x^{n-1} = 0$$

- نوحد الحدود البدايات $n=1$

$$4(-1+\lambda)(\lambda)C_0 x^{-1} + 2(\lambda)C_0 x^{-1}$$

$$+ \sum_{1}^{\infty}\Big[4(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n + 2(n+\lambda)C_n$$

$$+ C_{n-1}\Big] x^{n-1} = 0$$

- بالمطابقة:

امثال x^{-1} معدومة:

$$\left(4(\lambda-1)\lambda + 2\lambda\right)C_0 = 0 \qquad ; C_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow 2\lambda(2\lambda-1)=0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \lambda_2 = 0$

امثال x^{n-1} محدودية:

$[4(n+\lambda)(n+\lambda-1) + 2(n+\lambda)]C_n + C_{n-1} = 0$

نخرج $2(n+\lambda)$ عامل مشترك من امثال C_n

$[2(n+\lambda)[2(n+\lambda-1)+1]]C_n + C_{n-1} = 0$

$2(n+\lambda)(2n+2\lambda-1)C_n + C_{n-1} = 0$

$\Rightarrow C_n = -\frac{C_{n-1}}{(2n+2\lambda)(2n+2\lambda-1)} \quad ; n \geq 1$

- نوجد الحل الخاص الأول:

نعوض $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ في المعادلة التكرارية:

$C_n = -\frac{C_{n-1}}{(2n)(2n+1)}$

$n=1 \Rightarrow C_1 = -\frac{C_0}{3!}$

$n=2 \Rightarrow C_n = \frac{C_0}{5!}$

$$n=3 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_0}{7!}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C_0$$

وبما أنه حل خاص نختار $C_0 = 1$

$$\Rightarrow C_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow y_1 = x^{\lambda_1} \sum_0^{\infty} C_n x^n = x^{\frac{1}{2}} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n$$

$$\Rightarrow y_1 = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{x})^{2n+1}$$

$$\Rightarrow y_1 = \sin \sqrt{x}$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x$$

Galaxy

Scanned by CamScanner

/ /

- نوجد الحل الخاص الثاني

- $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ليس عدد صحيح

- نعوض الجذر الصغير $\lambda_2 = 0$ بالعلاقة التكرارية لنحصل على $\bar{C}_n$

$$\bar{C}_n = -\frac{C_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

$$n=1 \Rightarrow \bar{C}_1 = -\frac{\bar{C}_0}{2!}$$

$$n=2 \Rightarrow \bar{C}_2 = \frac{\bar{C}_0}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow \bar{C}_3 = -\frac{\bar{C}_0}{6!}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} C_0$$

نختار $\bar{C}_0 = 1$

$$\Rightarrow \bar{C}_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow y_2 = x^{\lambda_2} \sum_0^\infty \bar{C}_n x^n = \sum_0^\infty \bar{C}_n x^n$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{\frac{2n}{2}}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} \Rightarrow y_2 = \cos\sqrt{x}$$

Scanned by CamScanner

يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية الخطية من المرتبة الثانية هو :

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$y = A \sin\sqrt{x} + B \cos\sqrt{x}$$

Syria math_2nd Year. إعداد : ناريمان حلو ، آية سبيتي

Scanned by CamScanner

د. ملك مارديني — المحاضرة السادسة — 11 / 3 / 2019

عنوان المحاضرة :

دوال بيسل التفاضلية :

تمرين : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار $x_0 = 0$

$$2x^2 y'' + (3x - 2x^2) y' - (x+1) y = 0$$

الحل : نقسم على أمثال y'' :

$$y'' + \frac{3x - 2x^2}{2x^2} y' - \frac{x+1}{2x^2} y = 0$$

$$P(x) = \frac{3x - 2x^2}{2x^2} \qquad q(x) = \frac{x+1}{2x^2}$$

نجد ان $x_0 = 0$ شاذة :

$$\bar{P}(x) = x P(x) = x \frac{3x - 2x^2}{2x^2} = \frac{x(3 - 2x)}{2x}$$

$$= \frac{3 - 2x}{2} \overset{x_0=0}{=} \frac{3}{2}$$

$$Q(x) = x^2 q(x) = x^2 \frac{x+1}{2x^2} = \frac{x+1}{2} \overset{x_0=0}{=} \frac{1}{2}$$

فالدالتان تحليليتان عند $x_0 = 0$ فهي شاذة نظامية .

