نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

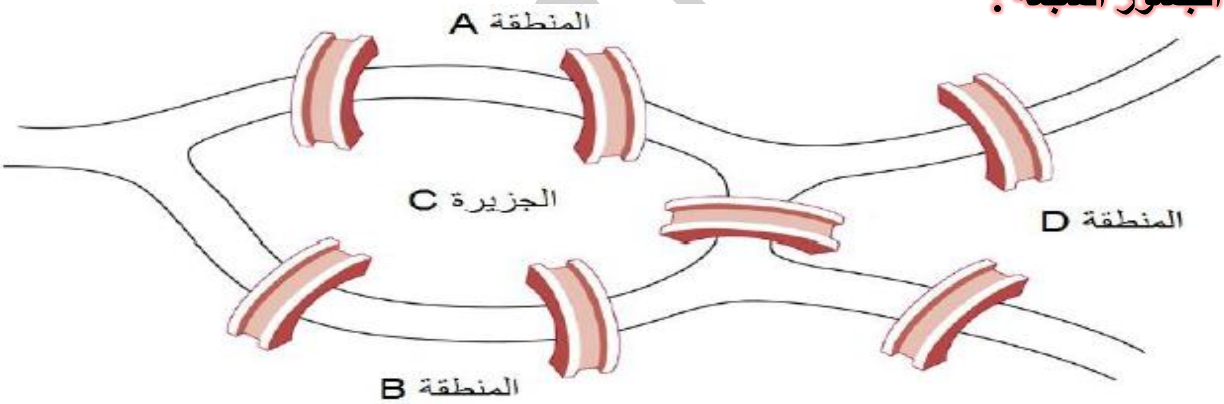
◄ المحاضرة: الأولى   عنوان المحاضرة: تعريف البيان

مقدمة .... تعد نظرية البيان (Graph theory) الأفضل في استكشاف طرق البرهان في الرياضيات المتقطعة ، فضلاً عن أن كثيراً من التطبيقات في العديد من النواحي الحسابية والاجتماعية والعلوم الطبيعية يستند إلى نتائجها

كما أن نظرية البيان تعد من العلم الحديث نسبياً ، حيث ظهرت في بداية القرن الثامن عشر ، ويعود الفضل في ظهورها إلى عالم الرياضيات السويسري ليونارد أولر حيث قام بتقديم أقدم وثيقة في نظرية البيان في عام 1763 م ، وهذه الوثيقة تعرف بمسألة الجسور السبعة لمدينة كونغ سبرنغ ، حيث ظهرت في البداية نظرية البيان بوصفها أداة كل الأحاجي والألعاب .

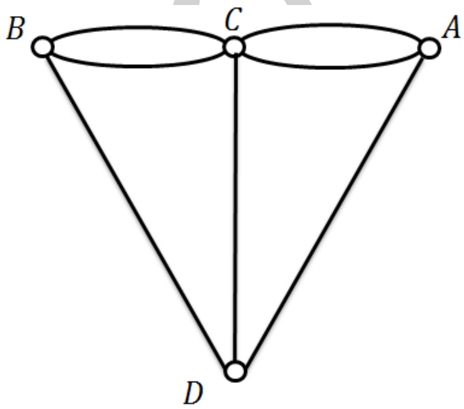
كما استخدمت نظرية البيان لحل معظم المسائل من أشهرها

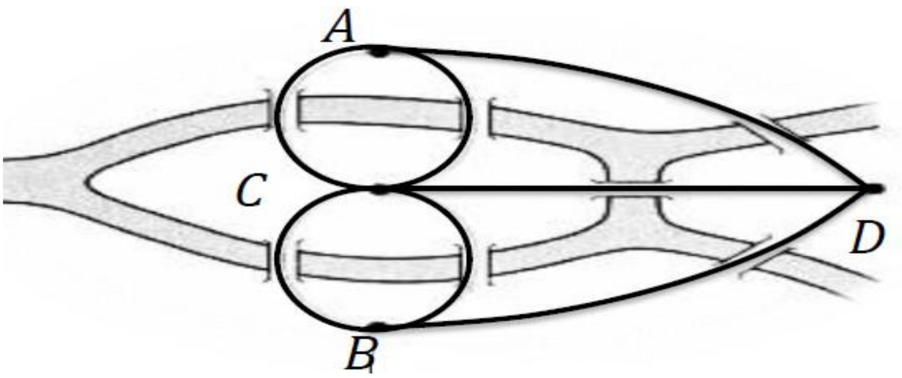
مسألة الجسور السبعة :



هل نستطيع التجوال في هذه الجسور السبعة دون أن نمر على الجسر مرتين ؟؟

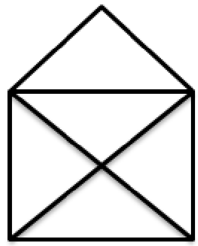
حاول العالم أويلر حل هذه المسألة لمدة 11 عاماً لكن دون جدوى ، فحاول أويلر أن يرسم نموذجاً لهذه المسألة ، فكانت الرسمة كالآتي :





حيث أطلق على كل يابسة (منطقة) اسم عقدة ورمز لها $\{A, B, C, D\}$ ، وعبر عن الجسور بأضلاع واصلة بين العقد ، وبما أنه بين المنطقة A والمنطقة C جسران يصلان بينهما فَرَسَمَ ضلعين ، وبالمثل للمنطقتين C و B وكذلك الامر للمنطقة D حيث تصل المناطق الثلاث ببعضها .
ثم قام بنشر هذه المسألة في الصحف وقال :

هل يمكن التجول على كامل العُقد دون المرور على العقد أكثر من مرة ؟؟



وظهر على أثر هذه المسألة العديد من المسائل والألعاب على نمط المسألة السابقة

ومن هذه المسائل ....

هل يمكن رسم الشكل التالي بخط واحد دون رفع القلم أو تكرار أي خط مرة آخرى ؟

مسألة الألوان الأربعة :

وهي من المسائل القديمة في البيان ، كان قد طرحها الطالب فريدريك كوثري على العالم دي مورغان عام 1852 م وقد كانت تنص على ما يلي :

((هل صحيح أن أي خارطة يمكن تلوينها بأربعة ألوان بحيث أي دولتين متجاورتين لها ألوان مختلفة ؟))

بقيت المسألة دون برهان قرابة قرن وأكثر ، قدم المُحامي كيمب حلاً إيجابياً للمسألة وقد كُرّمَ على حله ، حيث انتخب رئيساً للأكاديمية الرياضية في لندن ، لكن في عام 1890 م أثبتَ هاود أن إثبات كيمب خاطئ ، كما تعد مسألة الألوان الأربعة من أهم مسائل البيان لأنها كانت خطوة كبيرة، كما قادت إلى دِراسة في تلوين البيان وأنواع جديدة في الدراسات

بعض من تطبيقات البيان الحديثة

1) **في مجالات الطب والصيدلة :** لدراسة آلية انتشار الفيروسات وغيرها.

2) **في مجال البيولوجيا :** حيث استخدم في الورثة الجينية للحصول على نتائج أفضل .

3) **في مجال الحواسيب :** حيث استخدمت في تصميم لوحات الأم والدارات المتكاملة الحديثة للحواسيب كما تستخدم في تصميم الشبكات الحاسوبية وشبكات التواصل الاجتماعي والبرامج المعقدة ، ومنه فإن البيان قادر على تمثيل أي مشكلة ببساطة ليدرس المبرمج المشكلة بتجرد ((حيث قبل كتابة أي برنامج يجب وضع تصور له)) ، ثم يبدأ بإيجاد حل برمجي باستخدام الحاسوب .

4) **في العالم الحقيقي :** قد تكون هذه العقد مُدناً والأضلاع هي طرق بينها .وأخيراً نختم مقدمتنا عن المقرر وأهميته بفائدة البيان في مجالنا ....

5) **في مجال الرياضيات :** البيان هو بنية بسيطة تتكون من عقد وأضلاع ، عادةً ما تُمثل العقد عناصر المسألة وتكون الأضلاع هي العلاقة بين هذه العناصر .

والآن أصدقائي أهلاً بكم في مقررنا الممتع حيث سنقوم بتغطية المقرر معاً ، وسنحاول عرضه بشكل مبسط وواضح . . . .آملين من الله التوفيق لنا ولكم.

تعاريف ومفاهيم أساسية

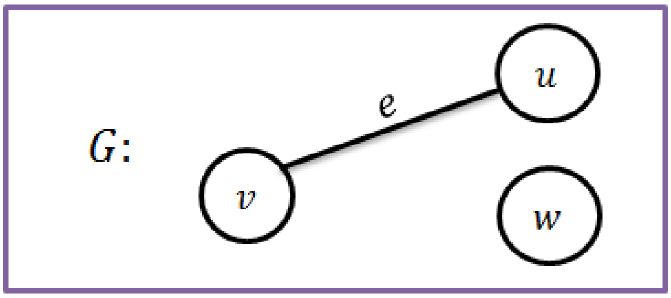
تعريف البيان (graph):

هو عبارة عن مجموعتين ، الأولى هي مجموعة من العقد الغير الخالية ندعوها برؤس البيان ونرمز لها V $(Vertices)$، والثانية هي مجموعة من الأضلاع E $(Edge)$ ، ونسمي الثنائية المرتبة $G(V,E)$ بياناً ، حيث أن :

$$V=\{v_1,v_2 \dots\dots, v_n\} \qquad , \qquad E=\{e_1,e_1 \dots\dots, e_n\}$$

علماً أن كل ضلع يربط بين عقدتين من عقد البيان .

مثال للتوضيح :

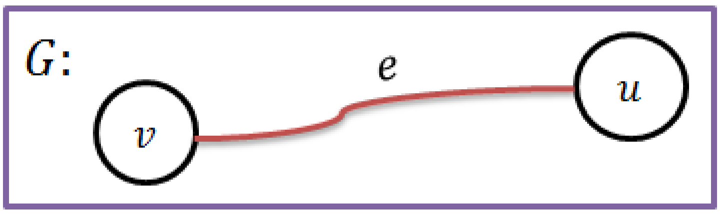


$$V(G)=\{u,v,w\} \quad , \quad E(G)=\{u,v\}$$

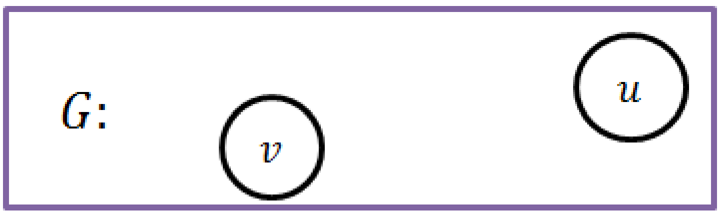
إن uv ضلع من E ويمكن أن يرمز له e أي أن $e=uv$ ((الترتيب لا يهم))

و إن uv هما رؤوس لهذا الضلع

ليس بالضرورة أن يكون الضلع الواصل بين u,v مستقيم أي يمكن أن يكون :



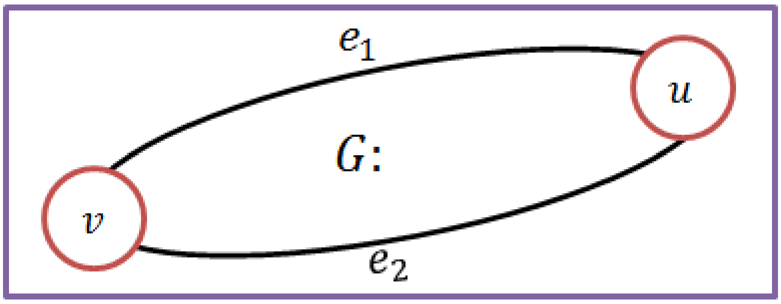
مثال عن بيان تافه :



$$V(G) = \{u, v\} \quad , \quad E(G) = \emptyset$$

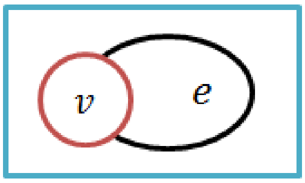
مما سبق نستطيع تعريف الضلع بأنه الخط الذي يصل بين رأسين في البيان G

البيان المضاعف (الأضلاع المضاعفة) : هي مجموعة الأضلاع التي تربط بين نفس العقدتين .

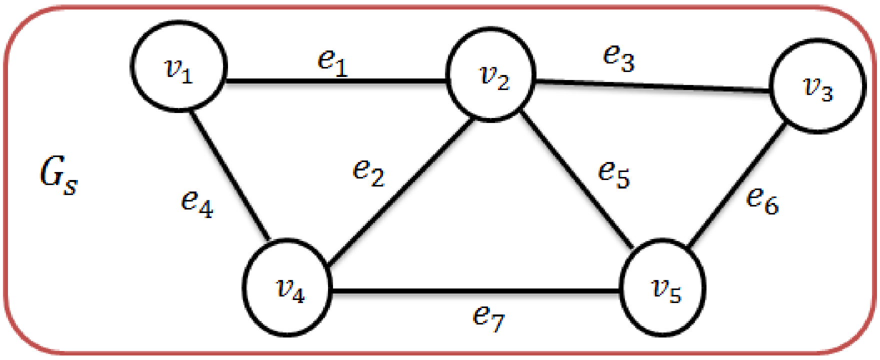


العُروة : هي عبارة عن ضلع يربط العقدة بنفسها .

تكتب رياضياً : $e = (v, v)$



البيان البسيط : هو البيان الذي لا يحوي على عُرى ولا على أضلاع مضاعفة .

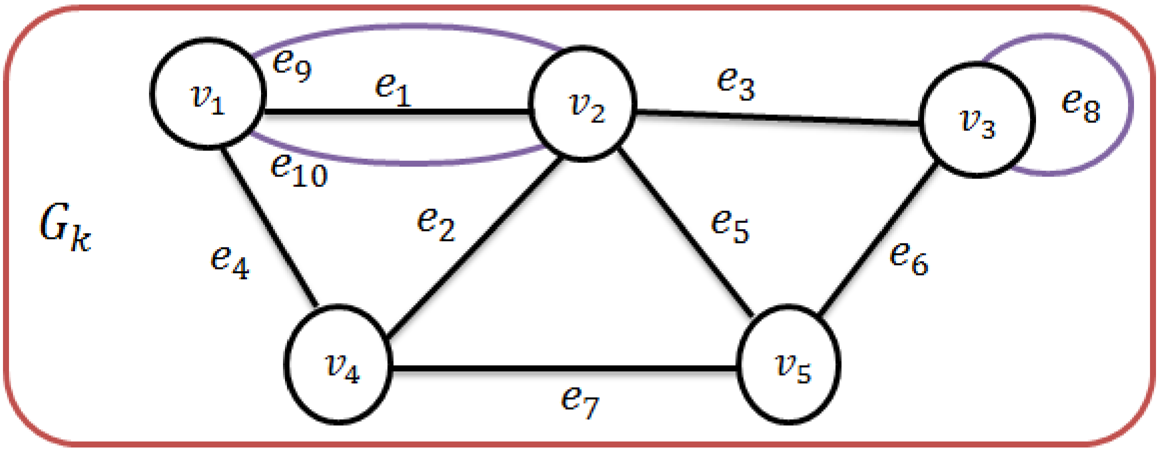


$$G_s = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

إن البيان G_k غير بسيط ((لأنه يحوي على عُرى وأضلاع مضاعفة))



الأضلاع المضاعفة هي $e_1, e_9, e_{10} = (v_1, v_2)$ والعروة هي $e_8 = (v_3, v_3)$

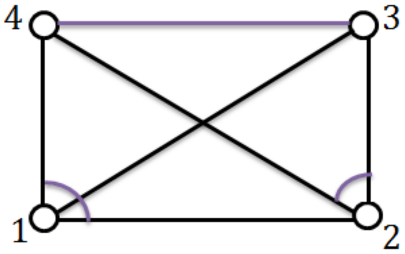
ميزات البيان

ندعو عدد رؤوس البيان G بمرتبة البيان ونرمز لها بـ p و $|V|$ قدرة الرؤوس بحيث $p = |V|$
وندعو عدد أضلاع البيان G بحجمه ونرمز لها بـ q و $|E|$ قدرة الأضلاع بحيث $q = |E|$

حيث يقصد بـ $\underbrace{|E|}_{\text{عدد الأضلاع}} = \{e_1, e_2 \ldots \ldots, e_n\}$ ، $\underbrace{|V|}_{\text{عدد العقد}} = \{v_1, v_2 \ldots \ldots, v_n\}$

إذاً نقول عن البيان $G(p,q)$ بحيث p عدد عقد الرؤوس و q عدد الأضلاع
إذا كان لدينا عدد الرؤوس p كم هو عدد الأضلاع ؟
لحساب عدد الأضلاع نستخدم القانون التالي : $q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ عدد الأضلاع بدون تكرار .

$$\text{عدد الأضلاع} = \underbrace{(p-1)}_{v_1} + \underbrace{(p-2)}_{v_2} + \underbrace{(p-3)}_{v_3} + \cdots + \underbrace{1}_{v_{n-1}}$$



مثال : ليكن لدينا بيان مكون من 4 نقط كم هو عدد أضلاع البيان ؟
نقوم بعدّ الأضلاع عند كل عقدة دون تكرار للأضلاع
أي عدد الأضلاع هو $3 + 2 + 1 = 6$

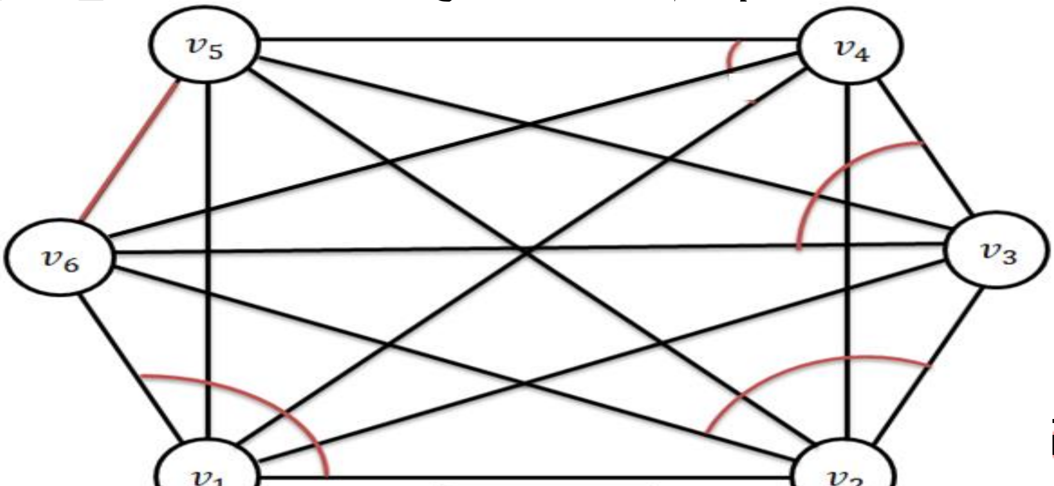
ملاحظة : عند العقدة (1) يخرج منها ثلاث أضلاع والعقدة (2) يخرج منها ضلعين دون حساب الضلع التي تشترك مع العقدة (1) وعند العقدة (3) يخرج منها ضلع واحد دون حساب الأضلاع المشتركة مع العقد ، أما العقدة (4) لا يوجد فيها أي ضلع لأن جميع أضلاعها مشتركة مع العقد السابقة .

بإمكاننا أن نحسب الأضلاع من القانون التالي :

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \Longrightarrow q = \frac{4(4-1)}{2} = \frac{(4\times3)}{2} = 6$$

" مثال خارجي لتوضيح الفكرة السابقة "

إذا كان لدينا عدد الرؤوس $p = 6$ كم هو عدد الأضلاع ؟



$G(p,q)$

$$|E| = \underbrace{(p-1)}_{v_1} + \underbrace{(p-2)}_{v_2} + \underbrace{(p-3)}_{v_3} + \underbrace{(p-4)}_{v_4} + \underbrace{(p-5)}_{v_5} + \underbrace{(p-6)}_{v_6}$$

$$q = |E| = 5+4+3+2+1+0 = 15$$

أو نطبق القانون السابق :

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \Longrightarrow q = \frac{6(6-1)}{2} = \frac{(6\times 5)}{2} = 15$$

تعريف درجة (عقدة) الرأس

ليكن لدينا $G(p,q)$ وليكن $v \in V$ ونعرف جوار الرأس v بأنه :

$$N(v) = \{v \in V \quad ; \quad v_1 v_2 \in E\}$$

لكل رأس له جوار هو الجوار المتصل فيه ، ونرمز لدرجة الرأس v بـ $\deg v$

تمثل $N(v)$ عدد عناصر الجوار بحيث قدرة (درجة) مجموعة تساوي $\deg v = |N(v)|$

درجة الرأس $0 \le \deg v \le p-1$

نقول عن v أنه زوجي أو فردي حسب درجته (قدرته) ، فيما إذا كانت زوجية أو فردية
فإذا كانت $\deg v = 0$ ((أي لم يؤثر على العقدة v أي ضلع من البيان G فندعو v برأس منعزل و هو زوجي))

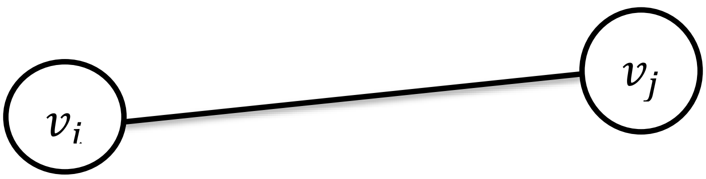
أما إذا كان $\deg v = 1$ ندعو v برأس طرفي ((و هو فردي))

نظرية (1): ليكن G بيان من المرتبة p والحجم q ولدينا مجموعة العقد

$$V(G) = \{v_1, v_2 \dots \dots, v_p\}$$

عندئذٍ : $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = \deg v_1 + \deg v_2 \dots \dots \dots \deg v_p = 2q$

الإثبات : عند الجمع على درجات الرؤوس نكون قد جمعنا الأضلاع مرتين مرة من أجل أحد طرفي الضلع ومرة من أجل الطرف الأخر



بمعنى آخر :

كل ضلع يؤثر على عقدتين وبالتالي عندما نجمع قدرات العقد (درجات الرؤوس) فإننا نجمع كل ضلع مرتين وبالتالي فإن :

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

النظرية (2) << كل بيان $G(p,q)$ يحوي على عدد زوجي من الرؤوس ذات الدرجات الفردية << .

