د. أحمد هابيل / /

التبولوجيا (1)

المحاضرة الخامسة عشر:

"الترابط في الفضاءات المترية"

- تعريف:

- ليكن (X, d) فضاء متري، و $A \subseteq X$، نقول عن المجموعة A أنها مترابطة إذا لم يكن بالإمكان إيجاد مجموعتين مفتوحتين في X U و V بحيث:

1) $A \subseteq U \cup V$

2) $A \cap U \cap V = \phi$

3) $A \cap U \neq \phi$

4) $A \cap V \neq \phi$

ملاحظة:

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$$

$$(A \cap U) \cap (A \cap V) = \phi$$

$$A \cap V \neq \phi \ , A \cap V \neq \phi$$

ونقول أن الفضاء X مترابط إذا كانت $A = X$ مترابطة أي إذا لا يمكن إيجاد مجموعتين مفتوحتين U, V بحيث تحقق:

1) $X = U \cup V$

2) $U \cap V = \phi$

3) $V \neq \phi$

4) $U \neq \phi$

مثال : في الفضاء (X, δ)

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

اذا كانت $A \subseteq X$ بحيث ، $|A| \geq 1$ فإن A غير مترابطة

وذلك لأنه اذا أخذنا أي مجموعتين ولتكن :

$$\phi \subsetneq U \subsetneq A$$

ممكن لأن $|A| > 1$

و U أي مجموعة محتواة تماماً في A وغير خالية .

ونعلم أن كل مجموعة جزئية في الفضاء (X, δ) هي مفتوحة ومغلقة في آن واحد

اذاً U مجموعة مفتوحة ولنأخذ $V = U^c$

وإن $\phi \neq U$ و $V \neq \phi$

وبالتالي نجد :

1) $A \subseteq U \cup V = X$

2) $A \cap U \cap V = \phi$

3) $A \cap U = U \neq \phi$

4) $A \cap V = A \cap U^c = A \setminus U \neq \phi$

اذن A غير مترابطة لتحقق الشروط السابقة .

ولو كان $A = X$ سنجد أن X غير مترابطة

اذاً كل المجموعات الجزئية في (X, δ) غير مترابطة باستثناء المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ لأن $\{x\}$ مترابطة دوماً .

لأنها لو كانت غير مترابطة اذاً يجب U و V ...

/ /

مفتوحتان في (X,d) بحيث:

$\{x\} \subseteq U \cup V$

$\{x\} \cap V \neq \emptyset$

$\{x\} \cap U \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in U \ , \ x \in V$

$x \in \{x\} \cap V \cap U = \emptyset$

وهذا غير ممكن لأن $\{x\}$ مترابطة.

معلومات:

المجموعات المترابطة في الفضاء المتري $(R, |.|)$

هي فقط المجالات (المحدود، المغلق، المفتوح، المنتهي، ....

مثال: إن Q مجموعة الأعداد الكسرية في الفضاء الحقيقي المألوف $(IR, |.|)$

غير مترابطة.

لأنه علينا لو أخذنا مجموعتين مفتوحتين:

$U =]-\infty, \sqrt{2}[\ , \ V =]\sqrt{2}, +\infty[$

1) $Q \subseteq U \cup V = IR \setminus \{\sqrt{2}\}$

2) $Q \cap U \cap V = \emptyset$

3) $Q \cap V \neq \emptyset$

4) $Q \cap V \neq \emptyset$

وبالتالي Q في الفضاء الحقيقي المألوف

غير مترابطة.

/ /

مبرهنة: ليكن (X,d) فضاء متري، إذا كانت E مترابطة، ولنفرض أن $E \subseteq F \subseteq \bar{E}$ عندئذٍ F مترابطة.

البرهان:

لنفرض جدلاً أن F غير مترابطة $\Leftarrow$ توجد مجموعتين مفتوحتين ولتكن U و V بحيث:

1) $F \subseteq U \cup V$

2) $F \cap U \cap V = \phi$

3) $F \cap V \neq \phi$

4) $F \cap U \neq \phi$

واضح أن $E \subseteq F \subseteq U \cup V$

$$\Rightarrow E \subseteq U \cup V$$

$$E \subseteq F \Rightarrow E \cap U \cap V \subseteq F \cap U \cap V = \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{E \cap U \cap V = \phi}$$

كما أن $\phi \neq E \cap V$ لأنه بسبب

$$F \subseteq \bar{E}$$

$$\phi \neq F \cap U \subseteq \bar{E} \cap U$$

إذاً $\phi \neq \bar{E} \cap U$

لتكن $x \in \bar{E} \cap U$

U مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$

$$\exists r > 0 ; N(x,r) \subseteq U$$

$\Leftarrow x \in \bar{E}$

$$\phi \neq N(x,r) \cap E \subseteq U \cap E$$

/ /

اذاً: $\emptyset \neq U \cap E$

بشكل مشابه:

$\emptyset \neq E \cap V$

وبالتالي E غير مترابطة وهذا يناقض الفرض اذاً F مترابطة.

ملاحظة: اذاً في حال $F = \bar{E}$ نرى أن لصاقة أي مجموعة مترابطة تكون مترابطة.