- نبحث عن الحل من الشكل :

$$y = x^{\lambda} \sum_{0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda}$$

Scanned by CamScanner

نوجد المشتقات:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$2x^2 \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n x^{n+\lambda-2}$$

$$+ 3x \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1}$$

$$- 2x^2 \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1}$$

$$- x \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} - \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} = 0$$

نصلح شكل المعادلة

$$\sum_{0}^{\infty} 2(n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n x^{n+\lambda}$$

$$+ \sum_{0}^{\infty} 3(n+\lambda) C_n x^{n+\lambda} - \sum_{0}^{\infty} 2(n+\lambda) C_n x^{n+\lambda+1}$$

$$- \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda+1} - \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda} = 0$$

Scanned by CamScanner

الآن نخرج x^{λ} عامل مشترك:

$$x^{\lambda}\Big[\sum_{0}^{\infty} 2(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n x^n + \sum_{0}^{\infty} 3(n+\lambda)C_n x^n$$

$$-\sum_{0}^{\infty} 2(n+\lambda)C_n x^{n+1} - \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+1} - \sum_{0}^{\infty} C_n x^n\Big] = 0$$

نقسم على $x^{\lambda} \neq 0$.

$$\sum_{0}^{\infty} 2(n+\lambda)(n+\lambda-1)C_n x^n + \sum_{0}^{\infty} 3(n+\lambda)C_n x^n$$

$$-\sum_{0}^{\infty} 2(n+\lambda)C_n x^{n+1} - \sum_{0}^{\infty} C_n x^{n+1} - \sum_{0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty}\left[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1\right]C_n x^n$$

$$-\sum_{0}^{\infty}\left[2(n+\lambda)+1\right]C_n x^{n+1} = 0$$

- نوحد القوى في المتسلسلة الثانية نبدل كل n بـ $n-1$

$$\sum_{0}^{\infty}\left[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1\right]C_n x^n$$

$$-\sum_{1}^{\infty}\left[2(n-1+\lambda)+1\right]C_{n-1} x^n = 0$$

نوجد الحدود الدنيا :

نفك من المتسلسلة الأولى $\quad n=0$

$$(2(\lambda)(\lambda-1)+3\lambda-1)C_0$$

$$+\sum\left[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1)C_n\right.$$

$$\left.-(2n+2\lambda-1)C_{n-1}\right]x^n=0$$

بالمطابقة :

الحد الثابت معدوم

$$(2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1)C_0=0 \qquad : C_0\neq 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1=0$$

$$2\lambda^2-2\lambda+3\lambda-1=0$$

$$2\lambda^2+\lambda-1=0$$

$$(2\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}\ ,\ \lambda_2=-1$$

Scanned by CamScanner

أمثال x^n محدودة.

$$\left(2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1\right)C_n$$

$$-(2n+2\lambda-1)\,C_{n-1}=0$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{(2n+2\lambda-1)}{2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1}\,C_{n-1}\quad ;n\geq 1$$

* الحل الخاص الأول: نعوض $\lambda_1=\frac{1}{2}$ في العلاقة التكرارية

$$C_n=\frac{2n}{2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+3(n+\frac{1}{2})-1}\,C_{n-1}$$

$$2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+3(n+\frac{1}{2})-1$$

$$=(n+\frac{1}{2})\left[2(n-\frac{1}{2})+3\right]-1$$

$$=(n+\frac{1}{2})(2n-1+3)-1$$

$$=(n+\frac{1}{2})(2n+2)-1=2(n+\frac{1}{2})(n+1)-1$$

$$=(2n+1)(n+1)-1=2n^2+2n+n+1-1$$

$$=n(2n+3)$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow C_n = \frac{2n}{n(2n+3)} C_{n-1}$$

$$C_n = \frac{2}{2n+3} C_{n-1} \quad ; n \geq 1$$

نوجد الثوابت :

$$n=1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{5} C_0$$

$$n=2 \Rightarrow C_2 = \frac{4}{5.7} C_0$$

$$n=3 \Rightarrow C_3 = \frac{8}{5.7.9} C_0$$

نعوض في الحل الخاص :

$$y_1 = x^{\lambda_1} \sum_0^\infty C_n x^n$$

$$= x^{\lambda_1} [C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots]$$

نختار $C_0 = 1$ ، نعوضه

$$\Rightarrow y_1 = x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{2x}{5} + \frac{2}{5.7} x^2 + \frac{8}{5.7.9} x^3 + \ldots\right]$$