البرهان : لنفرض أن V_1 مجموعة الرؤوس الفردية و V_0 مجموعة الرؤوس الزوجية

وحسب النظرية السابقة التي تنص " على أن اي ضلع يؤثر على عقدتين " أي :

$$\sum_{v\in V} \deg v = 2q$$

نَقسِم $\sum_{v\in V} \deg v$ إلى قسمين :

$$\sum_{v\in V_1} \deg v_1 + \sum_{v\in V_0} \deg v_0 = 2q$$

$$\Rightarrow'$$

$$\sum_{v\in V_1} \deg v_1 = 2q - \sum_{v\in V_0} \deg v_0$$

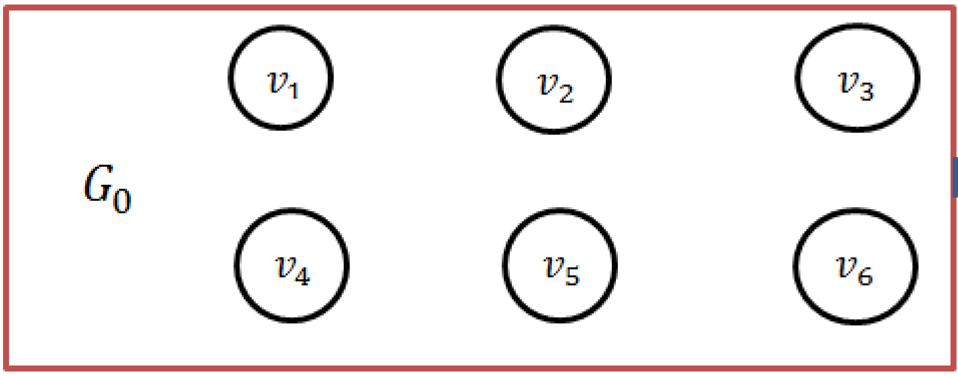
بما أن العدد $\sum_{v\in V_0} \deg v_0$ عدد زوجي وكذلك $2q$ عدد زوجي فإن $\sum_{v\in V_1} \deg v_1$ هو عدد زوجي .

هذا يعني أن عدد التم المطلوب . ((طرح عددين زوجيين هو عدد زوجي))

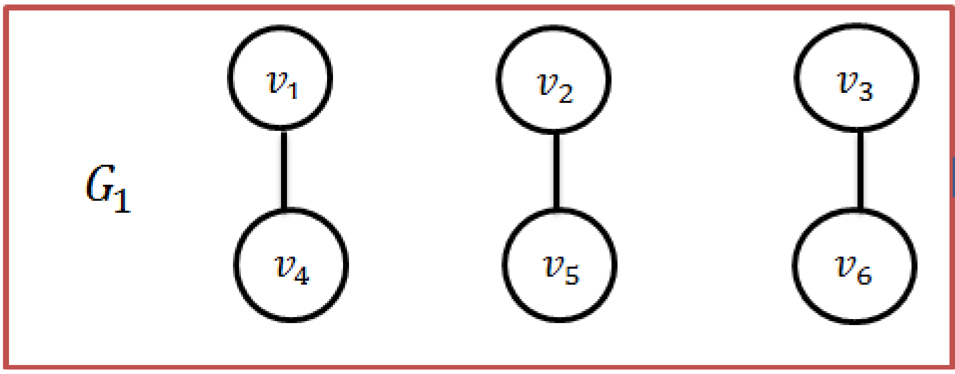
البيان المنتظم

نقول عن البيان G أنه بيان منتظم من الدرجة r بحيث $r \geq 0$ إذا كانت درجة كل رأس من رؤوسه تساوي r حيث : $0 \leq r \leq p-1$

أمثلة عن البيانات المنتظمة :

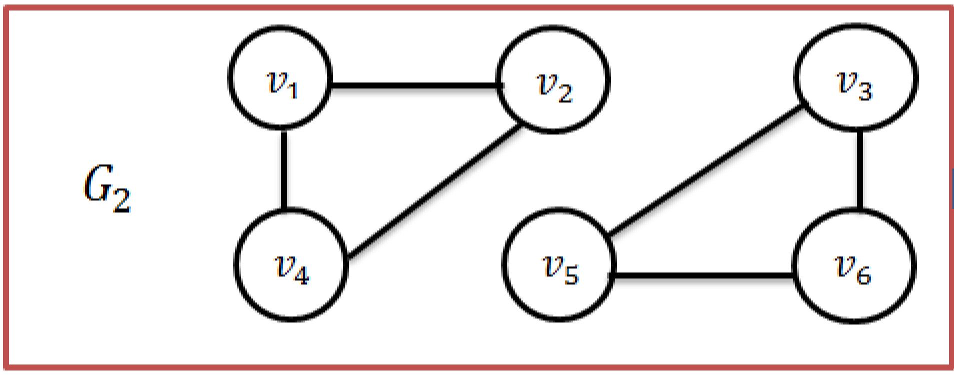


إن البيان G_0 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 0



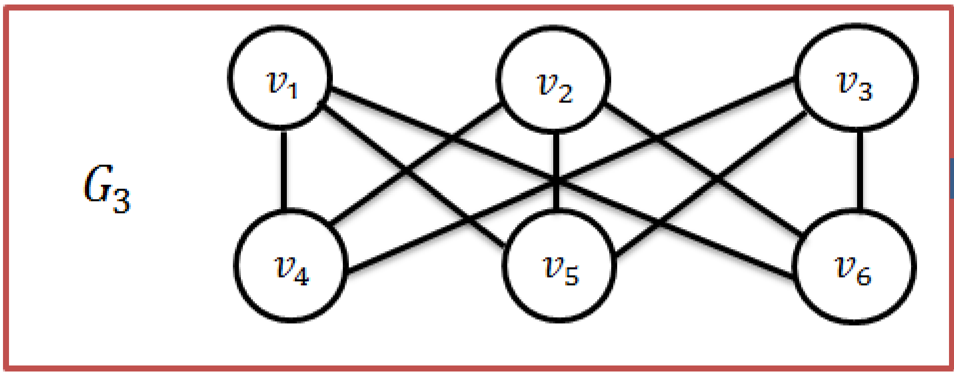
إن البيان G_1 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 1

" كل رأس يخرج منه ضلع "



إن البيان G_2 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 2

" كل رأس يخرج منه ضلعين "



إن البيان G_3 عدد رؤوسه $p = 6$ منتظم من الدرجة 3

" كل رأس يخرج منه 3 أضلاع "

سؤال : هل يوجد بيان منتظم من الدرجة 3 وعدد رؤوسه 5 ؟؟

الجواب : لا وذلك حسب مبرهنة ((لأن الرؤوس ذات الدرجة الفردية يجب أن يكون عددها زوجي)).

إن البيان السابق G_2 هو بيان منتظم رؤوسه فردية (3) ودرجته (2)

سؤال آخر : برهن أن كل بيان من المرتبة $2 \leq n$ يملك على الأقل رأسين لهما نفس الدرجة .

البرهان : بفرض أن كل درجات رؤوس البيان متباينة ((مختلفة مثنى مثنى))

<أي نفرض جدلاً أنه أي لا يوجد عقدتين لهما نفس الدرجة >

وليكن : $v_1, v_2, \dots \dots, v_p$ هي المجموعة V ودرجات رؤوس البيان المرتبة تصاعدياً هي $\deg v_1 , \deg v_2 \ , \dots \dots , \deg v_p$

ولدينا : $0 \le \deg v \le p-1$ إذا أخذنا عقد مختلفة مثنى مثنى فإن درجات الرؤوس هي : $0 , 1 , 2, \dots \dots p-1$ وهذا تناقض ((لأن الرأس الذي درجته $p-1$ يتصل بجميع الرؤوس حتى الرأس الذي درجته 0)) وهذا ايضاً تناقض لأن الرأس الذي درجته 0 لا يتصل بأي رأس .

تنويه هذه الفقرة لم تعطى لكن الدكتور ذكر البيان الموجه فوجب التنويه عنه ^_^

عندما نقول بيان نقصد به البيان البسيط إلا إذا ذكر لنا غير ذلك .

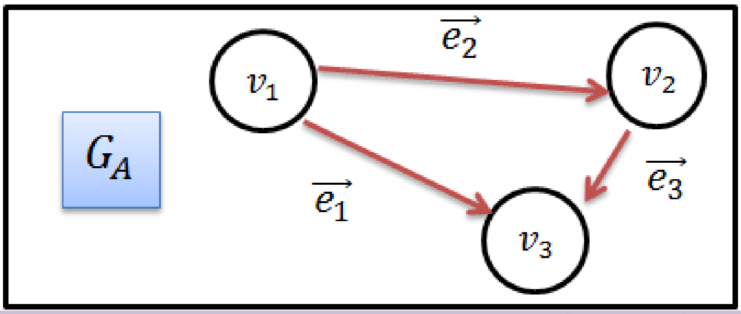
هناك نوع آخر من البيان وهو **البيان المُوجه**

تعريفه : هو بيان زودت أضلاعهُ باتجاهات ، والأضلاع الموجه هي عبارة عن أقواس

وبذلك يصبح الضلع عبارة عن قوس له عقدة بداية وعقدة نهاية . ويرمز له $\vec{G} = (V, \vec{E})$

- يمكن للبيان أن يكون موجهاً حتى وإن لم يكون بسيط ، كما أنه تستخدم في تخطيط الطرق والمواصلات في المدن .

$$\vec{e_1} = (\underbrace{v_1}_{\text{البداية}} \ , \ \underbrace{v_3}_{\text{النهاية}})$$



المتتالية الدرجية

ليكن G بيان و $V(G) = \{v_1, v_2, \dots \dots v_p\}$ وندعو المتتالية التالية :

$\deg v_1 \ , \deg v_2 \ , \dots \dots , \deg v_p$

متتالية درجية بحيث : $0 \le \deg v \le p-1$

تعريف : نقول عن المتتالية S من الأعداد الصحيحة غير سالبة أنها متتالية بيانية إذا وجد بيان G ومتتالية درجية هي S .

نظرية << $Havel - Hakim$ >>

الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية بيانية

$$S : d_1 , d_2 , \dots \dots d_p$$

حيث عناصر المتتالية S هي عبارة عن أعداد صحيحة غير سالبة بحيث

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_p \qquad ; \; d_1 \geq 1 \;, \qquad p \geq 2$$

هو أن تكون المتتالية التالية بيانية

$$S_1 : d_2 - 1, d_3 - 1, d_4 - 1, \dots \dots d_{d_1+1} - 1, d_{d_2+2}, \dots \dots d_p$$

بحيث :
$$\underbrace{d_1}_{\text{العنصر الأول}} = \underbrace{1}_{\text{مضاف له واحد}} + \underbrace{2}_{\text{دليل العنصر الأول}} - \underbrace{d_1 + 1}_{\text{دليل العنصر الأخير}}$$

شرح النظرية

لإثبات أن المتتالية التالية بيانية

$$S : d_1, d_2, \dots \dots d_p$$

نرتب عناصر المتتالية ترتيب تنازلي ، ثم نوجد S_1 فإذا كانت S_1 بيانية فإن S بيانية

وبالترتيب تنازلياً نجد : $S'_4 : 1,1,0,0$

نعيد الخوارزمية السابقة على S'_4 فنجد : $S_5 : 0,0,0$

إذاً S متتالية متباينة ولدينا ثلاث رؤوس منعزلة .

لنأخذ الأمثلة التالية :

مثال 1 : لتكن لدينا المتتالية التالية $S: 5, 4, 4, 3, 2$ هل S بيانية ؟؟

المتتالية المعطاة مرتبة تنازلياً ، وعدد رؤوسها الفردي زوجي ولكن العنصر الأول من المتتالية هو 5 أي يرتبط بخمسة رؤوس غيره ولا يوجد لدينا هنا سوى أربعة رؤوس إذاً المتتالية المعطاة ليست بياينة .

مثال ٢ : لتكن لدينا المتتالية $S : 5, 4, 4, 3, 2, 0$ هل S بيانية ؟؟

المتتالية المعطاة مرتبة تنازلياً ، وعدد الرؤوس الفردية في هذه المتتالية زوجي وبالتالي المتتالية تحقق شرط البيان .
إن العنصر الأول في المتتالية هو 5 يرتبط بخمسة رؤوس غيره وهي $\{4,4,3,2,0\}$ إذا نطرح منها واحد، وبالتطبيق نجد :

$$S: 5,4,4,3,2,0$$

$$S_1 : 3,3,2,1,-1$$

إن المتتالية المعطاة ليست متباينة وذلك لأن لا يوجد بيان درجة رأسه (-1)

مثال ٣ : هل المتتالية التالية متباينة ؟؟

$$S : 2,3,5,4,3,5,4,2$$

الحل :

أولاً : نرتب الأعداد تنازلياً

$$S : 5,5,4,4,3,3,2,2$$

ثانياً : نلاحظ أن عدد العناصر الفردية في هذه المتتالية زوجي

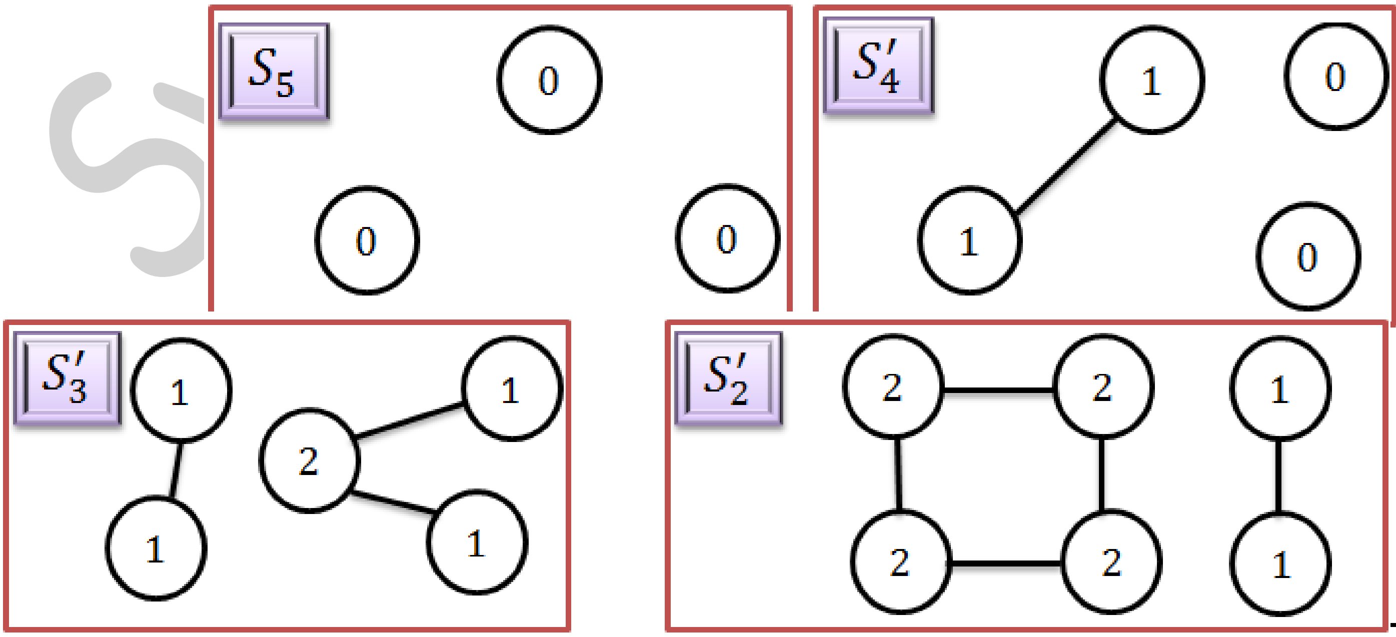
ثالثاً : إن العنصر الأول هو (5) إذ يرتبط بخمسة رؤوس غيره والتي هي $\{5,4,4,3,3\}$
ثم نطرح منها (1) وما تبقى من العناصر يبقى كما هو :

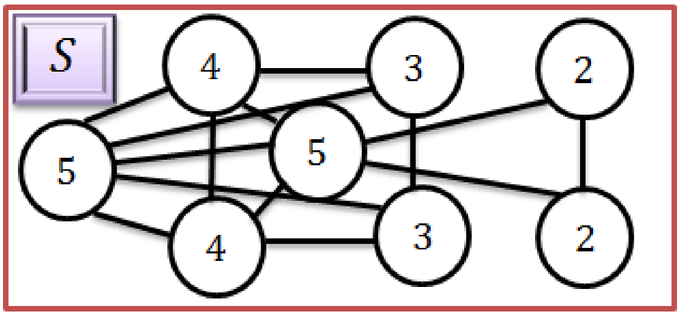
$S_1 : 4,3,3,2,2,2,2$
المتتالية S_1 مرتبة تنازلياً
نعيد تطبيق الخوارزمية السابقة على المتتالية S_1
العدد الأول هو (4) إذاً يرتبط بأربعة رؤوس غيره والتي هي $\{3,3,2,2\}$ ثم نطرح منها واحد وما تبقى من العناصر يبقى كما هو : $S_2 : 2,2,1,1,2,2$
نرتب S_2 تنازلياً فتصبح : $S'_2 : 2,2,2,2,1,1$
نعيد الخوارزمية السابقة ايضاً $S_3 : 1,1,2,1,1$
نرتب S_2 تنازلياً فتصبح : $S'_3 : 2,1,1,1,1$
نعيد الخوارزمية السابقة على S'_3 فنجد : $S_4 : 0,0,1,1$
وبالترتيب تنازلياً نجد : $S'_4 : 1,1,0,0$
نعيد الخوارزمية السابقة على S'_4 فنجد : $S_5 : 0,0,0$
إذاً S متتالية متباينة ولدينا ثلاث رؤوس منعزلة .

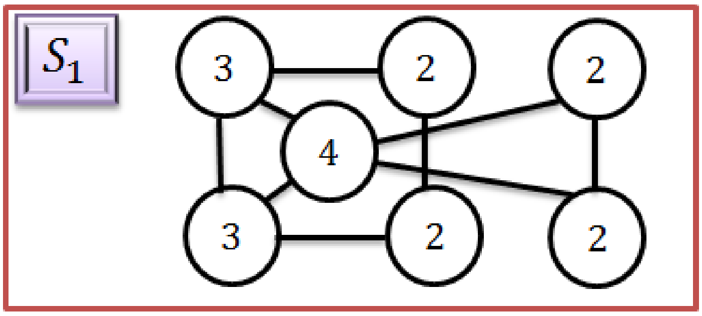
ملاحظة : نبدأ بالرسم من المتتالية S_i إلى المتتالية S

إن الرقم الذي ضمن الدائرة يمثل درجة الرأس .

رسمات المتتاليات البيانية







انتهت المحاضرة

إعداد: تقى إسماعيل

نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة: الثانية عنوان المحاضرة: البيان الجزئي

بسم الله وبالله المستعان ....لنبدأ بمحاضرتنا الثانية لمقرر نظرية البيان حيث سنتناول فيها ما يلي :

١) البيانات الجزئية وأنواعها ٢) المتتالية البيانية

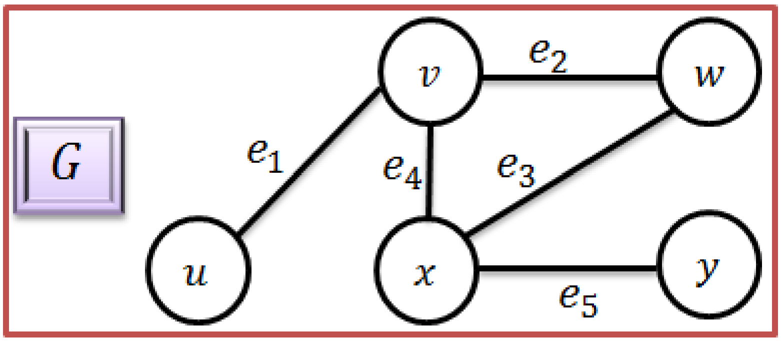
البيانات الجزئية

تعريف : ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V,E)$ والبيان $H = (V,E)$

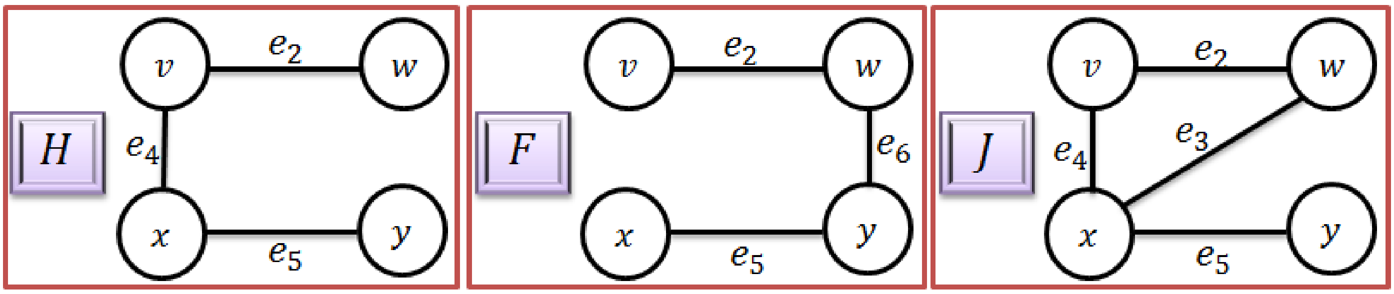
نقول عن البيان H أنه بيان جزئي من G إذا تحقق ما يلي :

١) $E(H) \subseteq E(G)$ ٢) $V(H) \subseteq V(G)$

مثال : ليكن لدينا البيان G المعطى كما يلي :



هل البيانات التالية هي بيانات جزئية من G ؟؟



$H(V,E)$ بيان جزئي من G لأن الشرط الأول محقق .

$$V(H) = \{v,w,x,y\} \subseteq V(G) = \{u,v,w,x,y\}$$

وإن الشرط الثاني محقق

$$E(H) = \{xy, xv, vw\} \subseteq E(G) = \{uv, vx, xw, xy, vw\}$$

$J(V,E)$ بيان جزئي من G لأن الشرط الأول محقق .

$$V(J) = \{v, x, y, w\} \subseteq V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

وإن الشرط الثاني محقق .

$$E(J) = \{xy, vw, xv, xw\} \subseteq E(G) = \{uv, vx, xw, xy, vw\}$$

إن $F(V,E)$ ليس بيان جزئي من G لأن الشرط الثاني غير محقق علماً أن الشرط الأول محقق.

$$e_6 = yw \notin E(F) \qquad \text{لكن} \qquad e_6 = yw \in E(G)$$

أنواع البيان الجزئي

أولاً) تعريف : لتكن S مجموعة غير خالية من $V(G)$ نعرف البيان الجزئي المولد بـ S هو أكبر بيان جزئي من G مجموعة رؤوسه S ونرمز له بـ $< S >$.
ونقول عن البيان H أنه بيان جزئي مولد إذا تحقق ما يلي $H =< S >$
بحيث S مجموعة جزئية ما من $V(G)$.

