3/3/2019

المحاضرة الأولى :

أهلاً بكم أصدقائي في مقرر التحليل العددي (2) .

قد نوهت الدكتورة إلى ضرورة وجود الكتاب لحل الأمثلة بالإضافة إلى الآلة الحاسبة وجدول الأخطاء المطبعية ((موجود في المكتبة وأيضاً على موقعنا SyriaMath))

سنبدأ في الفصل الثاني أولاً ((حل جملة المعادلات الخطية)) من ثم سنعود إلى الفصل الأول "التقريبات"

"الفصل الثاني"

الحل العددي لجملة المعادلات الخطية :

ص 59 من الكتاب [في حال ورود سؤال في الامتحان من هذه المحاضرة قد يأتي بـ 25 درجة كالتالي :

* أوجد قيم α, β, γ كي تكون المصفوفة متناظرة - قطرية ـــــ وهكذا ، وأوجد مركب فيثغوريث .

يأتي السؤال على هذا النمط .

تمهيد: تعريف المصفوفات وأنواعها ((المربعة))

تناظرية:

$A = A^T$

حيث A^T: منقول المصفوفة A

قطرية:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \alpha & i = j \end{cases}$$

كل عناصرها صفرية عدا القطر الرئيسي α

عندما $\alpha = 1$ تكون واحدية

مثلثية:

دنيا، عليا:

$a_{ij} = 0 \; ; \; i > j$

مثلاً المصفوفة:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة مثلثية عليا.

مثلاً المصفوفة:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة مثلثية دنيا.

مسيطرة قطرياً:

$|a_{ii}| \geq \sum |a_{ij}|$

مسيطرة قطرياً تماماً: نلغي حالة المساواة

$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$

معرفة إيجابياً:

أولاً:

1. تناظرية
2. $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

أو:

1) تناظرية
2) جميع المحددات الجزئية القائدية موجبة

مبرهنة: إذا كانت A معرفة إيجابياً ⇐

1- A قابلة للقلب

2- جميع عناصر القطر الرئيسي موجبة

تعريف: طيف مصفوفة:

$\rho(A) = \max\{ |\lambda_i| \; ; \}$ حيث λ_i ذاتية

$\det(A - \lambda I) = 0$

Scanned by CamScanner

مثال(3):

لتكن لدينا المصفوفتان

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

أي من هاتين المصفوفتين مسيطرة قطرياً؟

الحل:

إنّ المصفوفة A تحقق أنّ:

$$\begin{aligned} |7| &> |2| + |0| \\ |5| &> |3| + |-1| \\ |-6| &> |0| + |5| \end{aligned} \qquad (13)$$

ومنه A مسيطرة قطرياً تماماً.

أمّا بالنسبة للمصفوفة B لأنّ $|6| \ngtr |4| + |-3|$

إذن B ليست مسيطرة قطرياً تماماً.

Scanned by CamScanner

سير الهنسي جيشغورين:

لتكن λ_1 قيمة ذاتية $\Leftarrow$ λ_1 تقع ضمن القرص $|a_{11}-\lambda_1| \leq \sum_{k=2}^{3} |a_{1k}| \Leftarrow \lambda_1 \in D_1(a_{11}, -)$

لتكن λ_2 قيمة ذاتية $\Leftarrow$ λ_2 تقع ضمن القرص $|a_{22}-\lambda_2| \leq \sum_{k \neq 2} |a_{2k}| \Leftarrow \lambda_2 \in D_2(a_{22}, -)$

لتكن λ_3 قيمة ذاتية $\Leftarrow$ λ_3 تقع ضمن القرص $|a_{33}-\lambda_3| \leq \sum_{k \neq 3} |a_{3k}| \Leftarrow \lambda_3 \in D_3(a_{33}, -)$

عندئذ: يوجد قرص هو عبارة عن اتحاد جميع الأقراص السابقة بحيث يحوي جميع القيم الذاتية لهذه المصفوفة.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

العنصر القائد هو 2 $|2| = \boxed{2}$ ✓ محقق.