* الحل الخاص الثاني : نعوضه $\lambda_2 = -1$ في العلاقة التكرارية

$$\bar{C}_n = \frac{2n-3}{2(n-1)(n-2)+3(n-1)-1} C_{n-1} \quad ; n \geq 1$$

Scanned by CamScanner

$2(n-1)(n-2)+3(n-1)-1$

$=(n-1)(2n-4+3)-1$

$=(n-1)(2n-1)+1$

$=2n^2-n-2n+1-1$

$=n(2n-3)$

$2(n-1)(n-2)+3(n-1)-1$

$\Rightarrow \bar{C}_n = \dfrac{2n-3}{n(2n-3)} C_{n-1} \quad ; n \geq 1$

$\bar{C}_n = \dfrac{1}{n} C_{n-1} \quad ; n \geq 1$

نوجد الثوابت :

$n=1 \Rightarrow \bar{C}_1 = \bar{C}_0$

$n=2 \Rightarrow \bar{C}_2 = \dfrac{1}{2!}\bar{C}_0$

$n=3 \Rightarrow \bar{C}_3 = \dfrac{1}{3!}\bar{C}_0$

$\Rightarrow C_n = \dfrac{1}{n!} C_0$

Scanned by CamScanner

نعوض في الحل الخاص:

$$y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{0}^{\infty} \bar{C}_n x^n$$

$$= x^{\lambda_2} [C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots]$$

نختار $C_0 = 1$ ونعوض

$$= x^{-1} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} \dots\right]$$

$$y_2 = \frac{1}{x} e^x$$

ومنه يكون الحل العام.

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$= A\left[\sqrt{x}\left(1 + \frac{2}{5}x + \frac{(2x)^2}{5.7} + \dots\right]\right] + B \frac{e^x}{x}.$$

دوال بيسل التفاضلية:

ليكن لدينا المعادلة:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2) y = 0$$

حيث أنه v عدد ثابت. عندئذ تسمى حلول المعادلة بجوار النقطة $x_0 = 0$ "بدوال بيسل التفاضلية".

سنقوم بحل هذه المعادلة لإيجاد دوال بيسل.

Scanned by CamScanner

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0 \qquad : x_0 = 0$$

- نقسم على امثال y''

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{x^2-\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

$$P = xP(x) = x\frac{1}{x} = 1$$

$$Q(x) = x^2 q(x) = x^2 \frac{x^2-\nu^2}{x^2} = x^2-\nu^2 \overset{x=0}{=} -\nu^2$$

- اذاً نجد ان النقطة x_0 شاذة نظامية لأن الدالتان تحليليتان عندها

- الحل العام من الشكل:

$$y = \sum_0^\infty C_n x^{n+\lambda}$$

نشتق:

$$y' = \sum_0^\infty (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_0^\infty (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\sum_0^\infty (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n x^{n+\lambda} + \sum_0^\infty (n+\lambda) C_n x^{n+\lambda}$$

$$+ \sum_0^\infty C_n x^{n+\lambda+2} - \sum_0^\infty \nu^2 C_n x^{n+\lambda} = 0$$

نجد $x^\lambda \neq 0$ عامل مشترك نقسم عليه.