حسب المثال السابق

إن البيان $J(V,E)$ هو أكبر بيان جزئي من G لأن

$$V(J) = \{x, y, v, w\} =< S >$$

بحيث S مجموعة جزئية من $V(G)$ وبالتالي $J =< S >$ ، وبالتالي J أكبر بيان جزئي مولد من S .
إن $H(V,E)$ ليس بيان جزئي مولد من S لأن :

$$xw \in E(G) \qquad \text{لكن} \qquad xw \notin E(H)$$

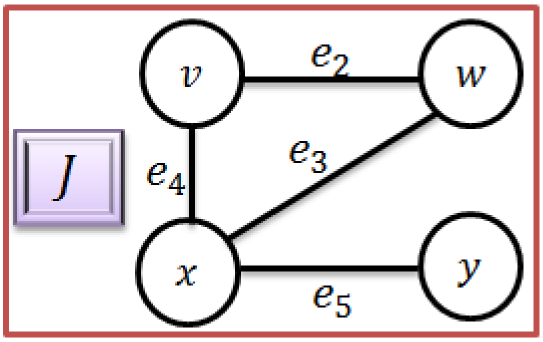
وبالتالي H ليس أكبر بيان جزئي من G .

ثانياً) تعريف : ليكن G بيان ، إن البيان الجزئي الناتج عن حذف مجموعة جزئية S من $V(G)$ هو بيان جزئي مجموعة الرؤوس $(V(G) - S)$ ومجموعة أضلاعه هي كل أضلاع G ما عدا الأضلاع التي تتصل برؤوس S وسنرمز له بـ $(G - S)$. ((أي إذا كانت $S = \{u\}$ سنكتب $(G - u)$))

مثال : ليكن لدينا البيان G من المثال السابق

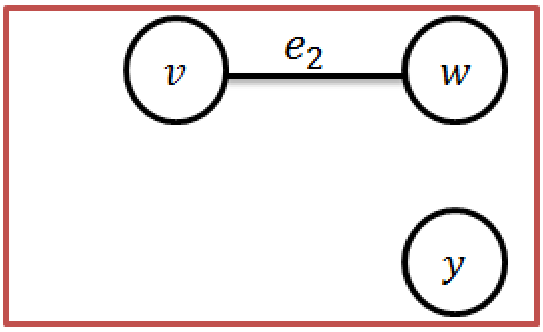
أوجد $G-\{e_3,e_5\}$, $G-\{e_1,e_2\}$, $G-\{v,w,y\}$, $G-\{u,x\}$, $(G-u)$

$G-u=J$



الشرح : حذفنا العقدة u وحذفنا منها الضلع $e_1=uv$ المتصل بالعقدة .

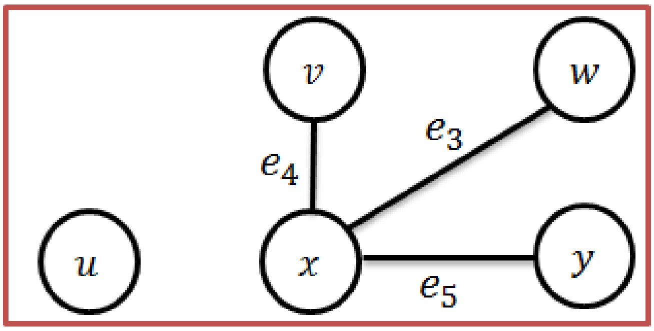
$G-\{u,x\}$



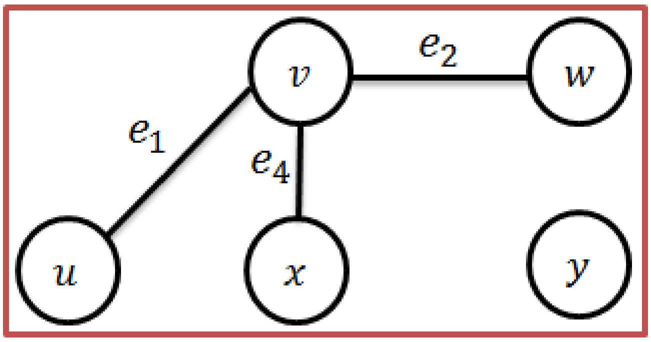
الشرح : عند حذف العقدة u والعقدة x نكون قد حذفنا الأضلاع $\{uv,vx,xw,xy\}$.

$G-\{v,w,y\}$

$G-\{e_1,e_2\}$



$G-\{e_3,e_5\}$



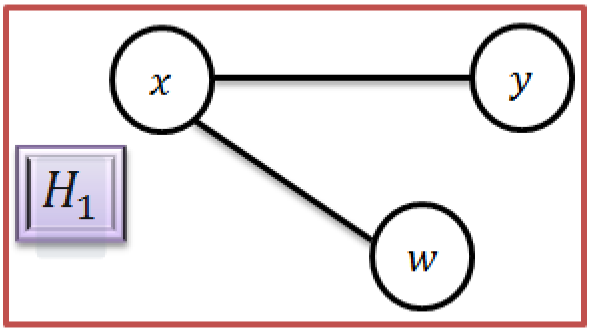
ثالثاً) تعريف : لتكن X مجموعة غير خالية من أضلاع البيان G نعرف البيان الجزئي المولد بــ X هو أصغر بيان جزئي من G مجموعة أضلاعه هي X وسنرمز له بــ $< X >$.

مثال : ليكن لدينا مجموعة أضلاع البيان $X = \{xw, xy\}$ أوجد البيان الجزئي المولد بـ X .

نفرض $H_1 =< X >$ بيان جزئي مولد بــ X وعقد البيان الجزئي H_1 هي : $V(H_1) = \{x, y, w\}$

أضلاع البيان الجزئي H_1 هي : $E(H_1) = X = \{xw, xy\}$

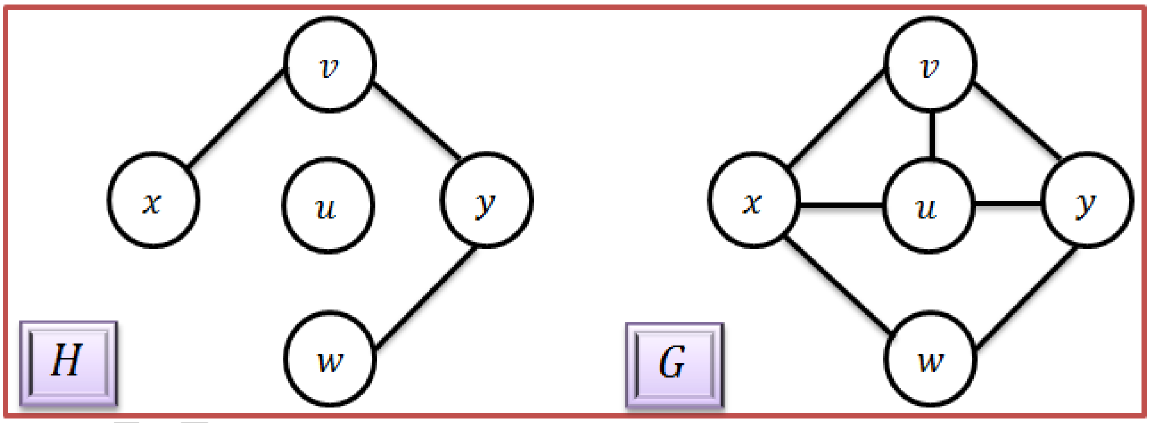
أصغر بيان جزئي أضلاعه X هو :



تعريف : نقول عن H من G أنه بيان جزئي مولد لــ G إذا كانت $V(H) = V(G)$.

أي أن " كل بيان جزئي مجموعة رؤوسه $V(H)$ تساوي عدد البيان الأصلي $V(G)$ هو بيان جزئي دون النظر إلى الأضلاع "

مثال : عن البيان H بيان جزئي من G



البيانات المترابطة (المتصلة) (connected graphs)

الطريق (walk)

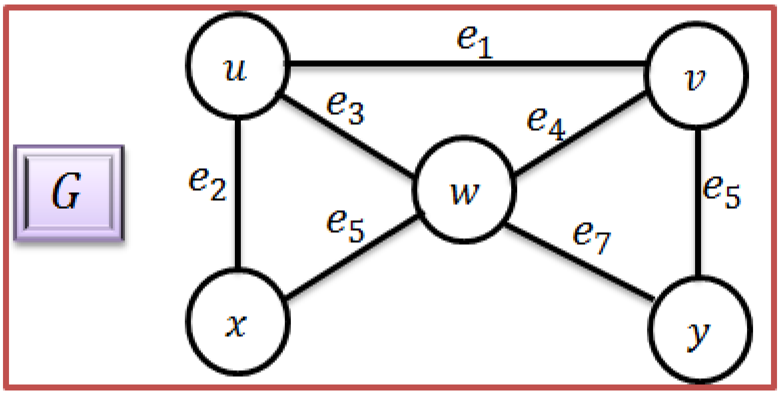
تعريف : نقول عن البيان $G(V, E)$ أنه طريق إذا وجد متتالية متناوبة من العقد والأضلاع وليكن

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots \dots e_n, v_n \quad \forall \ n \geq 2$$

w متتلية متناوبة ((أي مرة رأس ومرة ضلع)) ، وإن هذه المتتالية تبدأ برأس v_0 وتنتهي بالرأس v_n يعرف الضلع $i = 1,2, \dots . n$; $e_i = v_i v_{i-1}$ حيث e_i الضلع بين عقدتي المتتالية .

ملاحظة : قد تتكرر الرؤوس وقد تتكرر الأضلاع في الطريق .

مثال : ليكن G البيان الممثل بالشكل التالي :



فإن الطريق يكون :

$$W_1 : u, e_1, v, e_5, y, e_7, w, e_3, u, e_2, x$$

ومنه W_1 طريق .

السلسلة $(Traip)$

نعرف السلسلة بأنها طريق لا يتكرر فيه أضلاع ((وقد تتكرر فيه الرؤوس))

وليكن لدينا الطريق $W_2 : x, u, v, y, w, u$ من البيان G .
نستطيع أن نقول عنه سلسلة ، وذلك لعدم تكرار الأضلاع فيه

المسار $(Path)$

نعرف المسار على أنه الطريق الذي لا تتكرر فيه الأضلاع ولا تتكرر فيه الرؤوس .

كل مسار ⇐ سلسلة ⇐ طريق

$$Path \Rightarrow Traip \Rightarrow Walk$$

ولكن العكس ليس صحيح .

الحلقة $(cycle)$

هي طريق $v_0, v_1, \dots, v_n$ من الرؤوس المختلفة مثنى مثنى بحيث $(n \geq 3)$ ، وبما أن الرؤوس مختلفة فلا يوجد تكرار لها وبالتالي لا يوجد تكرار للأضلاع ، ويمكن التعبير عن الحلقة بأنها مسار مغلق ويكون $v_0 = v_n$ أي " رأس البداية يساوي رأس النهاية "

حالة خاصة عدد الرؤوس تساوي عدد الأضلاع

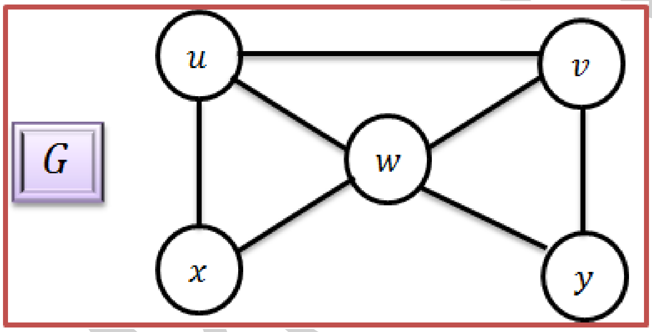
الدائرة $(circul)$

هي طريق يمكن أن يتكرر فيه الرؤوس ولا يتكرر فيه الأضلاع

ليكن u,v رأسين من البيان G ، نقول عن u أنه مرتبط (متصل) في v إذا وجد في G مسار $u-v$ " لا يمكن تكرار الرؤوس وبالتالي لا يمكن تكرار الأضلاع "

البيان المترابط

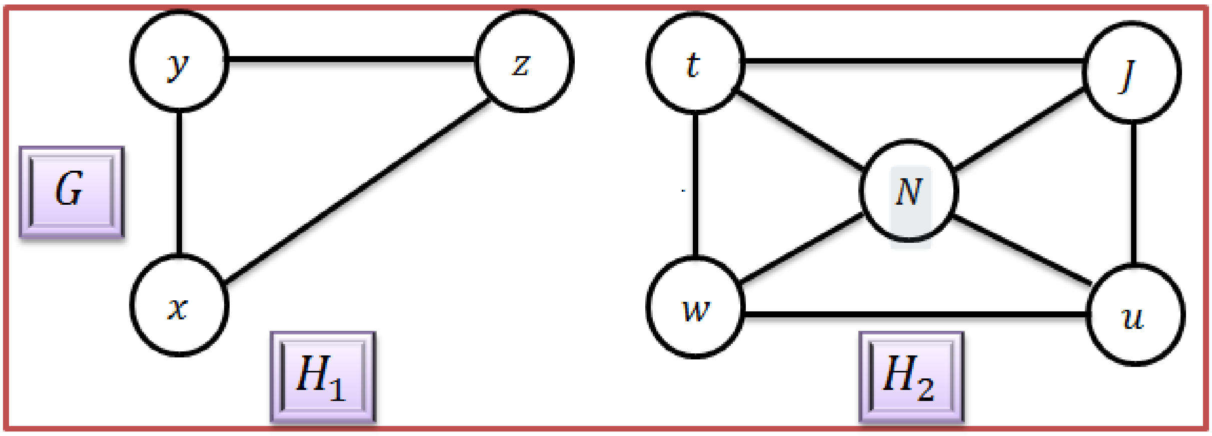
تعريف : نقول عن البيان G أنه مترابط إذا كان أي رأسين u,v من رؤوسه مرتبطين ومتصلين ، وإلا ندعو G غيرمترابط " أي نجد رأسين على الأقل لا يتصل بينهما أي مسار "
بالعودة إلى المثال السابق $G(V,E)$



نلاحظ أن : البيان G مترابط لأن جميع رؤوسه متصلة ومترابطة .

تعريف المركبة : نقول عن البيان الجزئي H من G أنه مركبة لـ G إذا كان H أكبر بيان جزئي مترابط في G .

مثال : يبين تعريف المركبة والترابط ، وليكن لدينا البيان $G(V,E)$



نلاحظ أنه يوجد في G مركبتين H_1 , H_2

H_1 : أكبر بيان جزئي مترابط لكنه لا يشمل G
H_2 : أكبر بيان جزئي مترابط ولكنه لا يشمل G
ولكن البيان G كاملاً ليس بياناً مترابطاً ، ونرمز لعدد مركبات البيان G بـ $K(G)$

$$G \text{ مترابط } \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{شرط الترابط}} K(G) = 1$$

وفي هذا المثال يكون $K(G) = 2$ أي أن البيان ليس مترابط .

تمرين وظيفة :

حدد قيم x بحيث تكون المتتالية التالية بيانية

$$x, 1,2,3,4,4,5$$

بحيث $x \in \mathbb{N}$: $0 \le x \le 5$

هناك دائماً اشخاص تنتظر تعثرك ومهما فعلت ستنتقدك على سبيل المثال.....ترتيب اسمك

هذا ما يسمى بـ " السفيه "

انتهت المحاضرة

إعداد : تقى إسماعيل

نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄المحاضرة: الثالثة عنوان المحاضرة: البيان الجزئي

بسم الله وبالله المستعان .... اهلا بكم وملائي في محاضرتنا الثالثة لمقرر نظرية البيان

نظرية : كل طريق $u-v$ يحوي مسار $u-v$

أي يجب إثبات أن كل طريق بداية u و نهاية v يحوي مسار
((طريق لا يحوي على أضلاع متكررة ولا رؤوس متكررة)) بدايته u ونهايته v .

البرهان : ليكن W الطريق $u-v$

نميز حالتين

١- إذا كانت العقدتين متساويتين أي $u=v$ ((أي الطريق W يبدأ بـ u وينتهي بـ u))
عندئذ الطريق W $u-v$ يحوي المسار التافه $u-u$ ويكون $W: u$
(مؤلف من عقدة واحدة وطوله صفر)

٢- إذا كانت العقدتين غير متساوتين $u \neq v$ نميز حالتين :

أ) إذا كان الطريق W $u-v$ " بدايته u ونهايته v " أي الطريق W لا يتكرر فيه الرؤوس وبالتالي لا تتكرر فيه الأضلاع ومنه الطريق $u-v$ هو مسار

ب) يوجد تكرار في الرؤوس ليكن الطريق w

$$W: u=u_1,u_2,\dots,u_i,u_{i+1},\dots,u_j,u_{j+1},\dots u_n=v$$

بما أنه يوجد لدينا رؤوس مكرره فنفرض $u_j=u_i$
وبالتالي نحذف عقدة واحدة ولتكن u_i والعقد الموجودة بين u_j,u_i
ومنه ينتج الطريق

$$W_1: u=u_1,u_2,\dots,u_{i-1},u_j,u_{j+1},\dots u_n=v$$

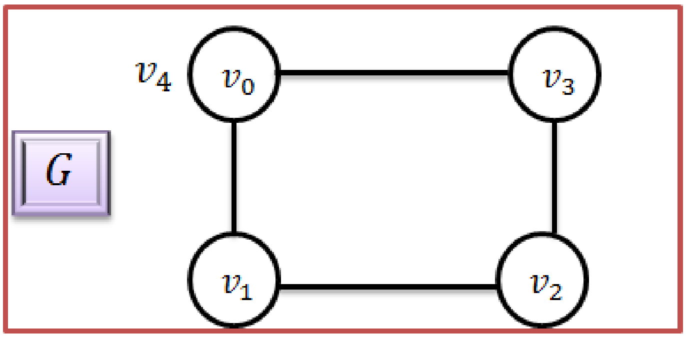
بالتالي حصلنا على الطريق الجديد $u-v$ طوله أصغر من طول W الأصلي
وبمتابعة الخوارزمية ذاتها حتى نحصل في النهاية على مسار $u-v$ او مسار تافه وبالتالي يتم المطلوب

مثال :

كل طريق مغلق فردي يحوي على حلقة فردية $(n \geq 3)$

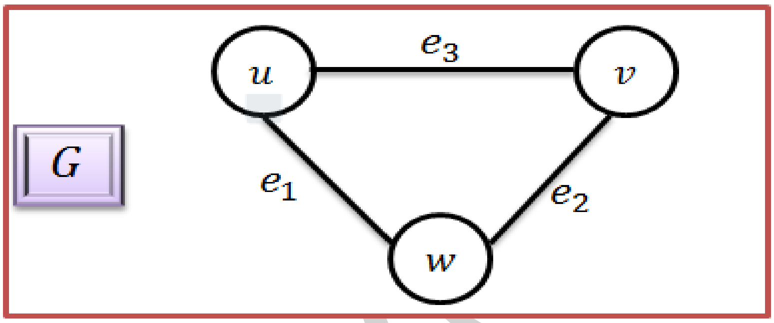
مثال : ليكن لدينا البيان G التالي :

$$k(G) = \delta(G) = \Delta(G) = 2$$



مثال : ليكن لدينا البيان G

$C: u, w, v, u$



لحلقة هي عبارة عن " مسار دائري مغلق "

من البيان G

تمرين :

ليكن G بيان من المرتبة $p \geq 2$ وبفرض أن $\delta(G)$ تحقق $\delta(G) \geq \frac{(p-1)}{2}$ برهن أن G مترابط

الحل :

نفرض جدلا أن G غير مترابط هذا يعني أن G يتألف من أكثر من مركبة تمثيلية بشكل دائري

بفرض أن D_1مرتبة G_1

بفرض أن D_2 مرتبة G_2

$$\forall v \in G \,;\, \deg v \ \geq \delta(G) \geq \frac{(p-1)}{2}$$

$$\forall v \in G_1 \, ; \; \frac{(p-1)}{2} \le \deg v \le p_1 - 1$$

$$\forall w \in G_2 \, ; \; \frac{(p-1)}{2} \le \deg w \le p_2 - 1$$

وبالجمع : $p - 1 = \frac{(p-1)}{2} + \frac{(p-1)}{2} \le p_1 + p_2 - 2$

$p - 1 \le p - 2$ وهذا تناقض

إذا الفرض الجدلي خاطئ أي أن G ترابط .

