الموضوع: م. 4   التاريخ: / 11 /

نتيجة: لأجل أي فئة ℓ يوجد الدالي المطابق $I_\ell : \ell \to \ell$

$$\forall x \in ob(\ell) , \quad I_\ell(x) = x$$

⑥ تمهيدية:

لتكن ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 فئات و $F : \ell_1 \to \ell_2$ و $G : \ell_2 \to \ell_3$ دوال مباشرة (غير مباشرة)

عندئذٍ: $G \circ F : \ell_1 \to \ell_3$ هو دالي مباشر

البرهان: لنعرف $G \circ F$ من خلال: ١- تطبيق الأشياء:

لدينا $F : ob(\ell_1) \to ob(\ell_2)$ و $G : ob(\ell_2) \to ob(\ell_3)$ ومنه فإن:

$$G \circ F : ob(\ell_1) \to ob(\ell_3)$$

$$\forall x \in ob(\ell_1) ; \quad G \circ F(x) = G(F(x))$$

٢- تطبيق المورفيزمات:

لأجل كل مورفيزم $u : A \to B$ للفئة ℓ_1 يوجد $F_{A,B} : \ell_1(A,B) \to \ell_2(F(A), F(B))$

ويوجد $G_{F(A)F(B)} : \ell_2(F(A), F(B)) \to \ell_3(G(F(A)), G(F(B)))$

$$G \circ F_{A,B} : \ell_1(A,B) \to \ell_3(G \circ F(A), G \circ F(B))$$ ← حالة

1) $\forall A \in ob(\ell_1) : \quad G \circ F(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)}) = I_{G(F(A))} = I_{G \circ F(A)}$

2) $\forall u, v \in Mor(\ell_1) : \quad G \circ F(v \circ u) = G(F(v \circ u)) = G(F(v) \circ F(u))$

$$= G(F(v)) \circ G(F(u)) = G \circ F(v) \circ G \circ F(u)$$

نتيجة:

تركيب داليين أحدهما مباشر والآخر غير مباشر هو دالي غير مباشر

⑦ تمهيدية:

ليكن $F : \ell_1 \to \ell_2$ دالي. إذا كان u ايزومورفيزم للفئة ℓ_1 فإن $F(u)$ أيزومورفيزم للفئة ℓ_2.

البرهان: لنفرض أن $u : A \to B$ ايزومورفيزم للفئة ℓ_1 عندئذٍ يوجد مورفيزم $v : B \to A$ للفئة ℓ_1 بحيث $u \circ v = I_B$ و $v \circ u = I_A$ ومنه

و $F(u) : F(A) \to F(B)$ و $F(v) : F(B) \to F(A)$ مورفيزمات للفئة ℓ_2

$$F(u) \circ F(v) = F(u \circ v) = F(I_B) = I_{F(B)}$$

التاريخ: / 12 /   الموضوع:

$F(v).F(u) = F(v.u) = F(I_A) = I_{F(A)}$

ومنه $F(v)$ ايزومورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$.

* المورفيزم الدالي *

(7) تعريف: ليكن $F, G : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ داليين، نقول إنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $f : F \longrightarrow G$ إذا تحقق:

1- لأجل كل غاية $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ $f(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$

الفئة $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$

2- لأجل كل مورفيزم $u : A \longrightarrow B$ للفئة $\mathcal{C}_1$ المخطط الآتي تبديلي:

انشاء ☐ علاقة ☐ انشاء
مورفيزمات ☐ موضوعات ☐

إذا كان غير مباشرين نقلب الأسهم

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "f(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "f(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

أي أنه $G(u).f(A) = f(B).F(u)$ في حالة المباشر

- في حالة غير مباشرين

لأجل كل مبرهنة يوجد داليين مباشر و غير مباشر

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] & G(A) \\ F(B) \arrow[u, "F(u)"] \arrow[r, "f(B)"'] & G(B) \arrow[u, "G(u)"'] \end{tikzcd}$$

أما همون: لأجل كل مورفيزم يوجد مورفيزم بين الداليين

ونقول عن المورفيزم الدالي f إنه ايزومورفيزم دالي إذا كان المورفيزم $f(A)$ ايزومورفيزم و ذلك لأجل كل $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ (يوجد مثاله في المحاضرة 6)

(8) * مبرهنة *

لتكن $\mathcal{C}$ فئة. عندئذ لأجل كل مورفيزم $w : X \longrightarrow X'$ للفئة $\mathcal{C}$ يوجد:

1- مورفيزم دالي $f : h_{X'} \longrightarrow h_X$

2- مورفيزم دالي $g : \hat{h}_X \longrightarrow \hat{h}_{X'}$

البرهان: لنفرض أن $w : X \longrightarrow X'$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$.