$$\sum_0^\infty (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n x^n + \sum_0^\infty (n+\lambda) C_n x^n$$

$$+ \sum_0^\infty C_n x^{n+2} - \sum_0^\infty \nu^2 C_n x^n = 0$$

Galaxy

Scanned by CamScanner

- نوحد القوى:
في المتسلسلة الثالثة نبدل n ب $n-2$

$$\sum_{0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-\nu^{2}\right]C_n x^{n}$$

$$+\sum_{2}^{\infty}C_{n-2}\,x^{n}=0$$

- نوحد الحدود البدئية:

$$(\lambda(\lambda-1)+\lambda-\nu^{2})C_0+(\lambda(1+\lambda)+(1+\lambda)-\nu^{2})C_1 x$$

$$+\sum\left[((n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-\nu^{2})C_n+C_{n-2}\right]x^{n}=0$$

- بالمطابقة:
الحد الثابت معدوم

$$(\lambda(\lambda-1)+\lambda-\nu^{2})C_0=0 \quad : C_0\neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^{2}-\lambda+\lambda-\nu^{2}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^{2}-\nu^{2}=0 \Rightarrow \lambda^{2}=\nu^{2} \Rightarrow \lambda=\pm\nu$$

$$\lambda_1=\nu \quad , \quad \lambda_2=-\nu \quad : \nu\geq 0$$

- أمثال x محذوفة: $(\lambda(1+\lambda)+(1+\lambda)-\nu^2)c_1=0$

$((1+\lambda)(1+\lambda)-\nu^2)c_1=0$

$((\lambda+1)^2-\nu^2)c_1=0$

نعوض $\nu=\lambda_1$.

$((\lambda+1)^2-\lambda^2)c_1=0$

نجد أن $(\lambda+1)^2-\lambda^2>0$

فإن $c_1=0$ باستثناء $\lambda=-\frac{1}{2}$ تكون

$(-\frac{1}{2}+1)^2-(\frac{1}{2})^2=0$

- أمثال x^n محذوفة:

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{(n+\lambda)(n+\lambda-1+1)-\nu^2}$$

$$=-\frac{c_{n-2}}{(n+\lambda)^2-\nu^2}$$

$$=-\frac{c_{n-2}}{(n+\lambda-\nu)(n+\lambda+\nu)} \quad ; n\geq 2$$

Scanned by CamScanner

- الحل الخاص الأول: نعوض $\nu=\lambda_1$ في العلاقة التكرارية.

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{n(n+2\nu)} \qquad n \geq 2$$

* من أجل n عدد فردي نجد:

$$n=3 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_1}{3(3+2\nu)} = 0 \qquad ; C_1 = 0$$

$$n=5 \Rightarrow C_5 = -\frac{C_3}{5(5+2\nu)} = 0 = C_7 = C_9$$

إذاً الثوابت ذات الدليل الفردي جميعها معدومة.

* من أجل n عدد زوجي نجد: نبدل كل n بـ $2n$:

$$C_{2n} = -\frac{C_{2n-2}}{2n(2n+2\nu)} = -\frac{C_{2n-2}}{4n(n+\nu)} \qquad ; n \geq 1$$

$$n=1 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_0}{4(1+\nu)}$$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{C_0}{4\cdot 8\cdot (1+\nu)(2+\nu)}$$

$$n=3 \Rightarrow C_6 = -\frac{C_0}{4\cdot 8\cdot 12\cdot (1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

$$\Rightarrow C_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!\,(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)}\,C_0 \qquad ; n \geq 1$$

Scanned by CamScanner

لنختار ان $C_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(1+\nu)}$ نعوضه في C_{2n}

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!\,(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(1+\nu)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, 2^{\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)} \quad ; n \geq 1$$

حيث $\Gamma(n+\nu+1) = (n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(1+\nu)\,\Gamma(1+\nu)$

ومنه يكون الحل الخاص الأول:

$$y_1 = J_\nu(x) = x^{\lambda_1} \sum_{0}^{\infty} C_{2n}\, x^{2n}$$

$$= x^{\nu} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, 2^{\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}\, x^{2n}$$

$$\boxed{J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}$$

وتدعى دالة بيسل من النوع الأول من المرتبة ν .