ثم نأخذ المحدد $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{3}$ ✓ محقق، (موجب).

ثم نأخذ المحدد $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{4}$ ✓ محقق

جميع المحددات الجزئية القائدية موجبة فهي معرفة إيجابياً

سنوضح ذلك من خلال طريقة ثانية موجودة في الكتاب ص98

أثبت أن المصفوفة التالية معرفة إيجابياً:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

الحل:

1) من الواضح أنّ $A=A^T$.

2) بفرض أنّ $0\neq x\in M_{3\times1}(R)$

$$x^T A x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\ -x_1+2x_2-x_3\\ -x_2+2x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2>0$$

ما لم يكن $x_1=x_2=x_3=0$.

مبرهنة(1):

بفرض $A\in M_n(R)$ مصفوفة معرفة إيجابياً عندئذٍ

1) A قابلة للقلب.

2) جميع عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً.

مبرهنة(2):

إنّ حل الجملة $AX=b$ موجود ووحيد إذا كانت مصفوفة الأمثال غير شاذة أي $\det(A)\neq0$.

تعريف(10):

بفرض $A\in M_n(R)$، نسمي مجموعة قيم λ التي تحقق المعادلة:

$$Ax=\lambda x\quad ;x\neq0$$

بالقيم الذاتية Eigenvalues الموافقة للمصفوفة A أو طيف المصفوفة A **Matrix** **Spectrum**، ونسمي الشعاع x بالشعاع الذاتي **Eigenvector** الموافق للقيمة

Scanned by CamScanner

الذاتية λ.

ملاحظة:

يوجد للمعادلة $Ax = \lambda x \quad ; x \neq 0$ حل غير صفري إذا كان

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

تُسمى المساواة الأخيرة بالمعادلة المميزة للمصفوفة A أو كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A ويرمز لها بـ $P_n(\lambda)$ حيث n بعد المصفوفة A.

تعريف(11):

بفرض $A \in M_n(R)$، نسمي العدد

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \quad Ax = \lambda x \; ; x \neq 0\}$$

بنصف القطر الطيفي **spectral radius** للمصفوفة A.

مثال(5):

أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ثم عين القيم الذاتية والأشعة الذاتية ونصف القطر الطيفي للمصفوفة A.

الحل:

$$P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

وعليه فإن $\{2,3\}$ هي مجموعة القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A.

لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة لـ A نعوض في العلاقة

$$Ax = \lambda x$$

أي:

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$(4-\lambda)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

بتعويض $\lambda = 2$ في العلاقة الأخيرة نجد أنّ:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

أي إنّ x_2 اختياري.

نختار $x_2 = 1$ فيكون $x_1 = \frac{1}{2}$ وبناءً عليه فإنّ الشعاع الذاتي الموافق للقيم الذاتية $\lambda = 2$ هو $x = (1 \quad 2)^T$، وبأسلوب مشابه لما سبق نجد أنّ الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 3$ هو $x = (1 \quad 1)^T$.

لنوجد الآن نصف القطر الطيفي للمصفوفة A

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \quad Ax = \lambda x \; ; x \neq 0\} = \max\{2,3\} = 3$$

Scanned by CamScanner

مثال(6):