1- عندئذ يوجد دوال مباشرة $h_X, h_{X'} : \mathcal{C} \longrightarrow Sets$ لنعرف $f : h_{X'} \longrightarrow h_X$

ليكن $A \in ob(\mathcal{C})$ ولنضع $f(A) : h_{X'}(A) \longrightarrow h_X(A)$

الموضوع: .... التاريخ: / 13 /

$$f(A) : \ell(X',A) \longrightarrow \ell(X,A)$$

$$\forall u \in \ell(X',A) \ , \ f(A)(u) = u.w$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] & A \\ X \arrow[u, "w"] \arrow[ur, "u.w"'] & \end{tikzcd}$$

ليكن $v : A \to B$ مورفيزم للفئة ℓ.

$$\begin{tikzcd} h_{X'}(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "h_{X'}(v)"'] & h_X(A) \arrow[d, "h_X(v)"] \\ h_{X'}(B) \arrow[r, "f(B)"] & h_X(B) \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd} \ell(X',A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "h_{X'}(v)"'] \arrow[dr, bend left, "①"] \arrow[dr, bend right, "②"'] & \ell(X,A) \arrow[d, "h_X(v)"] \\ \ell(X',B) \arrow[r, "f(B)"] & \ell(X,B) \end{tikzcd}$$

① $\forall \lambda \in \ell(X',A) \ ; \ \underbrace{h_X(v)}_{\text{تطبيق}} \underbrace{\circ}_{\text{جداء}} \underbrace{f(A)(\lambda)}_{\text{تطبيق}} = h_X(v)\big(f(A)(\lambda)\big)$

$= h_X(v)(\lambda.w) = v.(\lambda.w)$ مورفيزم x ما

② $f(B).h_{X'}(v)(\lambda) = f(B)\big(h_{X'}(v)(\lambda)\big) = f(B)(v.\lambda) = (v.\lambda).w$

$= v.(\lambda.w)$

ومنه: $h_X(v).f(A) = f(B).h_{X'}(v)$

أي أن f مورفيزم دالي.

- توجد دوال غير مباشرة $\hat{h}_X, \hat{h}_{X'} : \ell \to Sets$ لنعرف $g : \hat{h}_X \to \hat{h}_{X'}$

شرط ① بالشكل: لأجل كل $A \in ob(\ell)$ لنضع $g(A) : \hat{h}_X(A) \to \hat{h}_{X'}(A)$

$: \ell(A,X) \to \ell(A,X')$

$$\forall u \in \ell(A,X) \ : \ g(A)(u) = w.u$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "w.u"'] & X \arrow[d, "w"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

شرط ② ـ ليكن $v : A \to B$ مورفيزم للفئة ℓ.

$$\begin{tikzcd} \hat{h}_X(A) \arrow[r, "g(A)"] & \hat{h}_{X'}(A) \\ \hat{h}_X(B) \arrow[u, "\hat{h}_X(v)"] \arrow[r, "g(B)"'] \arrow[ur, bend left] \arrow[ur, bend right] & \hat{h}_{X'}(B) \arrow[u, "\hat{h}_{X'}(v)"'] \end{tikzcd}$$

$\forall \lambda \in \hat{h}_X(B) = \ell(B, X)$

$- \; g(A).\hat{h}_X(\vartheta)(\lambda) = g(A)(\hat{h}_X(\vartheta)(\lambda)) = g(A)(\lambda.\vartheta) = w.(\lambda.\vartheta)$

w x مورفيزم

$- \; \hat{h}_{X'}(\vartheta).g(B)(\lambda) = \hat{h}_{X'}(\vartheta)(g(B)(\lambda)) = \hat{h}_{X'}(\vartheta)(w.\lambda)$

$= (w.\lambda).\vartheta = w.(\lambda.\vartheta)$

$g(A).\hat{h}_X(\vartheta) = \hat{h}_{X'}(\vartheta).g(B) \Rightarrow$ g مورفيزم دالي

تمهيدية:
لتكن ℓ_1, ℓ_2 فئتين عندئذٍ ① لأجل كل دالي مباشر $F: \ell_1 \to \ell_2$ يوجد مورفيزم دالي وطابق
$$I_F: F \to F$$
② لأجل كل دالي غير مباشر
$$F: \ell_1 \to \ell_2$$
يوجد مورفيزم دالي وطابق
$$I_F: F \to F$$