الرؤوس المفصلية

نقول عن الرأس v من رؤوس البيان البسيط G أنه رأس مفصلي إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$k(G - v) > k(G)$$

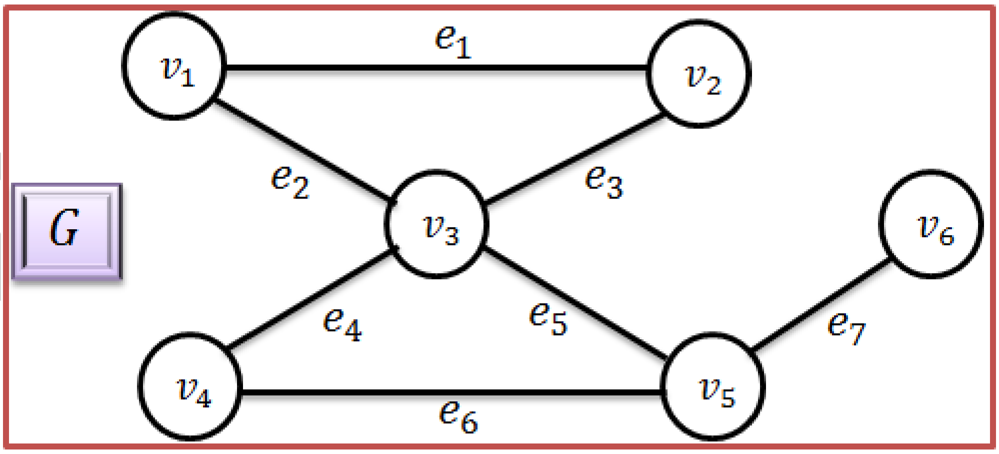
أي أن << عدد مركبات البيان $G - v$ أكبر من عدد مركبات البيان G >>

الجسور نقول عن الضلع e من أضلاع البيان G أنه جسراً إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$k(G - e) > k(G) = 1$$

بمعنى آخر : الجسر هو عبارة عن ضلع إذا حذفناه نحصل على بيان غير مترابط

مثال (1) : ليكن لدينا البيان البسيط G المعطى بالشكل :



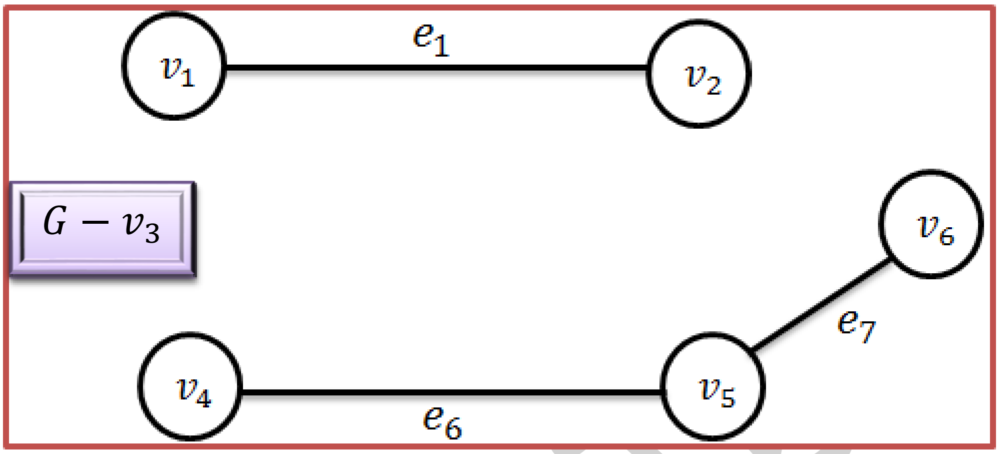
المطلوب : حدد الرؤوس المفصلية والجسور في البيان البسيط G المعطى .

الحل

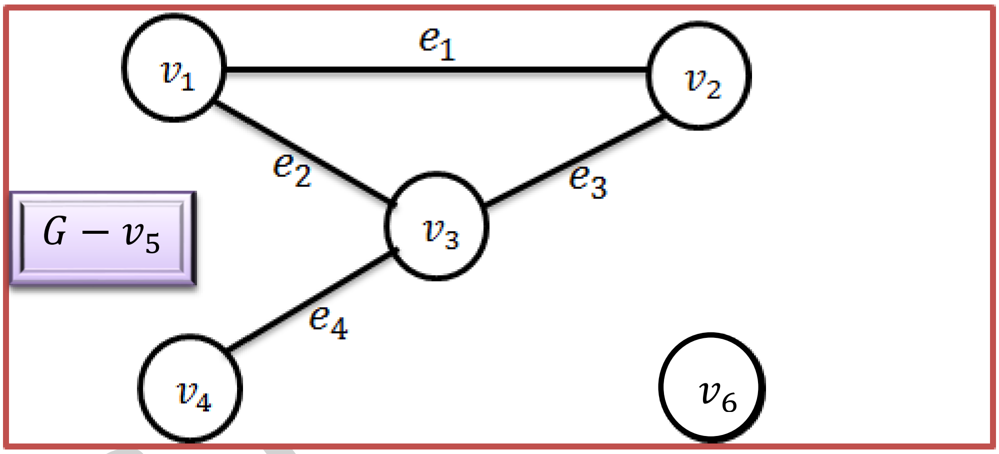
لإيجاد الرؤوس المفصلية علينا إيجاد رؤوس من البيان G تَقسِم G إلى أكثر من مركبة بحيث تصبح

$$k(G - v) > k(G)$$

الرؤوس المفصلية هي v_3 , v_5 لأن عند حذفهم سيصبح البيان G مركبتين وبالرسم يتضح الأمر



$$2 > 1 \Leftarrow k(G - v_3) > k(G)$$

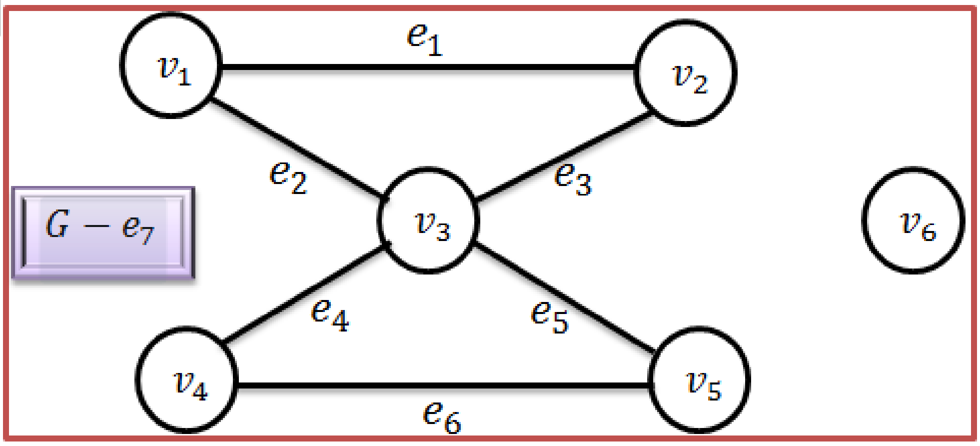


$$2 > 1 \Leftarrow k(G - v_5) > k(G)$$

كيفية إيجاد الجسور

لإيجاد الجسور في البيان G علينا إيجاد أضلاع من البيان G إذا قمنا بحذفها فإنها تَقسِم G لأكثر من مركبة عندها نقول عن الضلع أنه جسراً .

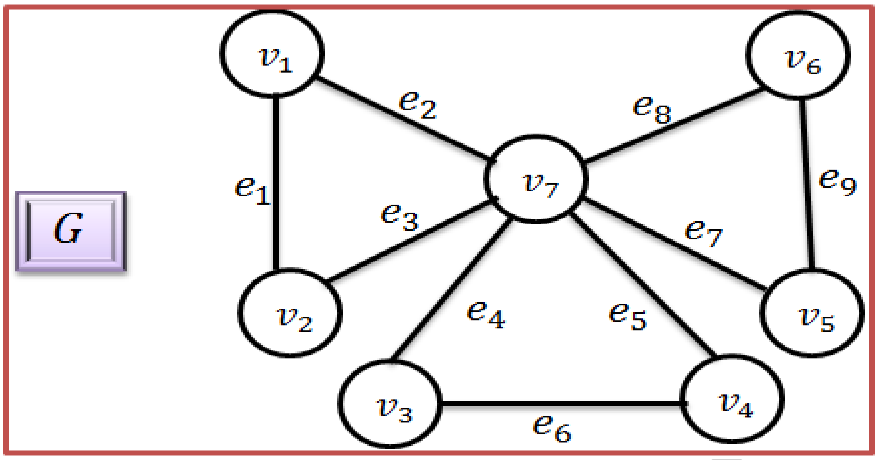
كما في المثال السابق البيان البسيط G نجد فيه أن الضلع $e_7 = v_5v_6$ هو جسراً



لأن

$$2 > 1 \Leftarrow k(G - v_5v_6\ ) > k(G)$$

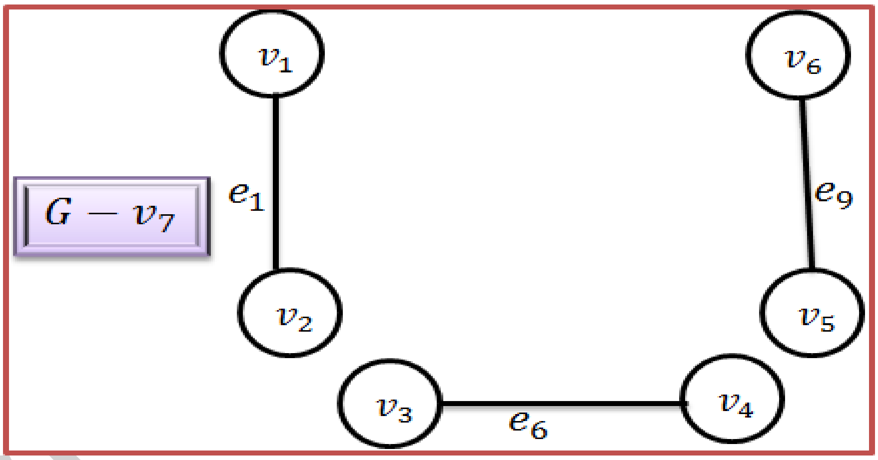
مثال (2) : ليكن لدينا البيان البسيط G المعطى بالشكل :



المطلوب : أوجد الرؤوس المفصلية والجسور .

الحل

الرأس المفصلي هو v_7 لأننا عندما نحذف سيصبح البيان G ثلاث مركبات



$$3 > 1 \Leftarrow k(G - v_7\ ) > k(G)$$

ولكن في البيان البسيط G المعطى لا يوجد أضلاع تمثل جسور لأن جميع الأضلاع تقع على الدائرة .

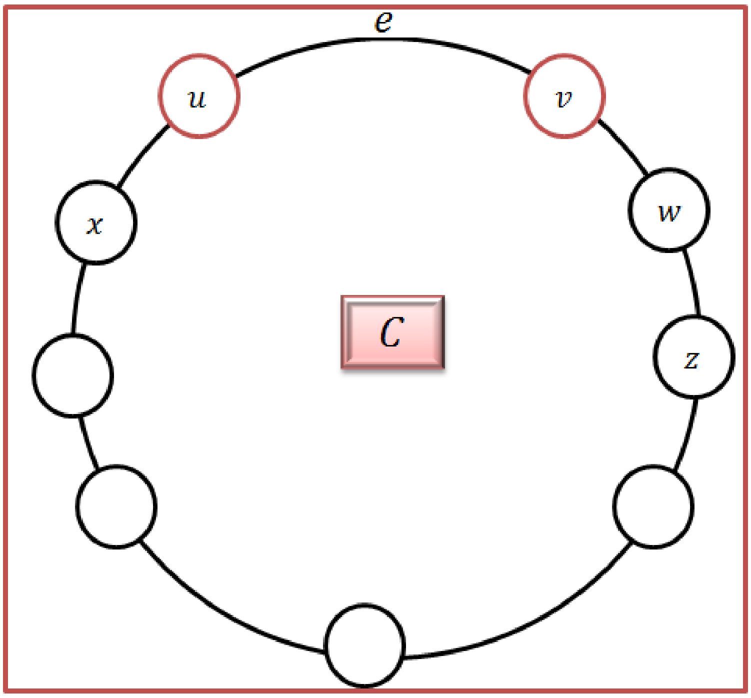
نظرية : ليكن البيان $G = (V, E)$ بيان بسيط ومترابط و $e \in E$ إن الضلع e هو جسراً إذا وفقط إذا كان الضلع e لا يقع في حلقة .

البرهان

نريد برهان أن الضلع e جسراً أي $k(G - e) > k(G)$ إذا وفقط إذا كانت e لا تقع على أي حلقة .

ليكن e جسراً في البيان G ولنفرض جدلاً أن $e = uv$ تقع على حلقة C

$$C : u, v, w, \dots \dots z, x, u$$



((لا ننسى أن w يلي v و x تسبق u))

علينا إثبات أن $G - e$ بيان مترابط

بعد حذف الضلع e من البيان G إن $G - e$

يحوي المسار $v - u$ وهو $u, x, \dots \dots, z, w, v$

لنختار u_1, v_1 رأسين في البيان $G - e$

وبما أن u_1, v_1 رأسين في G و G مترابط .

إذاً يوجد مسار $u_1 - v_1$ في G ولنرمز له بـ P .

ولنميز حالتين :

١) $e = uv$ لا يقع في P ومنه المسار P يقع في $G - e$

٢) $e = uv$ يقع في P لدينا شكلين

إما $u_1, u_2 \dots \dots u, v, \dots \dots v_1$ أو $u_1, u_2 \dots \dots v, u, \dots \dots v_1$

عندئذٍ في الحالة الأولى يكون لدينا المسار التالي :

$$P : u_1, \dots \dots u, x, \dots \dots w, v, \dots \dots v_1$$

وفي الحالة الثانية يكون لدينا المسار التالي :

$$P : u_1, \dots \dots v, w, \dots \dots x, u, \dots \dots v_1$$

ومنه $k(G - e) = k(G) = 1$ وهذا يعني أن البيان $G - e$ مترابط وهذا تناقض لأن e جسراً في G ومنه e لا يقع على حلقة

$(\Longrightarrow)$ بفرض أن $e = uv$ ضلع لا يقع على أي حلقة ولنثبت أن e جسراً في G ومنه إن $G - e$ لا يملك مسار $u - v$ لأننا لو فرضنا جدلاً أنه يملك مسار $u - v$ لكان البيان $G - e$ مترابط

وهذا تناقض لأن e لا يقع على أي حلقة حسب الفرض

إذاً $G - e$ لا يملك مسار $u - v$ ومنه $G - e$ غير مترابط إذاً $k(G - e) > k(G)$ ومنه $k(G - e) > 1$ إذا e جسراً في G

البيانات الخاصة

البيان التام : ليكن لدينا البيان $G = (V, E)$ نقول عن البيان G أنه تام إذا تحقق ما يلي :

$$\forall\, x, y \in V \;:\; \exists e = (x, y) \in E$$

أي يوجد ضلع بين أن عقدتين من البيان ((كل رأسين متصلين بضلع))

إذا كان p هي مرتبة G (($|V| = p$)) عندئذٍ $|E| = q = \frac{p(p-1)}{2}$ ونرمز للبيان التام بـ k_p

بحيث : $|V| = p$ هي قدرة الرؤوس و $|E| = q$ هي قدرة الأضلاع .

ملاحظة : البيان التام هو بيان منتظم .

المسار ذات المرتبة n :

ندعوه بمسار من المرتبة n ونرمز له ب p_n ونقول عن المسارأنه فردي أو زوجي حسب عدد أضلاعه

الحلقة ذات المرتبة n :

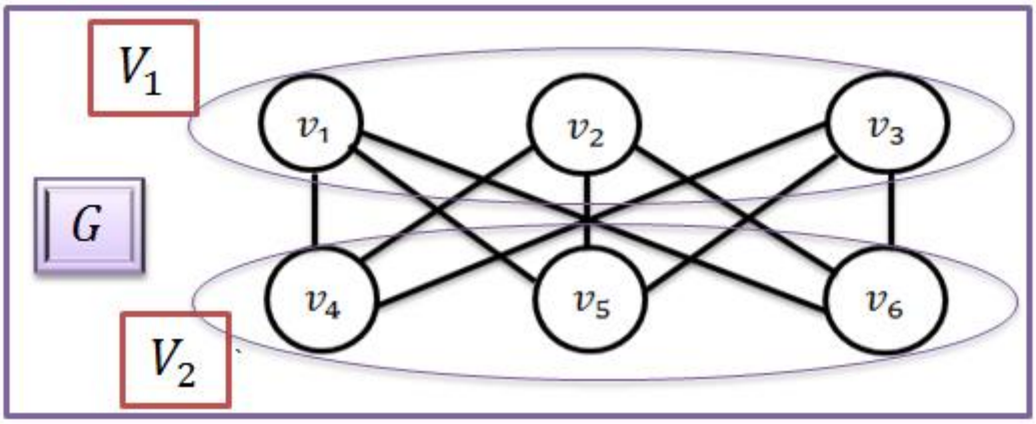
ندعوه بحلقة ذات المرتبة n حيث $(n \geq 3)$.

البيان الجزوء " ثنائي التجزئة "

نقول عن البيان G أنه بيان ذو جزئيين إذا أمكن تجزئة V إلى مجموعتين غير خاليتين V_1, V_2 كل ضلع من البيان يصل راسه من v_1 برأس من v_2

$$V = V_1 \cup V_2 \qquad , \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

مثال : ليكن لدينا البيان التام G المعطى بالشكل :



هل البيان G جزوء ؟

الحل

حتى يكون G جزوء يجب تحقق الشرطين :

$$V = V_1 \cup V_2 \quad , \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

أي $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$, $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ومنه نختار العقد غير المشتركة بالأضلاع .

ومنه $k_{3,3}$ جُزِء إلى جزئيين ، ويعني هذا الرمز بأن البيان تام فيه مجموعتين كل مجموعة يوجد فيها ثلاث رؤوس وكل رأس يتصل فيه ثلاث رؤوس .

وظيفة :

بفرض أن G بيان من المرتبة $3n$ و $D(G) = \{n , n+1 , n+2\}$

بين أن G يحتوي إما على الأقل n رأس من الدرجة n أو على الأقل $n+2$ رأس من الدرجة $n+1$, أو على الأقل $n+1$ رأس من الدرجة $n+2$,

انتهت المحاضرة

هناك قوم إذا مس النعال وجوهِهم شكت النعال بأي ذنب تصفع

إعداد : تقى إسماعيل

نظري

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة: الرابعة عنوان المحاضرة: الرؤوس المفصلية

نظرية :

الشرط اللازم والكافي كي يكون البيان غير التافه G ذو جزئيين (ثنائي التجزئة) إذا وفقط إذا كان G لا يحوي على حلقات فردية .

البرهان

G بيان ذو جزئيين $\Leftrightarrow$ يحوي حلقات زوجية .

ليكن G بيان ذو جزئيين ولنثبت أنه لا يحتوي على حلقات فردية

عندئذٍ يمكن تجزئة V إلى مجموعتين V_1, V_2 بحيث تحقق الشروط في التعريف وبفرض G يحتوي على حلقة ولتكن :

$$C_n : v_1, v_2, \dots \dots v_n, v_1$$

نريد إثبات أن G لا يحتوي حلقات فردية إذاً نثبت أن الحلقة زوجية أي n زوجي .

وذلك حسب خاصة الحلقة " نقول عن الحلقة أنها زوجية أو فردية حسب عدد الأضلاع "

بفرض $v_1 \in V_1$ وبما أن $v_1 v_2 \in E$ وإن G ذو جزئيين ومنه $v_2 \in V_2$ وبما أن $v_2 v_3 \in E$ فإن $v_2 \in V_2$ و $v_3 \in V_1$ ومنه نستطيع القول أن جميع الرؤوس ذات الأدلة الزوجية في V_2 والفردية في V_1 ، وبما أن $v_n v_1 \in E$ ضلع فإن $v_n \in V_2$ و $v_1 \in V_1$

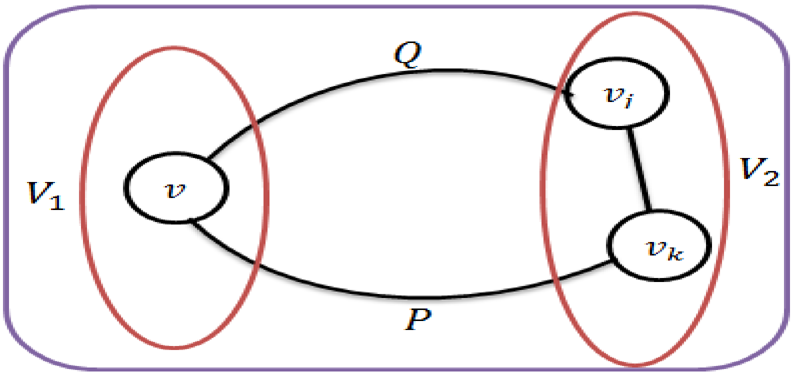
ومنه n عدد زوجي وبالتالي الحلقة زوجية ((تم المطلوب)) .