أوجد أقراص جيشغورين الموافقة للمصفوفة

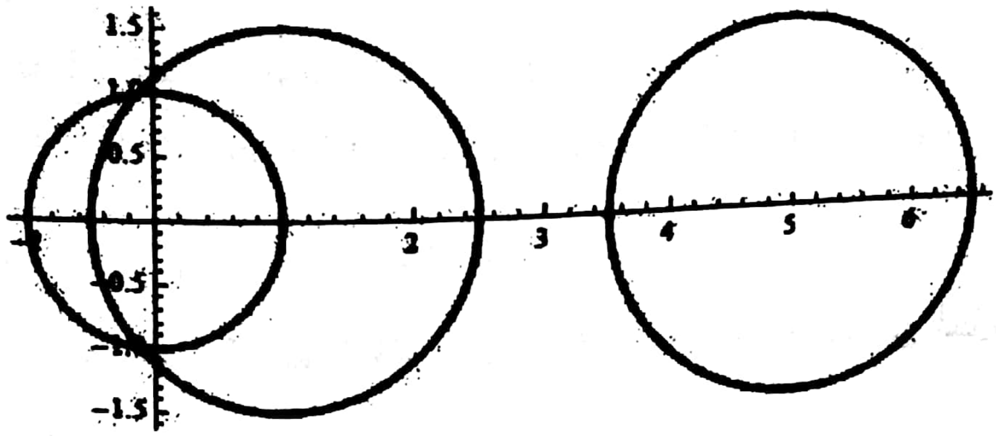
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$a_{11} = 0 \Rightarrow |a_{11} - \lambda| \le \sum_{k=2}^{3} |a_{1k}| = 1 \Rightarrow D_1(0,1)$$

$$a_{22} = 5 \Rightarrow |a_{22} - \lambda| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{3} |a_{2k}| = \frac{3}{2} \Rightarrow D_2\left(5, \frac{3}{2}\right)$$

$$a_{33} = 1 \Rightarrow |a_{33} - \lambda| \le \sum_{k=1}^{2} |a_{3k}| = \frac{3}{2} \Rightarrow D_3\left(1, \frac{3}{2}\right)$$



الشكل(1)

ملاحظة:

في المثال السابق نجد بالحساب أنّ طيف المصفوفة A هو المجموعة:

$$\{\lambda_1 = -0.209, \lambda_2 = 5.305, \lambda_3 = 0.904\}$$

نلاحظ أنّ

$$\lambda_1, \lambda_3 \in D_1 \cap D_3, \lambda_2 \in D_2$$

Scanned by CamScanner

مبرهنة(4) (جيشغورين المحددة):

إنّ اتحـاد أقـراص جيـشغورين لمـصفوفة مربعـة A يحـوي جميـع القـيم الذاتيـة الموافقة لهذه المصفوفة.

مثال(7):

أوجد حداً أعلى للقيم الذاتية الموافقة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

حسب مبرهنة جيشغورين المحددة فإنّ اتحاد جميع الأقراص

$$D_j\left(a_{jj}, d_j\right) = \left\{ \left|a_{jj} - \lambda\right| \le d_j \quad ; d_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} \left|a_{jk}\right| \wedge j = 1, \ldots, n \right\}$$