٤.٢ م المورفيزمات الدالية:

تعريف: لتكن $F, G: \ell_1 \to \ell_2$ دوال. نقول إنه يوجد لدينا مورفيزم دالي
$$f: F \to G$$
إذا كان لأجل كل $A \in ob(\ell_1)$ فإنه $f(A): F(A) \to G(A)$ مورفيزم للفئة ℓ_2

حالة: ونقول عن المورفيزم الدالي f إنه ازومورفيزم دالي إذا كان لأجل كل $A \in ob(\ell)$ فإن المورفيزم $f(A): F(A) \to G(A)$ ازومورفيزم

③ **تمهيدية:** لتكن $F, G, H: \ell_1 \to \ell_2$ دوال و $f: F \to G$ و $g: G \to H$ مورفيزمات دالية عندئذٍ $g.f: F \to H$ مورفيزم دالي.

البرهان ① ليكن $A \in ob(\ell_1)$ عندئذٍ $f(A): F(A) \to G(A)$ مورفيزم للفئة ℓ_2
وأيضاً $g(A): G(A) \to H(A)$ مورفيزم للفئة ℓ_2 وحيث

$$g.f(A) = \underbrace{g(A).f(A)}_{\text{جداء مورفيزمين}}: F(A) \to H(A)$$ مورفيزم للفئة ℓ_2.

الشرط الثاني ② ليكن $u: A \to B$ مورفيزم للفئة ℓ_1. ولنبرهن عن أن المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "g.f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & H(A) \arrow[d, "H(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "g.f(B)"'] & H(B) \end{tikzcd}$$

الموضوع: .... التاريخ: / 13 /

$H(u).(g.f(A)) = (g.f(B)).F(u) \Rightarrow H(u).(g.f(A)) = H(u).(g(A).f(A))$

$\Rightarrow \quad = (H(u).g(A)).f(A)$

ثم لما كان g مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم $u: A \to B$ المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "g(A)"] \arrow[d, "G(u)"'] & H(A) \arrow[d, "H(u)"] \\ G(B) \arrow[r, "g(B)"] & H(B) \end{tikzcd}$$

$$H(u).g(A) = g(B).G(u)$$

ايضاً لما كان f مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم $u: A \to B$ المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "F(B)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

أثبتنا أنه داخلي هل هي

تمرين: أثبت أنه تجميعي

$$G(u).f(A) = f(B).F(u)$$

$$= (g(B).f(B)).F(u) = (g.f(B)).F(u)$$

ثم ومنه $g.f$ مورفيزم دالي.

(10) تمرين: ليكن $F: \ell_1 \to \ell_2$ دالية مباشرة، أثبت أن $I_F: F \to F$ مورفيزم دالي

(1) الشرط الأول: $\forall A \in ob(\ell_1),\ I_F(A): F(A) \to F(A)$

$I_F(A) = I_{F(A)}$

(2) الشرط الثاني: ليكن $u: A \to B$ مورفيزم للفئة ℓ_1

لنثبت أن المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "I_F(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] \arrow[dr, bend left] \arrow[dr, bend right] & F(B) \arrow[d, "F(u)"] \\ F(B) \arrow[r, "I_{F(B)}"'] & F(A) \end{tikzcd}$$

$F(u).I_F(A) \overset{?}{=} I_F(B).F(u) \Rightarrow F(u).I_F(A) = F(u).I_{F(A)} = F(u)$

$= I_{F(B)}.F(u) = I_F(B).F(u)$ ومنه فإن I_F مورفيزم دالي يسمى المورفيزم الدالي المطابق.

الموضوع: .... التاريخ: / ١٤ /

(11) مبرهنة: ليكن $F, G : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ داليين و $f : F \to G$ مورفيزم دالي
الشرط اللازم والكافي كي يكون f ايزومورفيزم دالي هو أن يوجد مورفيزم دالي آخر $g : G \to F$ تحقق $f.g = I_G$ و $g.f = I_F$ وحيد
أي أن المقلوب وحيد

البرهان: لزوم الشرط: لنفرض أنه f ايزومورفيزم دالي عندئذ أياً كان $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ فإن $f(A) : F(A) \to G(A)$ ايزومورفيزم الفئة $\mathcal{C}_2$ وبالتالي يوجد مورفيزم $g(A) : G(A) \to F(A)$ وحيد

$$g(A) . f(A) = I_{F(A)} \quad \text{و} \quad f(A) . g(A) = I_{G(A)}$$

لنعرف $g : G \to F$ بهذا الشكل.
ليكن $u : A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$ ولنأخذ المخطط