$(\Longrightarrow)$ بفرض أن G لا يحتوي على حلقات فردية علينا إثبات أن G ثنائي التجزئة

نفرض حالتين :

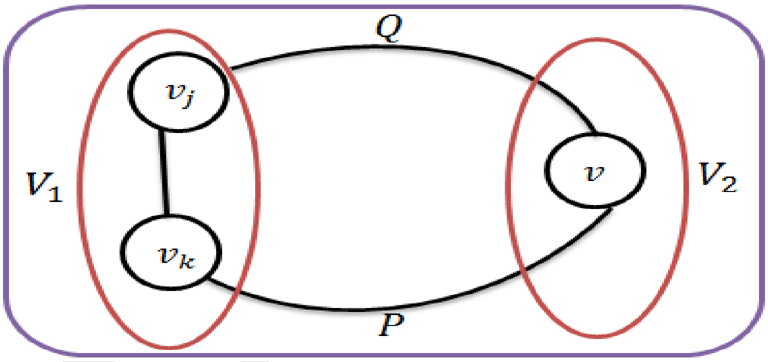
الحالة الأولى : G مترابط ولنأخذ v رأس من رؤوس G وبما أن G مترابط عندئذٍ يوجد مسار $v - v_1$ من أجل كل v_1 في G (ليس بالضرورة أن يكون المسار وحيد) نحاول تجزئة البيان إلى مجموعتين V_1, V_2 نعرف V_1 هي مجموعة مؤلفة من v وجميع الرؤوس v_1 التي تحقق أن المسار $v - v_1$ ذو الأقصر طول زوجي عندئذ $V_2 = V - V_1$

ونفرض e ضلع يصل الرأسين v_k و v_j في G وإذا فرضنا v_j, v_k تقع في V_2



عندئذ حسب التعريف لـ $V_١ , V_٢$ يوجد مسار $v - v_j$ ذو المسار الأقصر طول فردي ويوجد مسار $v - v_k$ ذو الأقصر طول فردي .
بحيث P مسار فردي + Q و مسار فردي + الضلع $e = v_j v_k$ يساوي حلقة فردية وبالتالي حصلنا على طريق مغلق فردي وكل طريق مغلق فردي يحوي مسار مغلق فردي إذا وفقط إذا كانت الحلقة فردية "سوف يتم برهانها "

وهذا تناقض مع الفرض إذاً G لا يحتوي على دوائر فردية وبالتالي G ثنائي التجزئة
وبفرض v_k, v_j تقع في $V_١$



بحيث P مسار زوجي + Q و مسار زوجي + الضلع $e = v_j v_k$ يساوي حلقة فردية وبالتالي حصلنا
عندئذٍ حسب التعريف $V_١, V_٢$ يوجد مسار $v - v_j$ ذو أقصر طول زوجي ويوجد مسار $v - v_k$ ذو الأقصر طول زوجي ومنه حصلنا على طريق مغلق فردي
وكل طريق مغلق فردي يحوي مسار مغلق فردي ومنه يكون المسار حلقة فردية .
وهذا تناقض وبالتالي G ثنائية التجزئة في حال G مترابط .

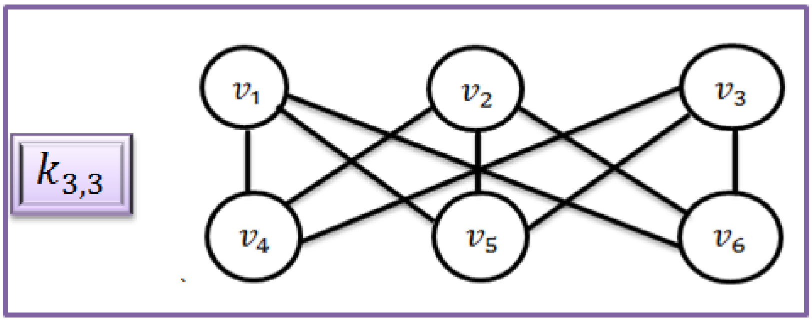
الحالة ثانية : G غير مترابط
عندئذٍ هو مؤلف من عدة مركبات $G_١, G_٢, \dots\dots, G_n$ أي $k(G) = n$
G_i بيان جزئي مترابط ولا يحوي على حلقة فردية لأن G لا يحوي على حلقات فردية ومنه كل G_i هو بيان ثنائي التجزئة .

ولتكن $V_i = U_i \cup W_i$ عندئذ G ثنائي التجزئة حيث

$$V = U \cup W \qquad ; U = \cup_{i=١}^{n} u_i \ \wedge \ W_i = \cup_{i=١}^{n} w_i$$

مثال : ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V, E)$ المعطى بالشكل التالي :

هل البيان التالي ثنائي التجزئة :



الحل :

نختار $v_1 \in v = 1$

ان الرؤوس المرتبطة ب v هي

$\{4,5,6\}$ وتقع $v_2 \in \{4,5,6\}$

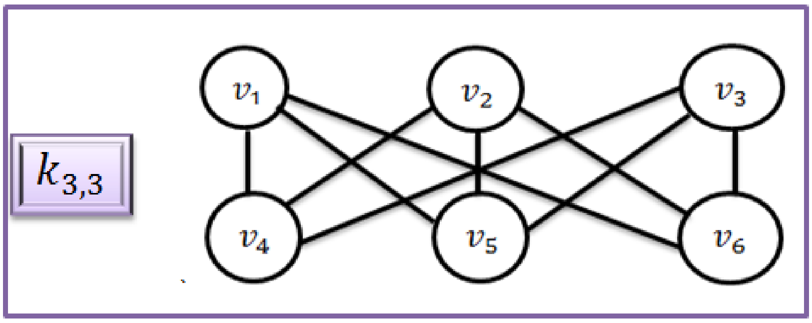
لا يوجد اتصالات بين عناصر $\{4,5,6\}$ ونجد أن $\{4,5,6\}$ متصلة ب $\{4,5,6\}$ ونجد أن ٢تتصل ب ٣إذن ليس ثنائي التجزئة

تعريف البيان ثنائي التجزئة :

نعرف البيان التام ثنائي التجزئة بأنه بيان التجزئة و V_1, V_2مجموعتي تجزئة بحيث كل رأس من المجموعة V_1 يتصل بجميع رؤوس المجموعة V_2 وبفرض أن :

$|V_1| = n \quad , |V_2| = m$ وسنرمز لهذا البيان بالرمز $k_{n,m}$

مثال : ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V, E)$ المعطى بالشكل التالي :



إن البيان $k_{3,3}$ بيان تام ثنائي التجزئة لأن كل رأس من المجموعة V_1 يتصل بجميع رؤوس المجموعة V_2

إن V_1 مجموعة تجزئة تحوي على ثلاث عقد $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$

وإن V_2 مجموعة تجزئة تحوي على ثلاث عقد $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$

البيان الجزوء إلى n جزء

نقول عن البيان G أنه جزوء إلى n جزء إذا أمكن تجزئة V إلى n مجموعة غير خالية $V_1, V_2, \dots \dots V_n$ بحيث يتحقق الشرطين :

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad , \quad V = \cup_{i=1}^{n} V_i \quad ; \forall \, i \neq j$$

$$\forall\, uv \in E(G)\,;\ \exists i,j\ ;\, i \neq j$$ بحيث $u \in V_i\ , v \in V_j$

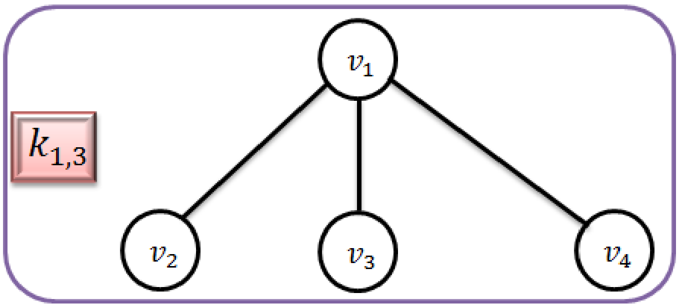
أي لا توجد أضلاع تقع في المجموعة الواحدة " V_i لا تحوي على أضلاع بين رؤوسها "

تعريف : نقول عن البيان G أنه جزوء إلى n جزء تام إذا كان V جزوء إلى n جزء $V_1, V_2, \dots\dots V_n$ وكل عنصر من V_i يتصل مع كل عناصر المجموعة V_j بحيث إذا كانت

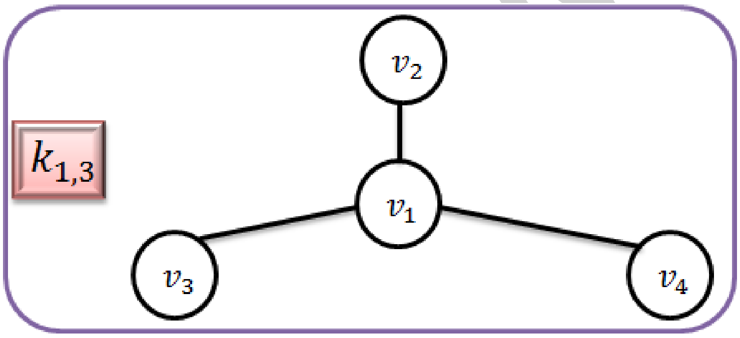
$\forall\, i \neq j :\ |V_i| = m_i \ \ ; i = 1,2,\dots\dots n$ ونرمز لهذا البيان بـ $k_{m_1,m_2,\dots\dots m_n}$

أمثلة

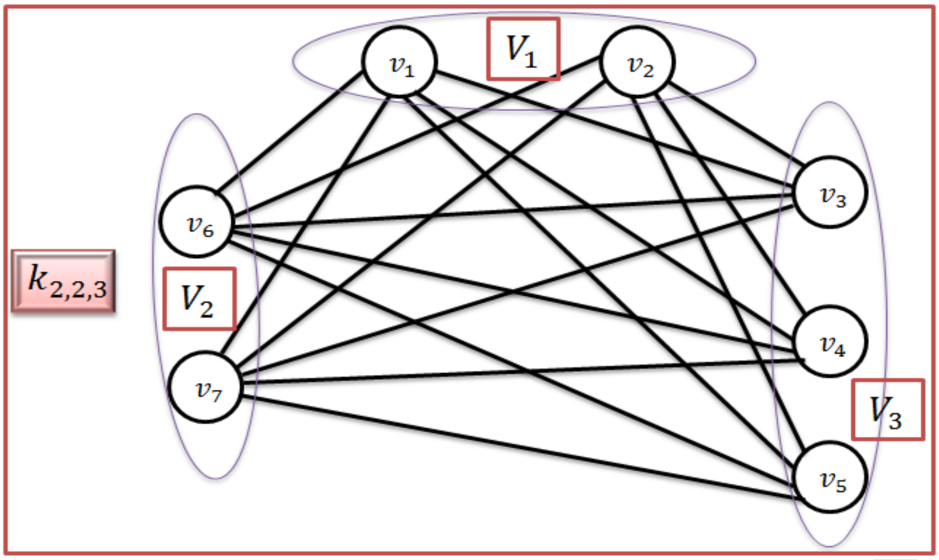
مثال (1) ليكن لدينا البيان التالي :



بيان ثنائي التجزئة " جزوء إلى مجموعتين "
المجموعة الأولى V_1 مكونة من عقدة واحدة $V_1 = \{v_1\}$
المجموعة الثانية V_2 مكونة من ثلاث عقد $V_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$
ويمكن تمثيل البيان بالمثال (١) بالشكل :



تعميم : يقال عن مثل هذه البيانات التي قدرة أحد مجموعاتها (١) والمجموعة الباقية قدرتها (n) " البيان النجمة "



مثال (2) ليكن لدينا البيان التالي :

البيان $k_{٢,٢,٣}$ بيان جزوء إلى ثلاث مجموعات تجزئة $\{V_١, V_٢, V_٣\}$

بحيث كل رأس من المجموعة الأولى يتصل بجميع الرؤوس للمجموعة الثانية و الثالثة

وكذلك الأمر بالنسبة للمجموعة الثانية و الثالثة .

علماً أن $V_١$ مجموعة مكونة من عقدتين $V_١ = \{v_١, v_٢\}$
و $V_٢$ مجموعة مكونة من عقدتين $V_٢ = \{v_٦, v_٧\}$
و $V_٣$ مجموعة مكونة من ثلاث عقد $V_٣ = \{v_٣, v_٤, v_٥\}$

ملاحظة : لا يوجد اتصال بين رؤوس المجموعة ذاتها .

تعريف : نقول عن البيانيين $G_١, G_٢$ أنهما إيزومورفيزمان إذا وجد تابع تقابل Ψ يحقق

$$\Psi : V(G_١) \longrightarrow V(G_٢)$$

ويحافظ على الخواص .

$$uv \in E(G_١) \Longrightarrow \Psi(u).\Psi(v) \in E(G_٢)$$

ونرمز لهذا بالرمز بـ $G_١ \cong G_٢$ " $G_١$ إيزومورفيزمي مع $G_٢$ "

انتهت المحاضرة

إعداد : تقى إسماعيل

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة : الخامسة   عنوان المحاضرة : الشجرة والغابة

بسم الله وبالله المستعان ....سنكمل معاً زملائي في هذه المحاضرة البيان الجزء، والعمليات على البيان وتمثيله على شكل مصفوفة إضافة إلى تعريف الاشجار والغابة

العمليات على البيان

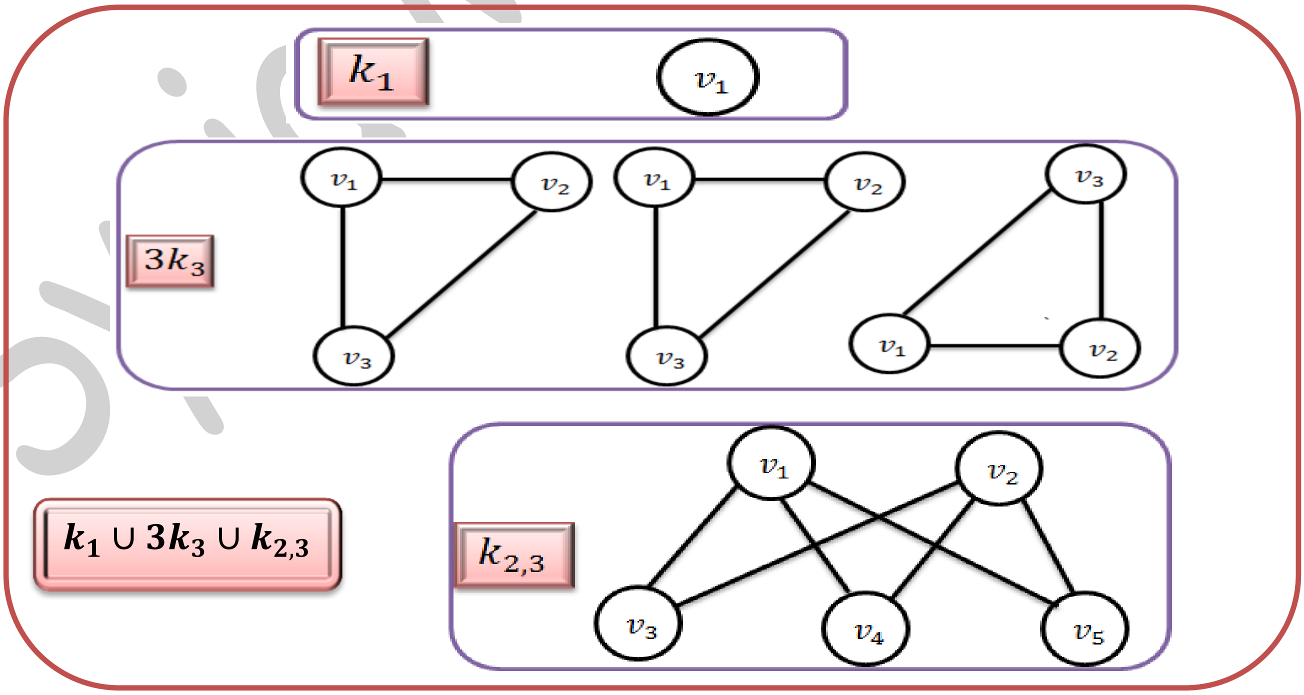
اجتماع بيانين : ليكن G_1, G_2 بيانين منفصلين نعرف اجتماع بيانين إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) \quad , \quad E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$$

ونرمز له بالرمز $G_1 \cup G_2$ ، إذا كان $G_1 \cong G_2 \cong G$ فإن $G_1 \cup G_2 \cong 2G$
إذاً إن البيانين إيزومورفيزمان مع بعضهما نستطيع كتابتهم $2G$

تعميم : إذا كان $G_1 \cong G_2 \ldots \ldots \cong G_n$ تكتب nG

مثال



$k_{١}$ بيان مكون من مجموعة واحدة وعقدة واحدة .

$K_{٣}$٣بيان تام مكون من مجموعة واحدة ويحوي ثلاث عقد ومكرر ثلاث مرات

$K_{٢,٣}$ بيان مكون من مجموعتين $V_{١}=\{v_{١},v_{٢}\}\,,V_{٢}=\{v_{٣},v_{٤},v_{٥}\}$ لا يوجد ضلع بين المجموعة

جمع بيانين : ليكن لدينا $G_{٢}\,,G_{١}$ بيانين منفصلين نرمز لجمعهما بـ $G_{١}+G_{٢}$ بحيث :

$$V(G_{١}+G_{٢})=V(G_{١})\cup V(G_{٢})$$

و $E(G_{١}+G_{٢})$ تمثل مجموعة أضلاع $G_{٢}\,,G_{١}$ مضافاً إليها مجموعة الأضلاع التي تصل $V_{١}$ بـ $V_{٢}$

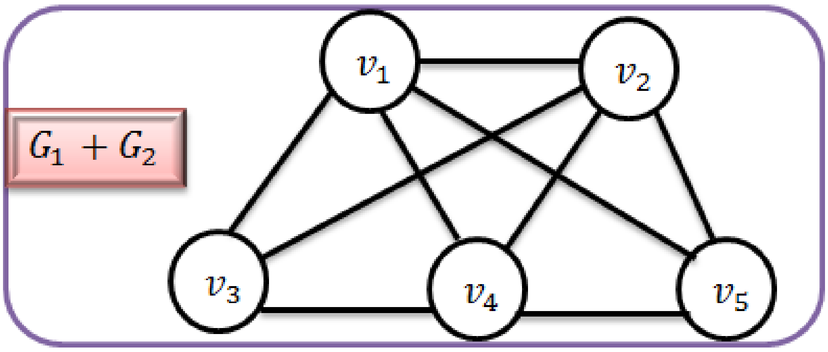
مثال ليكن لدينا البيانين التاليين :

المطلوب : أوجد $G_{١}+G_{٢}$ بالرسم .

الحل

إن $G_{١}$ مسار طوله (٢) زوجي ، و $G_{٢}$ مسار طوله (١) فردي .

فإن الشكل يكون كالآتي :



الجداء الديكارتي: ليكن لدينا $G_{٢}\,,G_{١}$ بيانين منفصلين نعرف الجداء الديكارتي $G_{٢}\,,G_{١}$ هو بيان مجموعة رؤوسه $V(G_{١})*V(G_{٢})$

$$V(G_{١})*V(G_{٢})=\{(u_{١},u_{٢})\;:u_{١}\in v(G_{١}),u_{٢}\in v(G_{١})\}$$

نقول عن رأسين $(v_{١},v_{٢})\,,(u_{١},u_{٢})$ أنهما متصلين اذا تحقق :

$$١-\;u_{١}=v_{١}\qquad,u_{٢},v_{٢}\in E(G_{٢})$$

$$٢-u_{١}=v_{١}\qquad,u_{١},v_{١}\in E(G_{١})$$

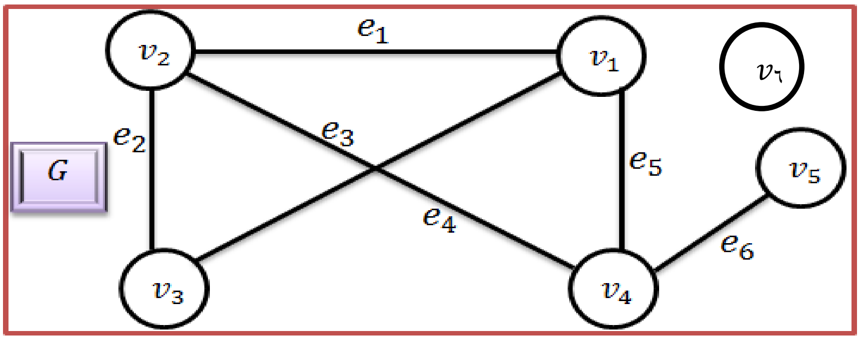
تمثيل البيان على شكل مصفوفات

مصفوفة التأثير : هي مصفوفة اسطرها تمثل الروس وأعمدتها تمثل الاضلاع تحسب عناصرها كما يلي

$$a_{ij} = \begin{cases} ١ & \text{إذا كان } v_i \text{ طرفاً للضلع } e_j \\ ٠ & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

((أي هي علاقة رأس بضلع))

مثال ليكن لدينا البيان الممثل بالشكل :



أوجد مصفوفة التأثير للبيان السابق

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	١	٠	١	٠	١	٠
v_2	١	١	٠	١	٠	٠
v_3	٠	١	١	٠	٠	٠
v_4	٠	٠	٠	١	١	١
v_5	٠	٠	٠	٠	٠	١
v_6	٠	٠	٠	٠	٠	٠

نقول عن المصفوفة السابقة بأنها مصفوفة التأثير للبيان G

نستنتج : إن الأضلاع التي يتصل بها رأس نعطيها القيمة (١) أما الأضلاع التي لا تتصل بأي رأس نعطيها القيمة (٠) .

إذا كانت قيم السطر جميعها تساوي الصفر فإن الرأس منعزل مثل الرأس v_6 رأس منعزل

إذا كانت قيم السطر جميعها تساوي الواحد فإن الرأس طرفي .

مصفوفة التجاور : هي مصفوفة اسطرها واعمدتها تمثل الرؤوس

تمثل عناصرها بالشكل :

$$a_{ij} = \begin{cases} ١ & v_i v_j \in E(G) \\ ٠ & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

((أي هي علاقة رأس برأس))

ملاحظة : إن عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة الارتباط أصفار

أي $a_{ii} = ٠ \quad ; i = ١, \dots \dots n$

لأن لدينا البيانات بسيطة أي لا يوجد عرًى ولا أضلاع مضاعفة .