يجب أن يحوي جميع القيم الذاتية

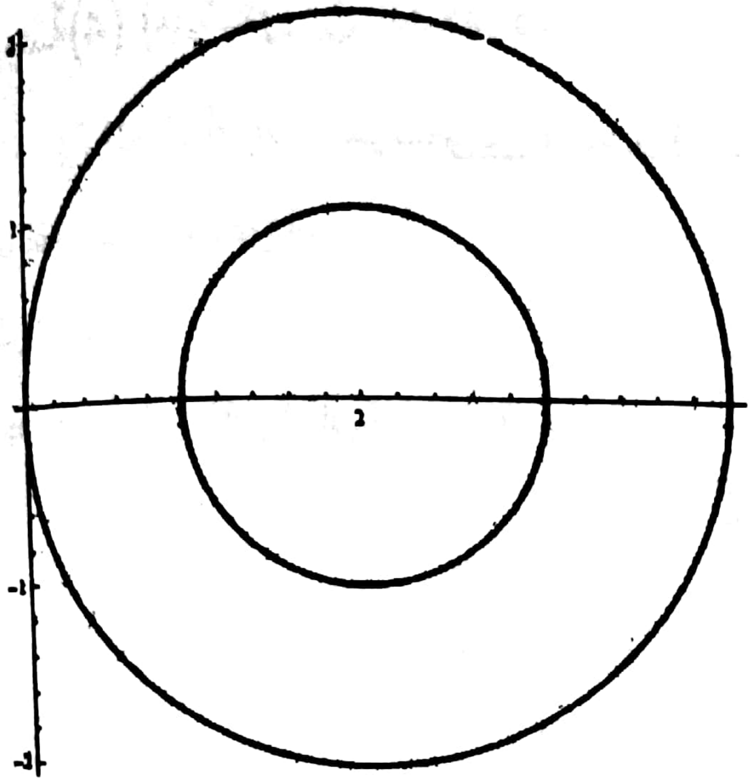
$$n = 4$$

$$j = 1,4 \Rightarrow |2 - \lambda| \le 1 \Rightarrow D_1(2,1)$$

$$j = 2,3 \Rightarrow |2 - \lambda| \le 2 \Rightarrow D_2(2,2)$$

بما أنّ A تناظرية فإنّ جميع القيم الذاتية حقيقية وعليه:

Scanned by CamScanner



$$D_1 \cup D_2 = D_2 = D_2(2,2)$$
$$\lambda \in D_2 \Rightarrow 0 \le \lambda \le 4$$

وعليه فإنّ $\lambda = 4$ حدّ أعلى للقيم الذاتية.

ويمكن التحقق من ذلك بحساب القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A والتي تُعطى بالشكل:

$$\{\lambda_1 = 3.618, \lambda_2 = 2.618, \lambda_3 = 1.382, \lambda_4 = 0.382\}$$

ملاحظة:

تفيد المبرهنة الأخيرة في إيجاد الحدود العليا للقيم الذاتية وبالتالي تساعد على إيجاد الحد الأعلى لنصف القطر الطيفي.

تعريف(12) (نظيم شعاع):

يُعرّف نظيم شعاع بأنّه التطبيق

$$\|\cdot\| : R^n \to R^+ = [0, +\infty[$$

الّذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|x\| > 0 \quad if \quad x \neq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|c\,x\| = |c|\,\|x\|$
4. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Scanned by CamScanner

أمثلة على نظائم الأشعة:

1) نظيم القيمة المطلقة أو ℓ_1:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2) النظيم الإقليدي أو ℓ_2:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

3) نظيم الـ max أو ℓ_∞

$$\|x\|_\infty = \max_{0 \le i \le n} |x_i|$$

مثال(8):

بفرض أنه لدينا الشعاع $x = (4 \ 4 \ -4 \ 4)^T$ أوجد $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$.

الحل:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = 16$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} |x_i|^2} = 8$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4} \{|x_i|\} = 4$$

تعريف(13) (نظيم مصفوفة):

يُعرّف نظيم مصفوفة بأنّه التطبيق:

$$\|\cdot\| : M_{m \times n}(R) \to R^+ = [0, +\infty[$$

فضاء المصفوفات

الذي يحقق الشروط التالية:

1. $\|A\| > 0 \quad if \quad A \neq 0$
2. $\|cA\| = |c| \|A\|$
3. $\cancel{\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|}$ $\quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
4. $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

Scanned by CamScanner

النظائم المرتبة جزئياً لمصفوفة:

$\|A\|_1 = \max \sum |a_{ik}|$ على الأعمدة

أنظمة ذاتية للمصفوفة هي $B = A^t A$

$\|A\|_2 = \sqrt{\max \{ |\lambda_i|, \dots \}}$

$\|A\|_\infty = \max \sum |a_{ik}|$ على الأسطر

مبرهنة:

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

مبرهنة:

$$\rho(A) \leq 1 \iff \|A\| < 1$$

العدد الشرطي للمصفوفة:

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + \dots = b_2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

تكون الجملة جيدة $\mathrm{Cond}(A) \simeq 1$

وخلاف ذلك هي مريضة

تقريباً $= 1$ (نستطيع القول بين الصفر والواحد)

سؤال: ليكن لدينا $AX = B$ تم إدخال الجملة للحاسوب

$\mathrm{Cond}(A) = \frac{1}{2}$ وتم حلها بالطرائق العددية تفاجئت

أن الجملة مستقلة الحل. لماذا ؟؟!!