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) \\ \downarrow{\scriptstyle G(u)} & & \downarrow{\scriptstyle F(u)} \\ G(B) & \xrightarrow{g(B)} & F(B) \end{array} \quad (*)$$

ولنبرهن على أنه تبديلي

$$F(u) . g(A) = I_{F(B)} \, F(u) . g(A) =$$

~~F(u) . g(A) = g(B) . G(u)~~ كتابة

ولما كان f مورفيزم دالي فإن المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ \downarrow{\scriptstyle F(u)} & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

$$G(u) . f(A) = f(B) . F(u)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= g(B) . (f(B) . F(u)) . g(A) = g(B) . G(u) . (f(A) . g(A)) \\ &= g(B) . G(u) . I_{G(A)} = g(B) . G(u) \end{aligned}}$$

ومنه المخطط * تبديلي وهذا يثبت أن $g : G \to F$ مورفيزم دالي
لما كان

$$g(A) . f(A) = I_{F(A)}$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{C}_1) : \quad (g.f)(A) = I_F(A)$$

$$\boxed{g . f = I_F}$$

وبطريقة مشابهة نجد أنه

$$\boxed{f . g = I_G}$$

كفاية الشرط: لدينا حسب الفرض أنه $f : F \to G$ مورفيزم دالي

$v \le u$, $v \le w$, $u \le w$

التاريخ: / 15 /

الموضوع:

ليكن $A \in ob(\mathcal{C}_1)$، عندئذٍ: $(f.g)(A) = I_G(A)$ و $(g.f)(A) = I_F(A)$

$f(A).g(A) = I_{G(A)}$ ، $g(A).f(A) = I_{F(A)}$

وهذا يبين أن $f(A)$ إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$ ومنه f إيزومورفيزم دالي.

A مجموعة جزئية من B إذا وجد تطبيق متباين

$f: A \to B$

$f: A \to f(A)$

خارجي إذا كان غامر

الأشياء الجزئية:

تعريف: ليكن $\mathcal{C}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{C})$، لنعرف صف المورفيزمات M_A المؤلف من جميع المونومورفيزمات $V \to A$; $\forall V \in ob(\mathcal{C})$

واضح أن M_A غير خالي، لأن $I_A \in M_A$

لنعرف على الصف M_A علاقة ترتيب $(\le)$ بالشكل:

$\forall\ v: V \to A$ و $u: U \to A \in M_A$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v_1"'] & A \\ U \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

$v \le u \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathcal{C}(V,U)$; $u.v_1 = v$

واضح أن v_1 مونومورفيزم لأن v مونومورفيزم

(12) **مبرهنة:** لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{C})$ فإن $u, v \in M_A$ الشروط الآتية متكافئة:

1- $v \le u$

2- يوجد مورفيزم وحيد $v_1 \in \mathcal{C}(V,U)$ يحقق $u.v_1 = v$

البرهان: $\boxed{1 \Rightarrow 2}$: لنفرض أن $v_2 \in \mathcal{C}(V,U)$ يحقق $u.v_2 = v$ عندئذٍ $u.v_1 = u.v_2$

ولما كان u مونومورفيزم نجد أن $v_1 = v_2$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ واضح.

* علاقة الترتيب لا تعرف المساواة يمكن استبدال المساواة بالتماثل

(13) **مبرهنة:** لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{C})$ العلاقة $(\le)$ المعرفة على الصف M_A هي علاقة انعكاسية وتعدية.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "I_V"'] & A \\ V \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

البرهان: ليكن $v: V \to A \in M_A$ ولما كان I_V يحقق $v.I_V = v$

ومنه $v \le v$ أي أن $(\le)$ انعكاسية

ليكن $v: V \to A$ و $u: U \to A$ و $w: W \to A \in M_A$ ولنفرض أن

$v \le u$ و أن $u \le w$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u_1"'] & A \\ W \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v_1"'] & A \\ U \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

لما كان $v \le u\ \exists v_1 \in \mathcal{C}(V,U)$; $u.v_1 = v$

$u \le w\ \exists u_1 \in \mathcal{C}(U,W)$; $w.u_1 = u$

الموضوع: ....   التاريخ: / 6 / /

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u_1 . v_1"'] & A \\ W \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

ومنه نجد أن $w \longrightarrow V$ ، $u_1 . v_1$ مورفيزم للفئة ℓ

وتحقق: $w.(u_1.v_1) = (w.u_1).v_1 = u.v_1 = v$

ومنه نجد أن $w \leq v$ أي أن العلاقة $(\leq)$ متعدية.