وبالتالي مصفوفة الارتباط هي مصفوفة متناظرة لأنه إذا كانت v_i تتصل مع v_j فإن v_j تتصل مع v_i

مثال : ليكن لدينا البيان البسيط G المعطى في المثال السابق
فإن تمثيل مصفوفة الارتباط يكون من الشكل :

	$v_١$	$v_٢$	$v_٣$	$v_٤$	$v_٥$	$v_٦$
$v_١$	٠	١	١	١	٠	٠
$v_٢$	١	٠	١	١	٠	٠
$v_٣$	١	١	٠	٠	٠	٠
$v_٤$	١	١	٠	٠	١	٠
$v_٥$	٠	٠	٠	١	٠	٠
$v_٦$	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبالتالي المصفوفة متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي

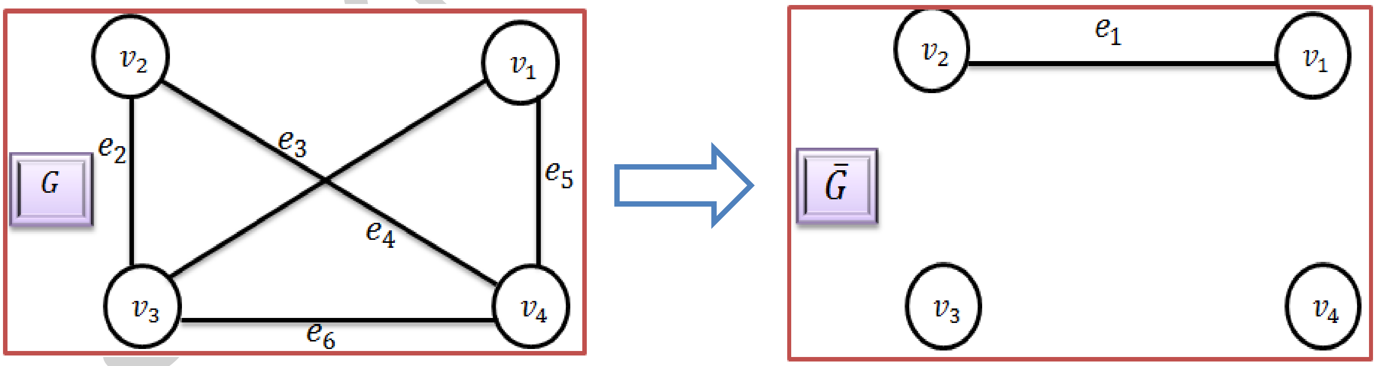
ملاحظة : إن مجموع عناصر السطر الأول يمثل درجة العقدة الأولى ، أي مجموع عناصر كل سطر تمثل درجة العقدة

البيان المتمم : ليكن لدينا البيان البسيط G نعرف البيان المتمم G إذا كان $V(G) = V(\bar{G})$ ويحقق ما يلي :

$$\forall\, uv \in E(G) \Rightarrow uv \notin E(\bar{G})$$
$$\forall\, uv \notin E(G) \Rightarrow uv \in E(\bar{G})$$

ونرمز للبيان المتمم بالرمز $\bar{G}$.

أوجد البيان المتمم للبيان G .



ملاحظة : ١) إن البيان التام متممه الأضلاع فقط .

٢) $\underbrace{\deg v}_{G \text{ في}} + \underbrace{\deg v}_{\bar{G} \text{ في}} = p - ١$ ((إذاً درجة العقدة v في G ومتممه $\bar{G}$ هو $p - ١$))

٣) $G + \bar{G} = k_p$

مثال

ليكن لدينا G بيان مرتبته p و v رأس من رؤوس البيان G بحيث $\deg v = n \quad ; n \le p - ١$

أوجد $\deg v$ في البيان المتمم $\bar{G}$

الحل

ليكن v رأس من V ولدينا من نص السؤال $\deg v = n$ في البيان G
ولنفرض ان $\deg v = m$ في البيان المتمم $\bar{G}$
ولنوجد m من الملاحظة(٢) السابقة نجد $n + m = p - ١$
$\Longrightarrow m = p - ١ - n$

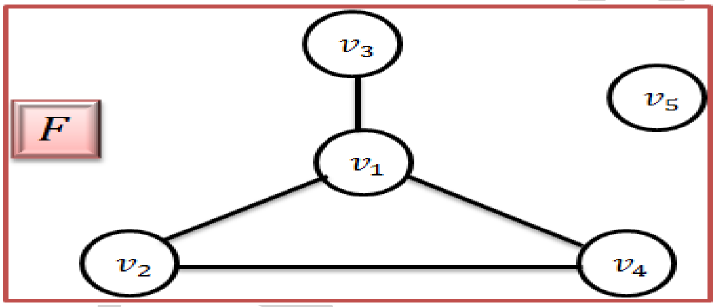
مثلاً : إذا كانت $\deg v = ٠$ في G فإن $\deg v = p - ١$ في $\bar{G}$ المتمم .

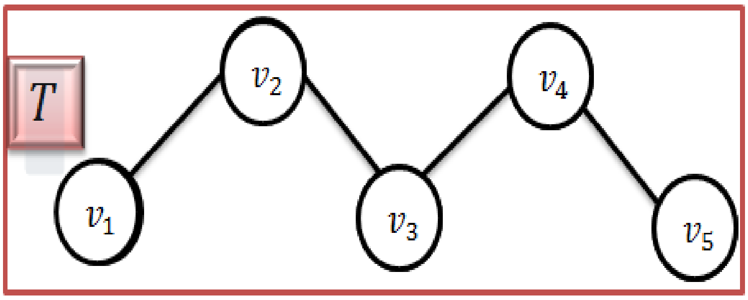
الأشجار والغابة

تعريف الغابة : نقول عن البيان G أنه غابة إذا كان لا يحتوي على حلقات ((غير مترابط))

تعريف الشجرة : نقول عن البيان G أنه شجرة إذا وفقط إذا كان G بيان مترابط ولا يحوي حلقات

ليكن لدينا البيانات التالية :





إن البيان F غير مترابط ولا يحوي على حلقات إذاً F غابة وليست شجرة
والبيان T بيان مترابط ولا يحتوي على حلقات وبالتالي البيان T شجرة وغابة

ملاحظة : كل شجرة هي غابة والعكس غير صحيح بالضرورة .

الاستقراء الرياضي

هي طريقة لأثبات صحة القضية $P(n)$ بحيث $n \ge n_٠$

١) نثبت صحة العلاقة من أجل $n = ١$ أو $n = n_٠$ أي قيمة ابتدائية

٢) نفرض صحة العلاقة من أجل $n = k$

٣) نثبت صحة القضية " العلاقة $P(n)$ " من أجل $n = k + 1$

الاستقراء الرياضي القوي

هي طريقة لأثبات صحة القضية $P(n)$ بحيث $n \geq n_0$

١) $P(n_0)$ صحيحة " من أجل أي قيمة ابتدائية "

٢) نفرض $P(i)$ صحيحة $k \geq i \geq n_0$ ونثبت صحتها من أجل $k + 1$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n \geq n_0$

٣) لأثبات المسألة من أجل $k + 1$ احتجنا $k - i_0$
يجب أن تتحقق $k - i_0 \geq n_0 \Rightarrow k \geq n_0 + i_0$
يجب أن تتحقق القضية من أجل n_0 إلى $n_0 + i_0$

ملاحظة : جميع المسائل التي تحل بالاستقراء الرياضي ممكن حلها بالاستقراء الرياضي القوي ((ولكن العكس غير صحيح))

مثال : يمكن أثباته بالاستقراء القوي و لا يمكن أثباته بالاستقراء الرياضي العادي .

برهن أن كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكتب على شكل جداء منته من الأعداد الأولية أو على شكل عدد أولي

الحل

من أجل القضية الابتدائية $n = 2$ محقق

نستخدم الاستقراء الرياضي القوي نفرض صحتها من أجل $n = k$ ولنثبت صحتها من أجل $n = k + 1$ جداء عدد منته من الأعداد الأولية

١) نميز حالتين $n = k + 1$ عدد أولي . ((تم المطلوب))

٢) $n = k + 1$ ليست بعدد أولي .

$$k + 1 = a.b \quad ; \quad a, b \in N$$

$$1 < a < k \quad , \quad 1 < b < k$$

حسب فرض الاستقراء الرياضي القوي

a جداء عدد منته من الأعداد الأولية و b جداء عدد منته من الأعداد الأولية

$n = k + 1$ جداء عدد منته من الأعداد الأولية

بطريقة الاستقراء الرياضي العادي لا يمكن أن يبرهن

نظرية : إن الشجرة من المرتبة p تملك حجم قدره $p-١$ أي $|q| = p - ١$ عدد الأضلاع

البرهان

لنبرهن النظرية باستخدام الاستقراء الرياضي القوي على p القضية محققة من أجل $k_١$ وهي شجرة تافهة إذا كان $q = ٠$, $p_١ = ١$ فإن $v_١$: $k_١$ وبالتالي تم المطلوب .

لنفرض صحتها من أجل $k \geq ٢$

أي بفرض أن جميع الأشجار من المرتبة التي لا تتجاوز k تحقق القضية المطلوبة

ولتكن T شجرة من المرتبة $p = k$ وعدد أضلاعه q وليكن e ضلع من شجرة T ومنه e جسر في T (لأن T لا تحوي حلقات عندئذٍ كل ضلع منها هو جسر) وحسب مبرهنة سابقة اي جسر لا يقع على حلقة عندئذٍ $T - e$ هي غابة ومؤلفة من مركبتين " شجرتين " $T_i = i = ١,٢$ لأن $k(G-e) > k(G)$ ولتكن p_i عدد رؤوس T_i و q_i عدد أضلاع T_i وذلك أياً كانت $i = ١,٢$

نجد أن : $p_i < k$ ((قسمنا الشجرة إلى قسمين $p_١, p_٢$))

حسب الفرض الاستقرائي $q_i = p_i - ١ \quad ; \quad \forall i = ١,٢$

$$\underbrace{p}_{\text{شجرة الأصل}} = \underbrace{p_١}_{\text{شجرة } T_١} + \underbrace{p_٢}_{\text{شجرة } T_٢} \quad , \quad q = q_١ + q_٢ + \underbrace{١}_{\text{الضلع الذي تم حذفه}} \quad \ldots (*)$$

وبتعويض $(*)$ في $q_i = p_i - ١$ نجد :

$$q = p_١ - ١ + p_٢ - ١ + ١ = p - ١$$

وبالتالي تم المطلوب .

نتيجة : ليكن G بيان من المرتبة P عندئذٍ القضايا التالية متكافئة :

١) G شجرة
٢) G بيان مترابط وحجمه $q = P - ١$
٣) G له حجم $P - ١$ ولا تحتوي على حلقات .

البرهان

(($1 \to 2$)) G شجرة إذا وفقط إذا كان G مترابط ولا يحتوي على حلقات ((حسب نظرية سابقة))
وبالتالي G شجرة من المرتبة P ومنه حجمها $q = P - ١$

(($2 \to 3$)) من الفرض لدينا G مترابط وحجمه $P - ١$ " محقق "
((علينا إثبات أن G لا يحتوي على حلقات)) فنفرض جدلاً أن G يحتوي على حلقة واحدة على الأقل
ولتكن C وبالتالي :

$$\forall\, v \in C \Longrightarrow deg\, v \geq ٢$$

نقوم بتطبيق الخوارزمية التالية

نقوم بحذف كل رأس v درجته $deg\, v = ١$ وبالنهاية سنحصل على بيان G' من المرتبة P' وحجمه q'
بعملية الحذف نقوم بحذف "رأس مع ضلع "وبالنهاية سنحصل على البيان G' من المرتبة P' و الحجم q'

$$q = P - ١ \Longrightarrow q' = P' - ١$$

$\forall\, v \in V(G') \Longrightarrow deg\, v \geq ٢$ ((لأننا حذفنا جميع الرؤوس التي درجتها (١)))

وبالتالي :

$$\sum_{v\in V(G')} \deg v = ٢q' = ٢P' - ٢ \;\ldots\ldots (١)$$

وايضاً من جهة أخرى لدينا $deg\, v \geq ٢$ وبما أن البيان من المرتبة P' فنجد :

$$\sum_{v\in V(G')} \deg v \geq ٢P' \;\ldots\ldots (٢)$$

وبالتالي من (١) و (٢) نجد $٢P' - ٢ \ngeq ٢P'$ وبالتالي هذا تناقض " إذاً G لايحتوي على حلقات "

((3 → 1)) الفرض : G له حجم $q = P - ١$ ولا يحوي على حلقات .

الطلب : G شجرة أي علينا إثبات أنها مترابطة ولا تحوي حلقات

ولنفرض جدلاً أن G غير مترابط ، عندئذٍ يتألف G من عدة مركبات (كل مركبة مترابطة)

$$G_١, G_٢, \ldots\ldots G_k \quad ; k \geq ٢$$

ليكن لدينا G_i بحيث $١ \leq i \leq k$ بيان مترابط ولا يحوي على حلقات ومنه $G_i\, ; i = ١, \ldots k$ شجرة
((G_i لا يحوي على حلقات لأن G لا يحوي على حلقات وأي جزء منه لا يحوي على حلقات))

بفرض أن مرتبتها P_i وحجمها q_i عندئذٍ $q_i = P_i - ١$ حيث $i = ١, ٢, \ldots\ldots, k$
بأخذ المجموع للطرفين نجد :

$$\sum_{i=١}^{k} q_i = \sum_{i=١}^{k} (P_i - ١) = \sum_{i=١}^{k} P_i - \sum_{i=١}^{k} ١$$

بحيث $\sum_{i=١}^{k} ١$ مكررة k مرة .

$$\Longrightarrow q = P - k \neq P - ١ \qquad ; \;\; k \geq ٢$$

وهذا تناقض للفرض ومنه " G مترابط ولا يحوي على حلقات وبالتالي G شجرة " .

نظرية (2) :

كل شجرة غير تافهة تحوي على الأقل رأسين طرفيين " درجته (١) "

الإثبات

لتكن T شجرة غير تافهة ، ولتكن $d_١, d_٢ \dots \dots, d_P$ درجات رؤوسها بحيث

$$d_١ \leq d_٢ \leq \dots \dots \leq d_P$$

ونفرض جدلاً أن الأمر غير صحيح (أي يوجد على الأكثر رأس واحد طرفي " درجته (١)")

وبالتالي يكون لدينا $d_٢ \geq ٢ \quad \wedge \quad d_١ \geq ١$

لا يمكن للدرجات أن تساوي الصفر لأن البيان G مترابط .

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq ١ + \sum_{v \neq v_١} \deg v_١ \geq ١ + ٢(P - ١) = ٢P - ١ \dots \dots (١)$$

إن $\sum_{v \neq v_١} \deg v_١$ تعني ((باقي درجات الرؤوس التي درجاتهن أكبر أو تساوي (٢) ما عدا $d_١$))

ونعلم ان : $\sum_{v \in V} \deg v = ٢q \dots \dots (٢)$

من (١) و (٢) نجد

$$٢q = ٢(P - ١) = ٢q - ٢ \ngeq ٢P - ١$$

وهذا تناقض " إذاً الفرض الجدلي خاطئ " وبالتالي يوجد على الأقل رأسين طرفيين في كل شجرة .

انتهت المحاضرة

إعداد: فطوم مرعي ** محمد علي فليون

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة: السادسة　　　عنوان المحاضرة: نظريات في البيان

بسم الله وبالله المستعان ...سنكمل معاً زملائي في هذه المحاضرة البيان في اثبات بعض النظريات وحل بعض التمارين

نظرية:

لتكن T شجرة من المرتبة m وليكن G بيان بحيث $\delta(G) \geq m - ١$
حيث ($\delta(G)$ أصغر درجة من المتتالية الدرجية) عندئذٍ T إيزمورفيزم مع البيان الجزئي من G .
((إيزمورفيزم تعني يوجد تقابل بين رؤوس الشجرة مع رؤوس البيان الجزئي من G))

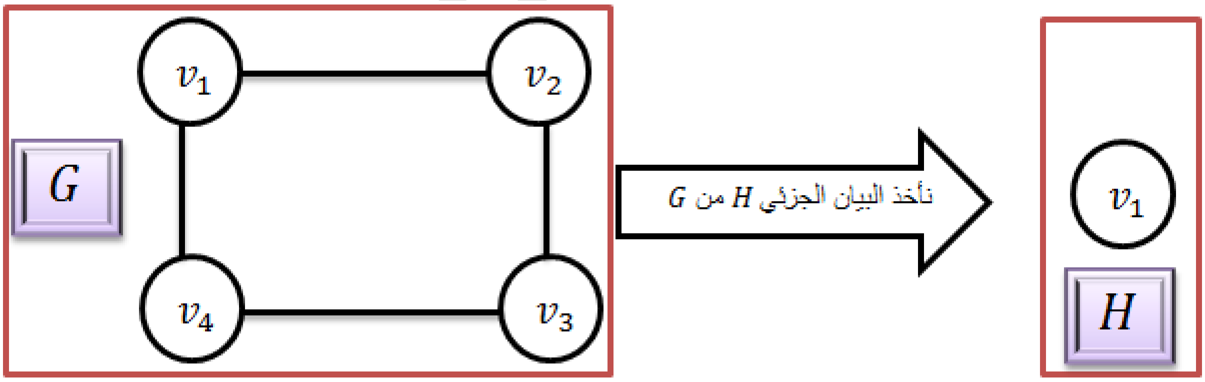
البرهان

لنبرهن ذلك باستخدام الاستقراء الرياضي على m

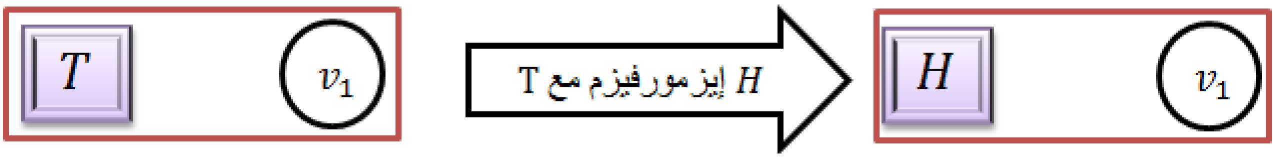
١) لنفرض أن $T = k_١$ بيان مؤلف من راس واحد " شجرة تافهة "

مرتبتها $m = ١$ وحجمها $q = ٠$ ومرتبتها $P = ١$ وبالتالي $\delta(G) \geq ٠$

توضيح ذلك من خلال الرسم

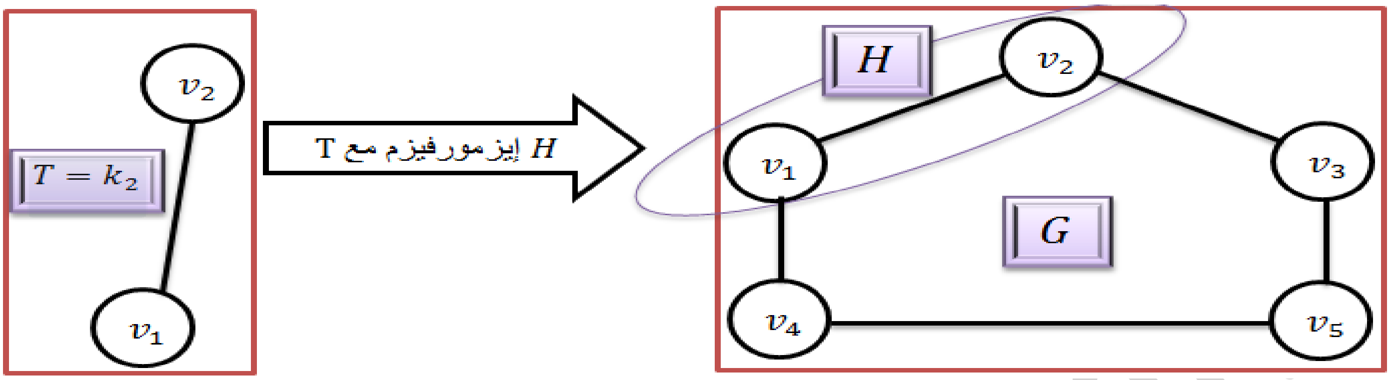


وبالتالي :



ومنه يوجد تقابل بين الشجرة $T = k_١$ والبيان الجزئي $H = v_١$ من البيان G

٢) $T = k_1$ ومنه $m = ٢$ إن T إيزمورفيزم مع البيان الجزئي من G يمتلك اضلاع أي $\delta(G) \geq ١$

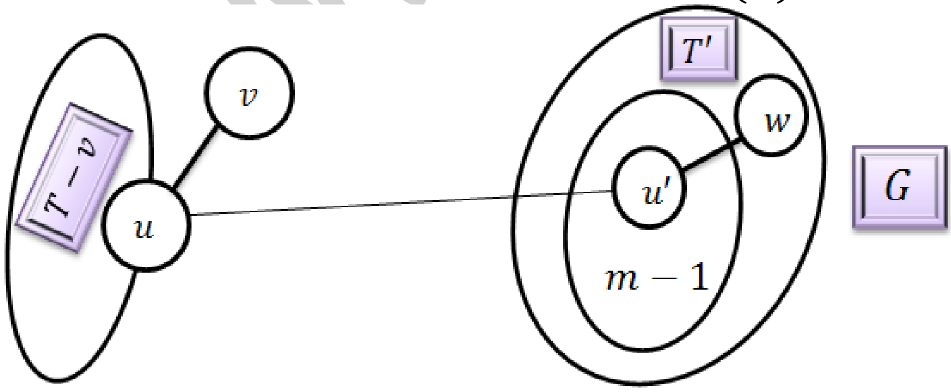


يوجد تقابل بين البيان $T = k_٢$ والبيان الجزئي $H = v_١v_٢$ من البيان G

إذا فهي محققة من أجل $m = ٢$, $m = ١$

٣) نفرض أن القضية صحيحة من أجل كل شجرة من المرتبة $(m-١)$ و $m \geq ٣$ اي أن T هي إيزمورفيزم مع البيان الجزئي H من G الذي يحقق $\delta(G) \geq m-٢$ ولتكن T شجرة من المرتبة m ، ولنثبت أن T إيزمورفيزم مع البيان الجزئي H من G الذي يحقق $\delta(G) \geq m-١$ وبما أن T شجرة عندئذٍ $v \in V(T)$ بحيث $\deg v = ١$ حسب نظرية سابقة تقول ((كل شجرة غير تافهة تحوي على الأقل رأسين طرفين))

نحذف الرأس v من T فنحصل على شجرة $T - v$ من المرتبة $m-١$ ومنه حسب الفرض الاستقرائي فإن $T - v$ إيزمورفيزم مع البيان الجزئي T' من البيان G الذي يحقق $\delta(G) \geq m-١ \geq m-٢$



بفرض أن u' يتصل بـ u في T ، وبما أن $\deg u' \geq m-١$ في G

T' يملك $m-٢$ رأس ومنه يوجد u' يتصل بضلع خارج T'
ومنه يوجد رأس w من G وليس رأس من T' بحيث w يتصل بـ u'
عندئذٍ T ايزمورفيزم مع $T' + u'w$

" شرح " حسب تعريف الإيزمورفيزم يوجد تقابل بين البيان $T - v$ من المرتبة $m-١$ مع البيان الجزئي T' من البيان G بنفس المرتبة $m-١$ ، وإن العقدة u تصل بـ v عقدة خارج $T - v$ ، وإن

العقدة u' تصل بـ w عقدة خارج T' وبالتالي يوجد تقابل بين الضلع uv من T مع الضلع $u'w$ إذاً البيان T إيزمورفيزم مع $T' + u'w'$.