الحل الخاص الثاني :
- بما أن $\nu>0$ لنأخذ ν ليست عدد صحيح.
- فيكون $\lambda_1-\lambda_2$ ليس عدد صحيح.
- نعوض $\lambda_2=-\nu$ في العلاقة التكرارية C_n

$$\bar{C}_n=-\frac{\bar{C}_{n-2}}{n(n-2\nu)} \; : n\geq 2$$

بما أن $\bar{C}_1=0$ فإن $\bar{C}_3=\bar{C}_5=\dots=0$

$$\bar{C}_{2n}=-\frac{\bar{C}_{2n-2}}{2n(2n-2\nu)}=-\frac{\bar{C}_{2n-2}}{4n(n-\nu)} \; : n\geq 1$$

$$\bar{C}_{2n}=\frac{(-1)^n}{4^n n!(n-\nu)(n-\nu-1)\dots(1-\nu)}\bar{C}_0$$

نختار $\bar{C}_0=\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$ ونعوضه

$$\bar{C}_{2n}=\frac{(-1)^n}{4^n n!(n-\nu)(n-\nu-1)-(1-\nu)}\;\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}2^{-\nu}n!\,\Gamma(n-\nu+1)} \; , n\geq 1$$

Scanned by CamScanner

وعنده يكون الحل الخاص الثاني :

$$y_2 = J_{-\nu}(x) = x^{-\lambda_2} \sum_{0}^{\infty} \bar{C}_n x^{2n}$$

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, n^{-\nu}\, n!\, \Gamma(n-\nu+1)} x^{2n}$$

$$\boxed{J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{-\nu} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}$$

وهي دالة بيسل من النوع الأول من المرتبة ν -

وعنده الحل العام يكون

$$y = A y_1 + B y_2$$

$$\boxed{y = A J_{\nu}(x) + B J_{-\nu}(x)}$$

حالات خاصة :

1) - في حالة $\nu = 0$ تصبح المعادلة : $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$

يكون الحل العام من المرتبة صفر

$$J_0(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

/ /

(2) - في حالة ν عدد صحيح :

يكون الحل الخاص الأول لا يتغير.
الحل الخاص الثاني :

$$y_2 = J_{-\nu}(x) + a J_{\nu}(x) \ln(x)$$

وهي دالة بيسل من النوع الثاني.

نوّهت الدكتورة أنّ "هذا التمرين لا يأتي كاملاً" في الامتحان نظراً لطول حلّه ، ولكن يمكن أن يأتي جزء منه.

Syria math - 2nd year. إعداد : نارمان حلو - آية بيتيكي

١٧ / ٣ / ٢٠١٩ المحاضرة السابعة تفاضلية 2 د. ملك مارديني

عنوان المحاضرة :

سنبدأ بحث جديد: تحويلات لابلاس وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الخطية.

تعريف : نسمي التكامل الآتي:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ حيث $t \geq 0$, $s > 0$

نقول بحق الدالة $f(t)$ أنها من مرتبة أسية اذا كان T كبير بشكل كاف، حيث أن $t \geq T$ وكان بالإمكان إيجاد ثابتين M و a حيث تتحقق العلاقة

$$|f(t)| < M e^{at}$$

ملاحظات:

1. اذا كانت الدالة $f(t)$ مستمرة قطعياً في المجال $[0, \infty[$ وكانت $f(t)$ من مرتبة أسية فإن تحويل لابلاس لـ $f(t)$ موجود.

2. اذا كان تحويل لابلاس متقارباً بإطلاق من أجل $S = S_0$ فإن تحويل لابلاس متقارب بإطلاق من أجل جميع القيم $S > S_0$

قوانين خاصة لتحويلات لابلاس:

1. $L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] \quad : s>0, t>0$

   $= \alpha F(s) + \beta G(s) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2. $L[A] = \dfrac{A}{s} \quad : s>0 , A \in \mathbb{R}$

3. $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a} \quad : a \in \mathbb{R} , s > a$

4. $L[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2} \quad : a \in \mathbb{R} , s>0$

5. $L[\cos at] = \dfrac{s}{s^2+a^2} \quad : a \in \mathbb{R} , s>0$

6. $L[\text{sh}\, at] = \dfrac{a}{s^2-a^2} \quad : a \in \mathbb{R} \quad s>0$

7. $L[\text{ch}\, at] = \dfrac{s}{s^2-a^2} \quad : a \in \mathbb{R} , s>0$

8. $L[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad : n \in \mathbb{N} , s>0$