مبرهنة: إذا كانت $\{A_i : i \in D\}$ جماعة من المجموعات المترابطة بحيث

$\emptyset \neq \bigcap_{i \in D} A_i$

فإن $\bigcup_{i \in D} A_i$ مترابط

البرهان: لنفرض جدلاً أن $\bigcup_{i \in D} A_i$ غير مترابط اذاً توجد مجموعتان U و V مفتوحتان بحيث:

1) $A \subseteq U \cup V$ 3) $A \cap U \neq \emptyset$

2) $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ 4) $A \cap V \neq \emptyset$

لنأخذ $x \in \bigcap_{i \in D} A_i \subseteq A \subseteq V \subseteq U \cup V$

من الشرط $A \cap U \neq \emptyset$

لنفرض مثلاً أن $x \in U$

$\bigcup_{i \in D} (A_i \cap U) = (\bigcup_{i \in D} A_i) \cap U \neq \emptyset \Leftarrow A \cap U \neq \emptyset$ التأ

اذن يوجد $i_0 \in D$ بحيث

$A_{i_0} \cap U \neq \emptyset$

كما أن $\emptyset \neq A_i \cap V$

لأن:

$x \in A_i \wedge x \in U$

/ /

إذاً يوجد i_0

(2) $\boxed{A_{i_0} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset}$

كما أن

$A_{i_0} \subseteq A \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$

(3) $\boxed{\Rightarrow A_{i_0} \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}}$

$A_{i_0} \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq A \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

(4) $\Rightarrow \boxed{A_i \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset}$

من (1) و (2) و (3) و (4) نجد أن A غير مترابطة
وهذا غير صحيح من الفرض إذاً

$\bigcup_{i \in D} A_i$ مترابط.

نتيجة: $\{A, B\}$ مجموعتين مترابطتين، إذاً $A \cap B \neq \emptyset$
$A \cup B$ مترابط.

المركبات:
تعريف: ليكن $x \in X$ نرمز بـ $C(x)$ لاتحاد كل المجموعات المترابطة التي

تحوي x فتكون $C(x)$، استناداً للمبرهنة السابقة مترابطة
«لأن تقاطعهم يحوي x»

وواضح أن الاتحاد موجود دوماً لأن $\{x\}$ مترابطة تحوي x

ندعو $C(x)$ المركبة الحاوية لـ x.
$C(x)$ أكبر مترابطة تحوي x

مبرهنة :- X فضاء متري :

1) كل مجموعة مترابطة في الفضاء X وغير خالية محتواة في مركبة واحدة فقط.

2) كل مجموعة مترابطة غير خالية مفتوحة ومغلقة هي مركبة

3) كل مركبة مجموعة مغلقة.

البرهان :

1) A مجموعة مترابطة وغير خالية ،، لتكن $x \in A$ فتكون A مترابطة

تحوي x $\Leftarrow$ $A \subseteq C(x)$

فإذا كانت D مركبة أخرى تحوي A فإن D مترابطة تحوي x

$\Leftarrow$ $D \subseteq C(x)$ (من تعريف $C(x)$)

$C(x)$ مترابطة تحوي x $\Leftarrow$ $C(x) \subseteq D$

إذا $C(x) = D$

2) لتكن $C \neq \phi$ مجموعة مترابطة ومفتوحة ومغلقة في X

حسب (1) توجد مركبة مثل $C(x)$ تحوي C أي

$$C \subseteq C(x)$$

إذا كانت $\phi \neq C \subsetneq C(x)$

لتكن $U = C$ مغلقة

$V = C^c$ مفتوحة

فنجد أن : $C(x) \subseteq U \cup V$

$$C(x) \cap U \cap V = \emptyset$$

$$C(x) \cap U = C(x) \cap C = C \neq \emptyset$$

$$C(x) \cap V = C(x) \cap C^c = C(x) \setminus C \neq \emptyset$$

اذاً $C(x)$ غير مترابطة وهذا غير صحيح

اذاً $C = C(x)$

3) نفرض C مركبة في X فهي مترابطة بالاعتماد على المبرهنة

السابقة فإن $\bar{C}$ مترابطة ، اذاً $\bar{C}$ مترابطة تحوي

x ، $x \in C$ ،

اذن

$$\left.\begin{aligned} \bar{C} &\subseteq C \\ C &\subseteq \bar{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = \bar{C}$$

اذن C مغلقة.

تمرين : X مترابطة $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{المجموعتان المفتوحتان والمغلقتان في } X \text{ هما } \emptyset \text{ و } X}$ ★

الحل : $(\Longleftarrow)$

X مترابط ولنفرض أن :

$$\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$$

و A مغلقة ومفتوحة في نفس الوقت ، اذن توجد مجموعتين

$$\left.\begin{aligned} U &= A \\ V &= A^c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} U \cup V &= X \\ U \cap V &= \emptyset \end{aligned}$$

/ /

ومنه $U \neq \phi$ ، $V \neq \phi$

اذن X غير مترابطة وهذا غير صحيح فرضاً اذن ★ صحيح

$(\Rightarrow)$ لنفرض ★ صحيح ونريد اثبات أن X مترابط

اذا لم تكن X مترابطة $\Leftarrow$ $\exists\, U, V \subseteq X$

$$X = U \cup V \ , \quad U \cap V = \phi$$

$$U \neq \phi \ , \ V \neq \phi$$

اذن $A = U$ هي مجموعة ~~...~~ مفتوحة ومغلقة لأن V مفتوحة V^c.

و $A \neq \phi$ ، $A \neq X$ وهذا يناقض ★

ملاحظة : في أي فضاء متري تكون المجموعات وحيدة العنصر مغلقة ،