تمرين

إذا كان G بياناً بسيطاً مرتبته P بحيث $\deg v \geq \frac{(P-١)}{٢}$ فإن G مترابط .

الحل

نفرض جدلاً أن G غير مترابط عندئذٍ له عدة مركبات $k \geq ٢$; $G_١, G_٢, \dots \dots, G_k$
نختار $\widetilde{G_١} = G_١$ بحيث $\widetilde{G_٢} = G_٢ + G_٣ + G_٤ \dots \dots G_k$
و $P_١$ مرتبة $\widetilde{G_١}$ و $P_٢$ مرتبة $\widetilde{G_٢}$ ومنه $P_١ + P_٢ = P$

$$\forall v \in V(\widetilde{G_١}) \quad , \qquad deg\, v \leq P_١ - ١$$

$$\forall v \in V(\widetilde{G_٢}) \quad , \qquad deg\, v \leq P_٢ - ١$$

ولدينا من الفرض
$$\frac{(P-١)}{٢} \leq \deg v \leq P_١ - ١ \quad \dots \dots (١)$$

$$\frac{(P-١)}{٢} \leq \deg v \leq P_٢ - ١ \dots \dots (٢)$$

بجمع كلاً من (١) و (٢) فنجد :

$$\Rightarrow P - ١ \leq P_١ + P_٢ - ٢ \Rightarrow P - ١ \leq P - ٢$$

وهذا تناقض " إذاً G بياناً مترابطاً

تمرين

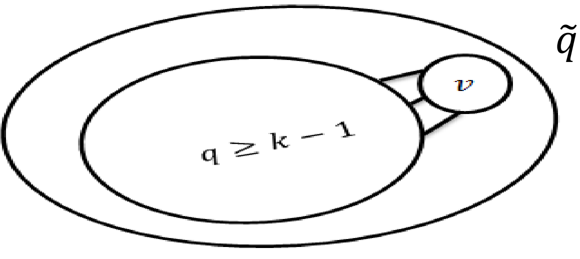
إذا كان G بيان مترابط من المرتبة P عندئذٍ $q \geq P - ١$

الإثبات

بالاستقراء الرياضي على P مرتبة البيان ، إذا كان $G = k_٢$

نفرض صحة القضية من أجل $P = k$ ولنثبت صحتها من أجل $P = k + ١$ وبفرض أن G بيان مترابط من المرتبة $P = k + ١$ ، ولنأخذ الرأس v من $V(G)$ نحذف الرأس v فنحصل على البيان $G - v$ مرتبته $P = k$ ومنه حسب الفرض الاستقرائي $q \geq k - ١$ (أضلاع $G - v$)
وإن $\deg v \geq ١$ ، وبإعادة الرأس v للبيان G يصبح حجم G

$$\tilde{q} \geq k - ١ \Rightarrow \tilde{q} \geq q + 1 \geq k$$

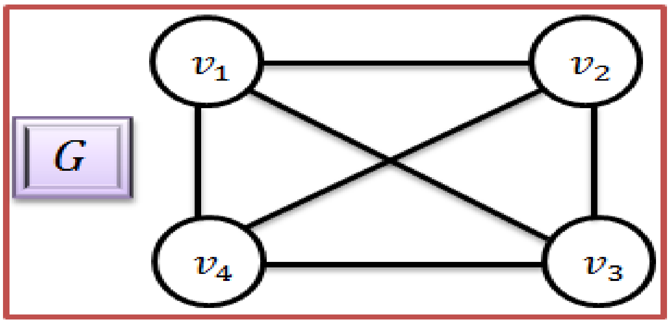


البيانات المسطحة Planar Graphs

تعريف : نقول عن البيان G أنه بيان مسطح إذا أمكن رسمه في مستوٍ بحيث لا تتقاطع أضلاعه .

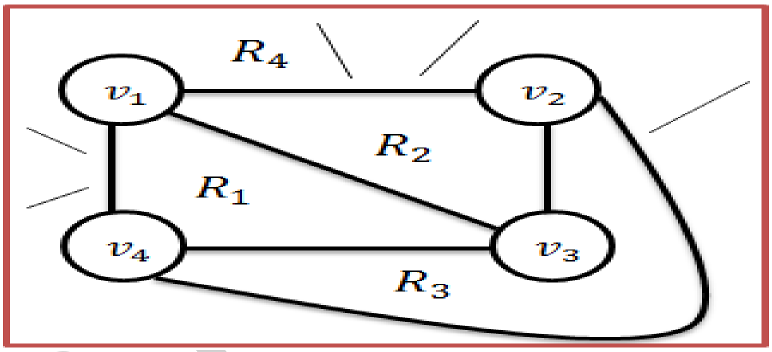
- نقول عن G أنه مستوي إذا تم رسمه في المستوي

مثال : ليكن لدينا البيان G المعطى بالشكل التالي



هل G مسطح ؟

نعم : إن البيان G بيان مسطح " لأننا استطعنا رسمه في مستوي دون تقاطع لأضلاعه " كما في الشكل :



وعندها تتشكل المناطق التالية في البيان المستوي " بحيث لا توجد أضلاع في المنطقة المختارة "

$R_1 : v_1, v_3, v_4, v_1$, $R_2 : v_1, v_2, v_3, v_1$

$R_3 : v_2, v_3, v_4,$, $R_4 : v_1, v_2, v_4, v_1$

ملاحظة : في كل بيان يوجد منطقة خارجية واحدة فقط (المساحة الخارجية) وفي مثالنا السابق هو R_4

نظرية : ((صيغة أويلر)) إذا كان G بيان مترابط على مستوي و P مرتبته و q حجمه و r عدد مناطقه عندئذٍ : $P - q + r = 2$

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على q إذا كان $q = 0$ و $P = 1$ فإن $G = k_1$

ومنه $r = 1$ لأنها تمثل منطقة خارجية

$$\Rightarrow P-q+r=٢ \Rightarrow ١-٠+١=٢$$

إذاً القضية صحيحة من أجل $q=٠$ ولنفرض صحة القضية من أجل كل البيانات المترابطة المستوية ذات الحجم $q=k-١$ ، وبفرض G بيان مترابط ومستوي وعدد مناطقه r ومرتبته P ذات الحجم $q=k$ لنثبت صحة القضية التالية $P-k+r=٢$ من أجل $q=k$

نميز الحالتين :

الحالة الأولى : إذا كان G شجرة فإن $q=k=P-١ \Leftarrow P=k+١$ و $r=١$

$$\Rightarrow P-q+r=(k+١)-k+١=٢$$

الحالة الثانية : G ليست شجرة ومنه G يحتوي على حلقات " وهو مترابط فرضاً "
نفرض أنه يوجد حلقة على الأقل ولنأخذ ضلع منها وليكن e وبالتالي e يقع على حلقة وليس جسراً
وبالتالي $G-e$ بيان مترابط وإن P مرتبته وعدد أضلاعه $q'=k-١$ و $r'=r-١$
ومنه حسب الفرض الاستقرائي $P'-q'+r'=٢$

$$P-(k-١)+r-١=٢ \Rightarrow P-k+r=٢$$

وبالتالي تم المطلوب .

ملاحظة ١) أي ضلع يقع على منطقتين بحذفه نكون قد جمعنا المنطقتين ، كما في المثال السابق نحذف الضلع $e=v_١v_٣$ نكون قد جمعنا المنطقتين $R_١,R_٢$

٢) في البيان المستوي إذا حذف منه أضلاع يبقى مستوي أما بالإضافة ليس بالضرورة لن يبقى مستوي

تعريف : نقول عن البيان G أنه مسطح أعظمي إذا تحقق ما يلي $G+uv$ ليس مسطح من أجل أي رأسين u,v غير متصلين .

ملاحظات : إضافة ضلع بين رأسين غير متصلين يصبح $G+uv$ غير مسطح و G بيان مسطح أعظمي المناطق هي حلقات دائرية وواحدة منها خارجية
G مسطح أعظمي إذا وفقط إذا كانت كل منطقة من مناطقه حلقة ذات طول ٣

نظرية : إذا كان G مسطح أعظمي (P,q) بحيث $P\geq ٣$ فإن $q=٣P-٦$

البرهان

ليكن لدينا G بيان مسطح أعظمي نرسمه على مستوي ولتكن r عدد مناطقه ، وإن عدد أضلاع المناطق يساوي $٣r$ " لأن كل منطقة من مناطقه حلقة ذات الطول ٣ "
وكل ضلع يقع في منطقتين (اي يُعَدّ مرتين الضلع)

$$٣r=٢q \Rightarrow r=\frac{٢q}{٣}$$

بما ان G مستوي فإن $P - q + r = ٢$

$$\Longrightarrow P = q - r + ٢ \Longrightarrow P = q - \frac{٢}{٣}q + ٢$$

$$\Longrightarrow P = \frac{q}{٣} + ٢ \Longrightarrow q = ٣P - ٦$$

نتيجة :

إذ كان G مسطح (P,q) بحيث $P \geq ٣$ عندئذٍ $q \leq ٣P - ٦$

الإثبات

إذا كان G مسطح (P,q) أعظمي $\Leftrightarrow q = ٣P - ٦$ يتم المطلوب
وفي خلاف ذلك نضيف لـ G أضلاع حتى نحصل على بيان مسطح أعظمي G' مرتبته P' وحجمه q' ،
إن $P = P'$ (لأننا نضيف أضلاع) و $q < q'$ وبما أن G مسطح أعظمي

$$q < q' = ٣P' - ٦ = ٣P - ٦$$

نظرية :

كل بيان مسطح يحوي على الأقل رأس درجته لا يتجاوز لـ ٥

البرهان

ليكن لدينا G بيان مسطح (P,q) وليكن $V = \{v_١, v_٢, \dots \dots v_P\}$ إذا كان $P \leq ٦$
أي $q = ٦ - ١ = ٥$ فإن الأمر محقق لأن $\forall\, v \in V \;;\; \deg v \leq ٥$
بفرض $P \geq ٧$ ، ونفرض جدلاً أن $\forall\, v \in V \;;\; \deg v \geq ٦$
لدينا من الفرض G بيان مسطح حسب مبرهنة سابقة $q \leq ٣P - ٦$

$$\Longrightarrow \sum_{v \in V} \deg v = ٢q \leq ٢(٣P - ٦) \leq ٦P - ١٢ \dots \dots (١)$$

ولدينا من جهة اخرى $\sum_{v \in V} \deg v \geq ٦P \dots \dots (٢)$
من (١) و (٢) نحصل على تناقض $٦P \leq ٦P - ١٢$
وبالتالي إذا الفرض الجدلي خاطئ إذاً يوجد راس على الأقل درجته لا تساوي ٥

نظرية :

كل من البيان $k_٥$, بيان غير مسطح

البرهان

لنثبت أن $k_٥$ غير مسطح وذلك لأن $P = ٥$ وبالتالي

$$q = \frac{P(P-١)}{٢} \Rightarrow q = \frac{٥(٤-١)}{٢} = ١٠ \ldots\ldots (١)$$

ولدينا :

$$q \leq ٣P - ٦ = ٣(٥) - ٦ = ٩ \ldots\ldots (٢)$$

ومنه من (١) و (٢) نجد أن $٩ \nleq ١٠$

انتهت المحاضرة

إعداد: تقى إسماعيل

◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة: السابعة (والأخيرة)   عنوان المحاضرة: رسم البيان المسطح

بسم الله وبالله المستعان ...سنكمل معاً زملائي في محاضرتنا الأخيرة خوارزمية تحدد تسطح البيان G أو عدم تسطحه .

نظرية : كل من البيانين $k_٥, k_{٣,٣}$ بيان غير مسطح

البرهان

لنثبت أن $k_٥$ غير مسطح وذلك لأن $P = ٥$ وبالتالي

$$q = \frac{P(P-١)}{٢} \Rightarrow q = \frac{٥(٤-١)}{٢} = ١٠ \dots \dots (١)$$

ولدينا :

$$q \leq ٣P - ٦ = ٣(٥) - ٦ = ٩ \dots \dots (٢)$$

ومنه من (١) و (٢) نجد أن $٩ \nleq ١٠$

لنثبت $k_{٣,٣}$ غير مسطح لأن $P = ٦$ و $q = ٩$ ولدينا $٣P - ٦ = ٣.٦ - ٦ = ١٢$

$$\Rightarrow q = ٩ \leq ١٢ = ٣P - ٦$$

وبالتالي لا يمكن اتخاذ قرار فيما إذا كان $k_{٣,٣}$ مسطح أم لا .

نفرض أن $k_{٣,٣}$ مستوي ونفرض أن r عدد مناطقه

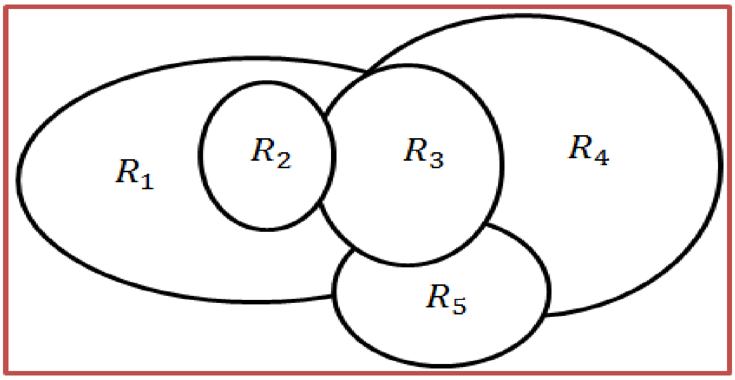
$$P - q + r = ٢ \Rightarrow ٦ - ٩ + r = ٢ \Rightarrow r = ٥$$

بما أن $k_{٣,٣}$ بيان ثنائي التجزئة ((لا يحوي على حلقات فردية)) ومنه طول كل منطقة من مناطقه أكبر أو يساوي ٤ ، ولتكن N مجموع أضلاع المناطق عندئذٍ :

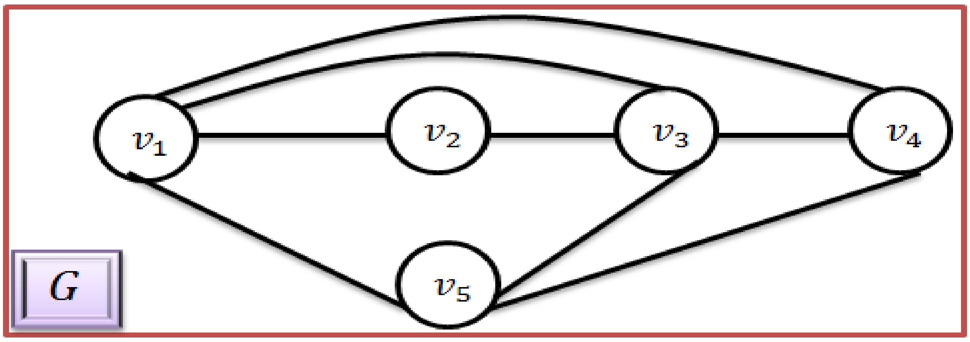
$$N = ٢q = ١٨ \text{ وإن } N \geq ٤r$$

ومنه $١٨ \geq ٤r \Leftarrow r = \frac{١٨}{٤} = 4.5$ وبالتالي إن البيان $k_{٣,٣}$ غير مسطح .

ملاحظة : G خريطة إذا وفقط إذا كان G مسطح .



تمثل المناطق على شكل عقد

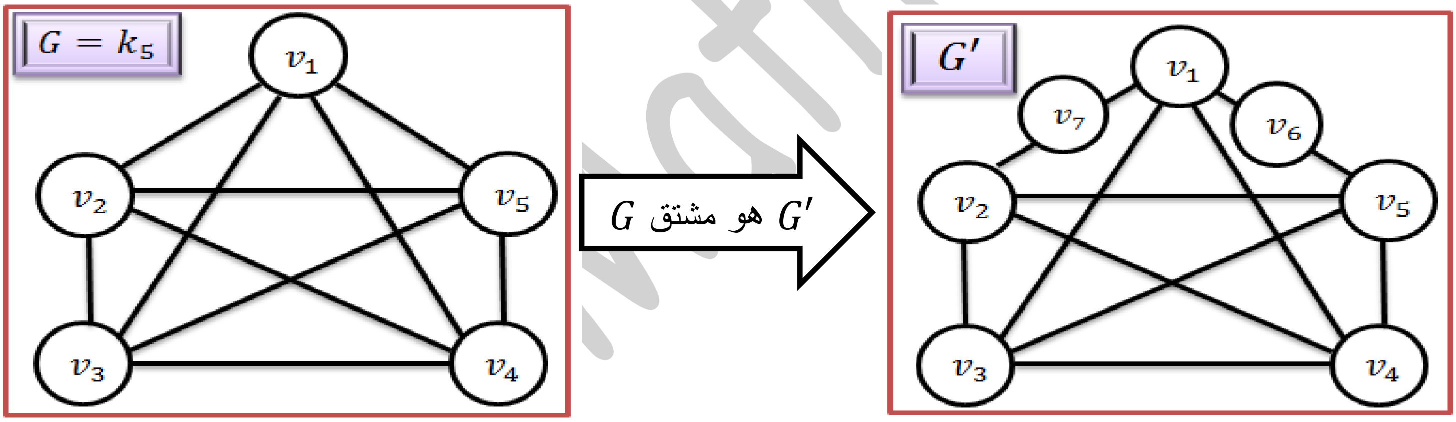


نلاحظ : يوجد تجاور بين $R_١$ و$R_٣$ أي $R_١$ يتصل بـ $R_٣$ ويوجد تجاور بين $R_١$ و $R_٥$ إذاً $R_١$ يتصل بـ $R_٥$وبالخوارزمية نفسها بالنسبة لجميع المناطق .

البيان ومشتقه

نقول عن بيان G' انه مشتق من البيان G اذا طبقنا على G' الخوارزمية كل راس u متصل بـ v, w

مثال : ليكن لدينا البيان $G(V,E)$



في البيان المباشر G المستقيمات بين الرؤوس تمثل أضلاع أما في البيان المشتق G' تكون مسارات

تعريف :

ليكن لدينا البيان G وليكن H بيان جزئي من G نُعَرِف على $E(G)-E(H)$ علاقة كما يلي: $e\sim f$ أي إذا وجد طريق بدايته الضلع e ونهايته الضلع f وبحيث لا يحوي رؤوس من H نقول عن هذه العلاقة أنها **علاقة تكافؤ** لأن :

١) علاقة انعكاسية :

$$\forall\, e \in E(G)-E(H) \quad ; \quad e\sim e$$

حيث $e=uv$ طريق بدايته e ونهايته e ولا يوجد نقاط داخلية فيه إذاً يوجد طريق $u-v$

٢) علاقة تناظرية :

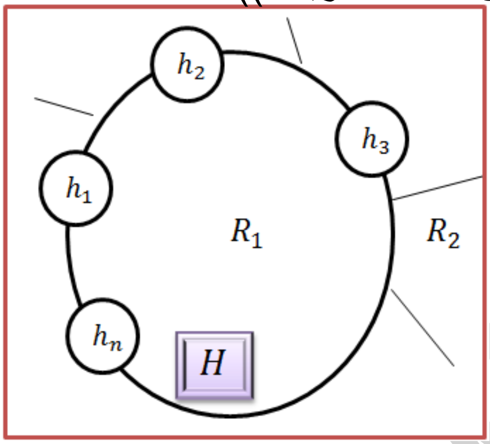
$$\forall\, e,f \in E(G)-E(H) \quad ; \quad e \sim f \Leftrightarrow f \sim e$$

(يوجد طريق بدايته e ونهايته f ولا يحوي رؤوس مشتركة مع H)
وكذلك يمكن أن يكتب طريق بدايته f ونهايته e ولا يحوي رؤوس مشتركة مع H .

٣) علاقة متعدية :

$$\forall\, e,f,h \in E(G)-E(H) \quad ; \quad e \sim f \wedge f \sim h \Leftrightarrow e \sim h$$

يوجد طريق بدايته e ونهايته f ولا يحوي رؤوس مشتركة مع H و يوجد طريق بدايته f ونهايته h ولا يوجد رؤوس مشتركة مع H وبالتالي يوجد طريق بدايته e ونهايته h ولا يحوي رؤوس مشتركة مع H
إذاً $\sim$ علاقة تكافؤ نحصل على صفوف تكافؤ ، ندعو كل صف بـ $fragment$ ((H قطعة في G))
تنويه : تعرفنا في المحاضرة السابقة على كيفية تسطح البيان ((من خلال التعريف))
ولكن الطريقة كانت للبيانات البسيطة .