9. $L[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad : f' = \dfrac{df}{dt}$

10. $L[f''(t)] = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \quad : f'' = \dfrac{d^2 f}{dt^2}$

11. $L\left[\dfrac{df}{dt}\right] = sF(x,s) - f(x,0)$

Galaxy

Scanned by CamScanner

/ /

12 $L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2 F(x,s) - s f(x,0) - f'(x,0)$

13 $L\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{dF(x,s)}{dx}$

14 $L\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = \frac{d^2F(x,s)}{dx^2}$

15 $L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

16 $L[e^{at} f(t)] = F(s-a) \quad : s > a$

17 $L[f(t)] = F(s)$

18 $L^{-1} L[f(t)] = L^{-1} F(s) = f(t)$.

اثبات رقم (2)

$L(A) = \frac{A}{s} \quad : f(t) = A$

$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty A e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-st} dt$

$= A\left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{A}{s}$

ملاحظات:

9 و 10 هم اشتقاق كلي ل (t). 11 و 12 اشتقاق جزئي ل (t)

13 و 14 اشتقاق جزئي ل (x).

18 هو تحويل لابلاس العكسي.

Scanned by CamScanner

أمثلة:

① $L[3e^{-4t}] = 3L[e^{-4t}] = 3\frac{1}{s-a} = 3\frac{1}{s+4}$

$= \frac{3}{s+4} = F(s)$

② $L[2t^2] = 2L[t^2] = 2\frac{n!}{s^{n+1}} = 2\frac{2!}{s^{2+1}}$

$= \frac{4}{s^3} = F(s)$

③ $L[4\cos 5t] = 4L[\cos 5t] = 4\frac{s}{s^2+a^2}$

$= 4\frac{s}{s^2+25} = F(s)$

④ $L[\sin \pi t] = \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} = F(s)$

⑤ $L[e^{3t}\sin 4t] \overset{\text{صيغة 15}}{=} F(s-a)$

نحسب أولاً $F(s)$ ثم $F(s-a)$ حيث $f(t) = \sin 4t$

$F(s) = L[f(t)] = L[\sin 4t] = \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{4}{s^2+16}$

$F(s-a) = F(s-3) = \frac{4}{(s-3)^2+16}$

Galaxy

Scanned by CamScanner

6) $L(t^2 e^{-3t}] \overset{\text{ص16}}{=} F(s-a)$

$f(t) = t^2$ نجيب اولاً $F(s)$ ثم $F(s-a)$ حيث

$$F(s) = L[f(t)] = L[t^2] = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{2}{s^3}$$

$$F(s-a) = F(s+3) = \frac{2}{(s+3)^3}$$

7) $L[t \sin 2t] \overset{\text{ص15}}{=} (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$$= (-1) \frac{dF(s)}{ds}$$

$$F(s) = L[f(t)] = L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow -\frac{dF(s)}{ds} = -\frac{d\,\frac{2}{s^2+4}}{ds} = -\frac{-4s}{(s^2+4)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

8) $L[t^2 \sin 2t] = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$$= (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2} = F''(s) = \left(\frac{2}{s^2+4}\right)''$$

$$= \left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right)' = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

Scanned by CamScanner

9) $L[te^t] = -F'(s)$

$f(t) = e^t \Rightarrow F(s) = L[e^t] = \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-1}$

$\Rightarrow -F'(s) = -\left(\frac{1}{s-1}\right)' = -\left(\frac{-1}{(s-1)^2}\right)$

$= \frac{1}{(s-1)^2}$

تحويل لابلاس العكسي للتابع $\frac{1}{(s-1)^2}$ هو:

$L[te^t] = \frac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow L^{-1}L[te^t] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$

$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = te^t$	احفظ
$L^{-1}\left[\frac{2}{(s+3)^3}\right] = t^2 e^{-3t}$	احفظ

ذكرت الدكتورة أن تحويل لابلاس العكسي لا يأتي إلا ما ذكرته للحفظ للاستخدام فيما بعد.

Syriamath _ 2nd Year   إعداد: نانا ريمان حلو _ آية بسيس

Galaxy

Scanned by CamScanner