سنتعرف الآن على خوارزمية تسطح البيان وهي الأعم والأشمل

١) نأخذ بيان جزئي H من G ((يفضل أن يكون حلقة))

٢) نحدد قطع H في G ((علاقة تكافؤ))

ولتكن $F_١ \, , F_٢ \, , \dots \dots F_k$

٣) $n_i = \sim(F_i) \qquad ; \qquad k \geq i \geq ١$

حيث n_i عدد المناطق التي يمكن رسم القطعة $F_١$ فيها ، ونرتب لـ n_i تصاعدياً

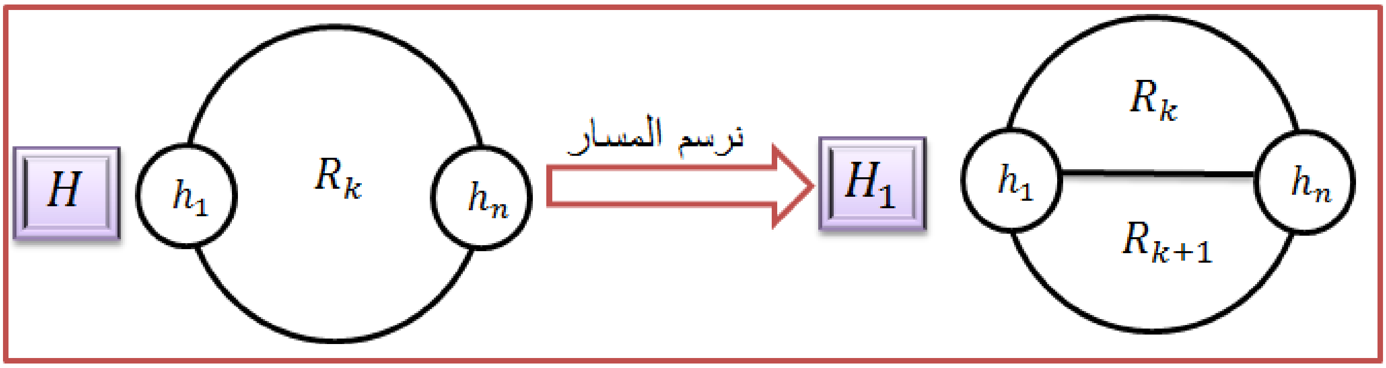
$$n_١ \leq n_٢ \leq \dots\dots\dots \leq n_k$$

$$n_١ = \underbrace{\min}_{k \geq i \geq ١} \{n_i\}$$

نفرض حالتين :

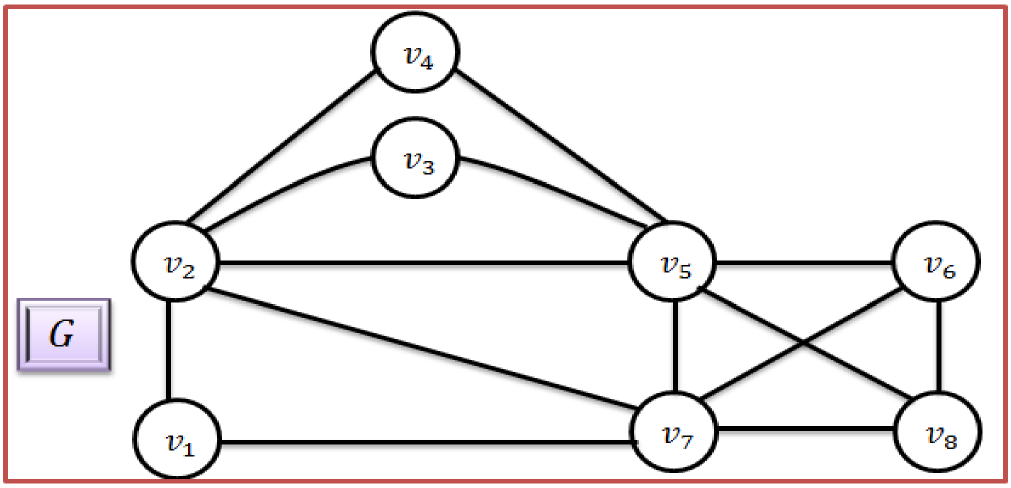
أ) $n_١ = ٠$ **نتوقف** ونقول أن البيان غير مسطح .

ب) $n_١ \neq ٠$ نأخذ مسار من القطعة $F_١$ بدايته رأس من H ونهايته رأس من H
ونرسم هذا المسار في المنطقة المناسبة من مناطق H



وبالتالي نحصل على بيان جزئي جديد H_1 أكبر من H ، نخرج من الحلقة وننتقل إلى الخطوة ٢ **مجدداً**

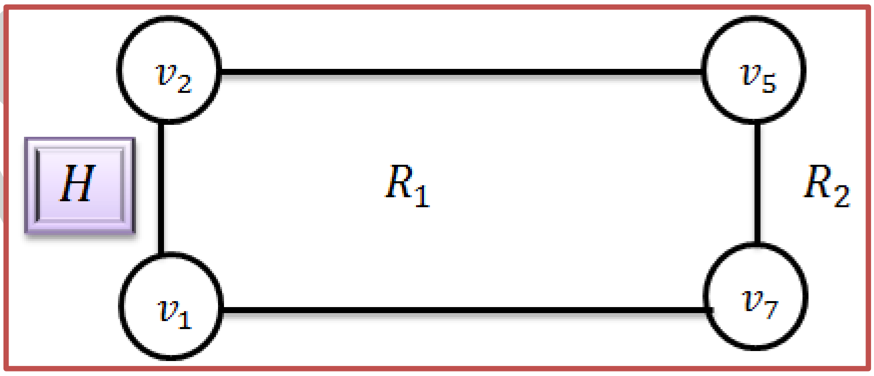
مثال : ليكن لدينا البيان G المعطى بالشكل :



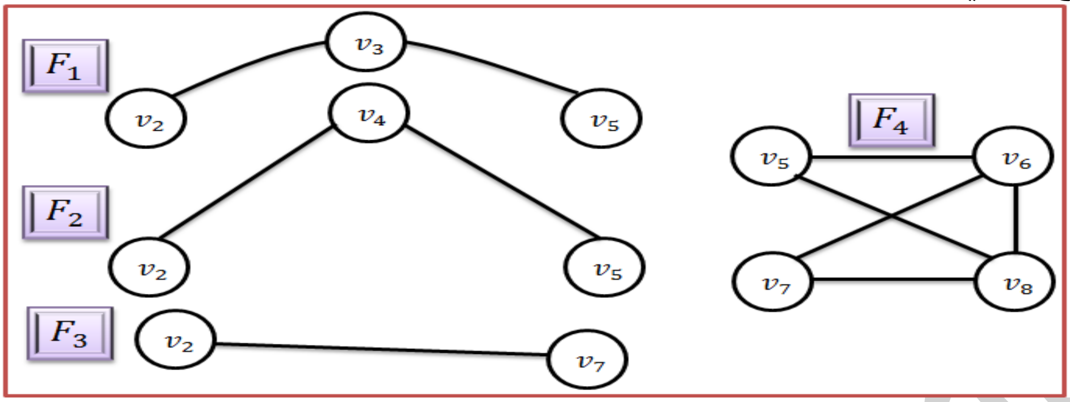
هل البيان مسطح أم لا ؟

الحل

١) نختار البيان الجزئي H ((ويفضل أن يكون حلقة)))



٢) نحدد القطع H في G



٣) نحدد عدد المناطق التي يمكن رسم القطع F_i في البيان الجزئي H، بحيث $i = ١,٢,٣,٤$

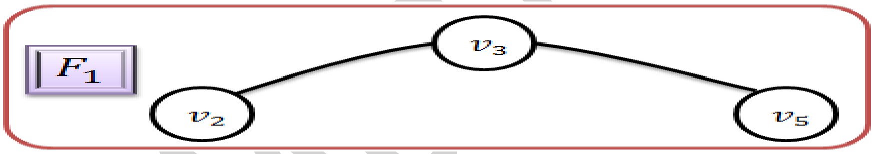
$$n(F_١) = ٢ \;,\; n(F_٢) = ٢ \;, n(F_٣) = ٢ \;, n(F_٤) = ٢$$

ننظر إلى الرؤوس المشتركة بين $F_١$ و H ونحدد موقع هذه الرؤوس بأي منطقة موجودة

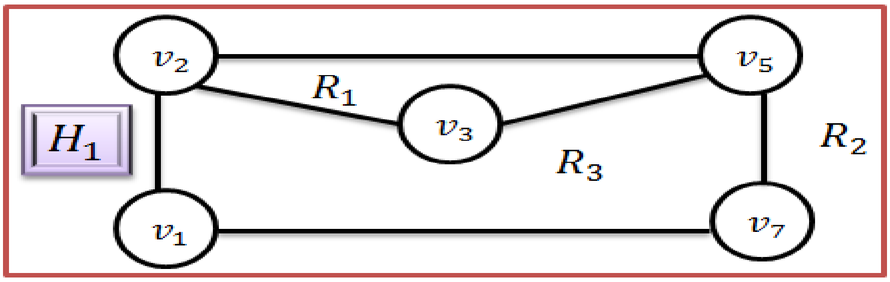
إن الرؤوس المشتركة بين $F_١$ و H هي $v_٢, v_٥$ وإن هذه الرؤوس موجودة في المنطقتين $R_١, R_٢$

وبالتالي $n(F_٢) = ٢$

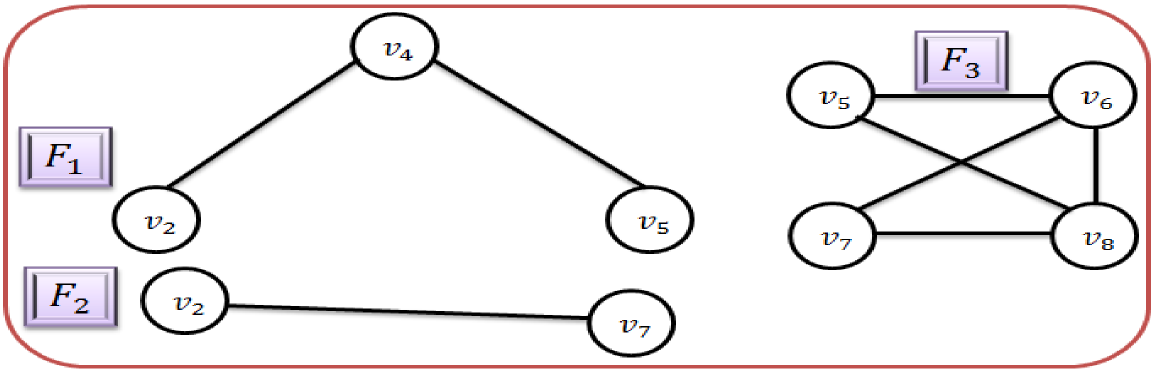
٤) نأخذ مسار من $F_١$ ((مثلاً)) مسار بدايته رأس من H ونهايته رأس من H



نرسم هذا المسار مثلاً في المنطقة $R_١$ فنجد :

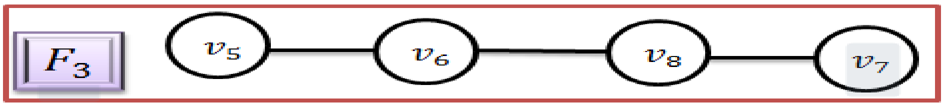


وبالعودة إلى الخطوة (٢) نحدد القطع $H_١$ في G

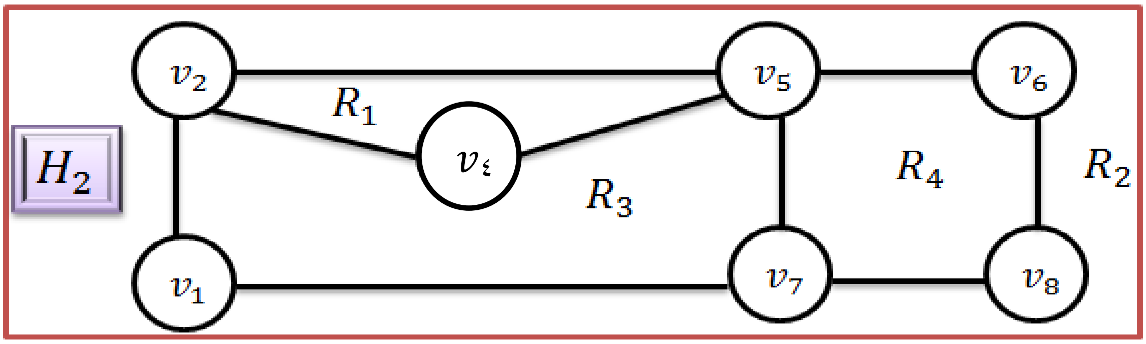


$$n(F_{١}) = ٢ \ , \ \ n(F_{٢}) = ٢ \ , n(F_{٣}) = ٢$$

نختار في $F_{٣}$ مسار بدايته من $H_{١}$ ونهايته من $H_{١}$ وليكن :

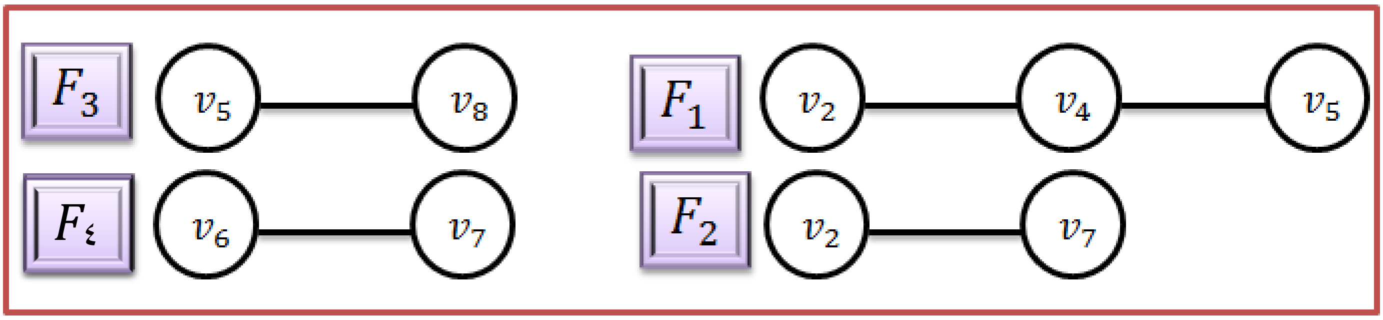


نرسم من $F_{٣}$ مسار في المنطقة $R_{٢}$ للبيان $H_{١}$ ونحصل على ما يلي :



نلاحظ أنه في كل حركة يكبر البيان H ((وبنفس الخطوات نتابع))

نحدد القطع من $H_{٢}$ من G

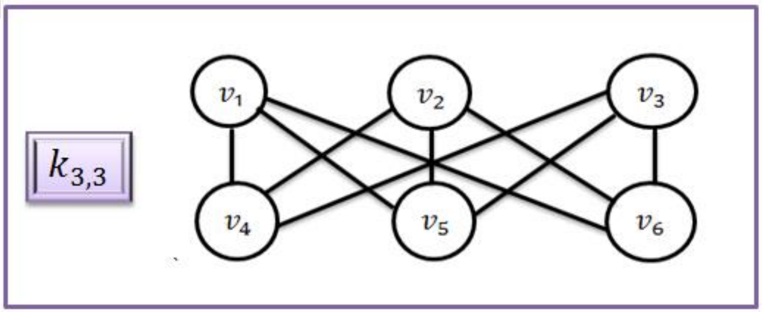


وهي :

$$n(F_{١}) = ٢ \ , \ \ n(F_{٢}) = ٢ \ , n(F_{٣}) = ٢ \ , n(F_{٤}) = ٢$$

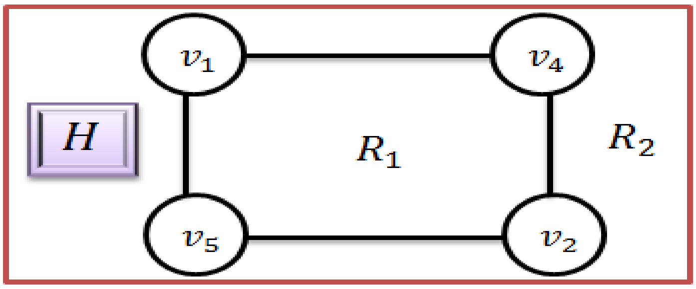
ومنه نلاحظ أن البيان المعطى هو بيان مسطح
لأننا استطعنا رسم البيان G في مستوي بحيث لا تتقاطع أضلاعه

مثال (2) : بين أن البيان $k_{٣,٣}$ غير مسطح

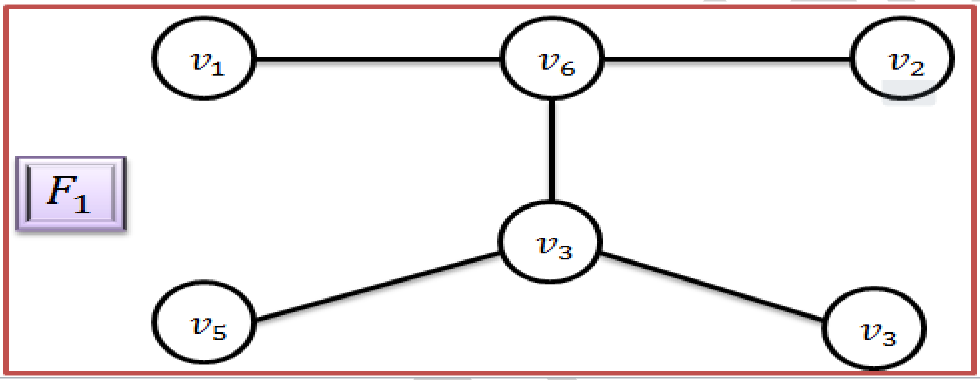


الحل

١- نختار H بيان جزئي كما يلي :



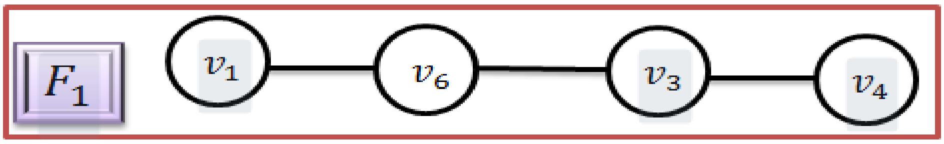
٢- نختار القطع H من G



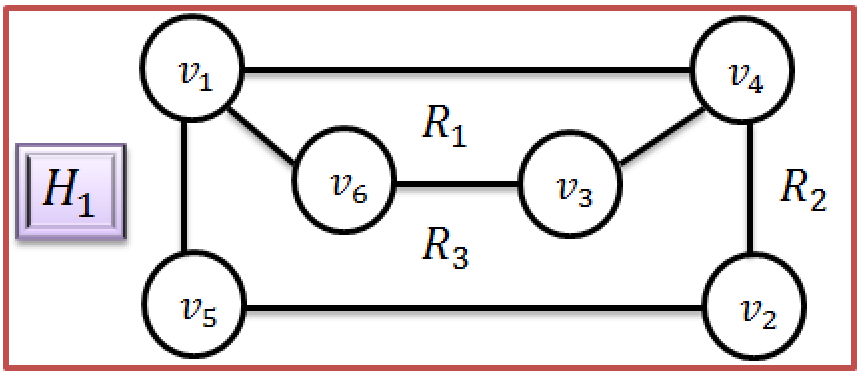
$$n(F_١) = ٢$$

إن العقد المشتركة بين $F_١$ و H هي $v_١, v_٥, v_٤, v_٢$ وهذه العقد تقع على المنطقتين $R_١, R_٢$

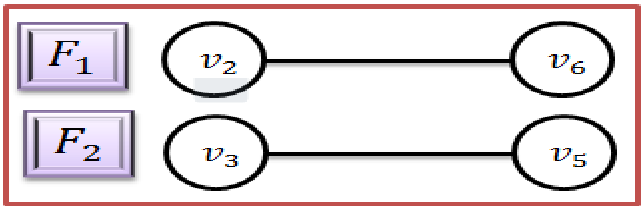
٣- نختار مسار من $F_١$ بدايته رأس من H ونهايته رأس من H وليكن



نرسم المسار $F_١$ في المنطقة $R_١$ من H فنحصل على :

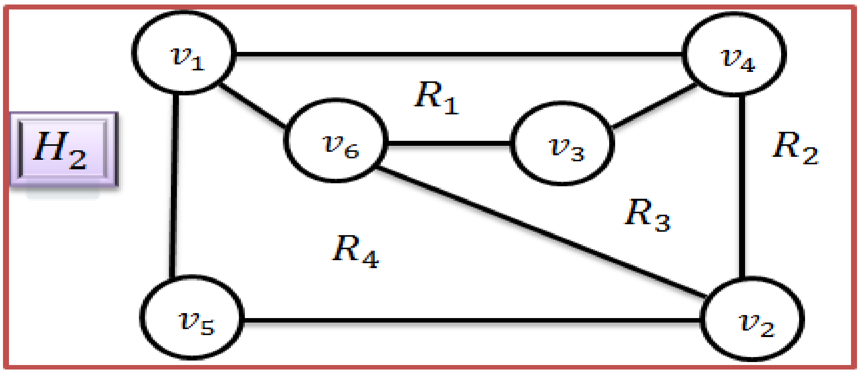


نختار القطع $H_١$ من G

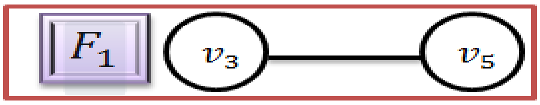


$$n(F_١) = ١ \quad , \quad n(F_٢) = ١$$

نختار من $F_١$ مسار وليكن رسمة $v_٦ - v_٢$ وبرسم هذا المسار في المنطقة $R_٣$ نجد :



نختار القطع $H_٢$ من البيان G



$n(F_١) = ٠$ ((لأنه إذا تم رسم هذا المسار سيصبح لدينا تقاطع بالأضلاع)) ومنه البيان $k_{٣,٣}$ غير مسطح .

تعريف :

١- نقول عن G أنه بيان هاملتوفي اذا حوى على حلقة تمر بكل رؤوس البيان G

٢- نقول عن مسار G أنه هاملتوفي اذا مر بجميع رؤوس البيان G

٣- نقول عن G أنه بيان اولر اذا حوى عل سلسلة تمر بكل تمر بجميع الأضلاع

إنتهت المقرر ^_^

إعداد : تقى إسماعيل