لا يوجد علاقة بينهما (النتائج مختلفة)

هي جيدة (لأنها بين الصفر والواحد) ونتائجها سليمة وصحيحة

وهي مستقلة لأنها مستقلة الحل.

Scanned by CamScanner

مثال(9): احسب $\|A\|_1$ ، $\|A\|_2$ ، $\|A\|_\infty$ للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

الحل:

$$\|A\|_1=\max_j \sum_i |a_{ij}| = \max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}| = \max\{4,4,4\}=4$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\max_i\{|\lambda_i|\}} \quad ;\lambda_i\in\lambda\left(A^T.A\right)$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$\det\left(AA^T - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.0616 \\ \lambda_2 = 5.0256 \\ \lambda_3 = 12.9128 \end{cases}$$

ومنه:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \{|\lambda_i|\}} = \sqrt{12.9128} \approx 3.5934$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{3, 5, 4\} = 5$$

Scanned by CamScanner

ك، دورة

مثال(10):

بفرض $0 < \varepsilon$ (مقدار مثبت) ولتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1) أوجد A^{-1} بالنسبة لنظيم ℓ_∞ على R^n.

Scanned by CamScanner

2) أوجد حداً أدنى للعدد الشرطي الموافق للمصفوفة A إذا علمت أنّ $\varepsilon \le 0.01$.

الحل:

(1

$$A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & -1-\varepsilon \\ -1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_{1\le i\le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{2+\varepsilon, 2-\varepsilon\} = 2+\varepsilon$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \varepsilon^{-2}(2+\varepsilon)$$

وعليه

$$cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$$= (2+\varepsilon)\varepsilon^{-2}(2+\varepsilon) = \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2$$

(2

$$\varepsilon \le 0.01 \Rightarrow \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2 \ge 4041$$

وعليه

$$cond_\infty(A) \ge 4041$$

وبذلك يكون 4041 حد أدنى للعدد الشرطي لـ A وفق نظيم ℓ_∞، أي إنّ العدد الشرطي كبير نسبياً فالجملة التي تكون A مصفوفة أمثالها مريضة.

انتهت المحاضرة

هديل سعيد - كمال الرفاعي

٧/٣/٢٠١٩م

المحاضرة الثانية ★

دكتورة المادة: برلنت محمد

عنوان المحاضرة: حل جملة معادلات خطية !!!

المحتوى العلمي:

طرائق حل جملة معادلات خطية بالإضافة إلى أمثلة

لنبدأ الآن

ليكن لدينا

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

معادلات درجة (١)

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

مربعة

طرائق تكرارية

طرائق مباشرة

طرائق LU

غاوس

غاوس جوردن

المرتكز

المرتكز الجزئي

المرتكز الجزئي الدرجي

* طريقة المركز الجزئي : الطرف الثاني لاعلاقة له
تعتمد على ما يلي : ١- نختار أكبر قيمة من العامود الأول (بالطرف الأول)
بالقيمة المطلقة
٢- نجعل أكبر قيمة هي الفصل القائد بإجراء تبديل بين الأسطر
ثم نحل حسب غاوس
* طريقة المركز الجزئي الدرجي : هامة من دورة 20 علامة
١- نوجد أكبر قيمة (بالقيمة المطلقة) بين الأسطر

$$S_i = \max \{ |a_{ik}| \ldots \}$$

٢- $\max \dfrac{|a_{ij}|}{S_i}$

٣- نجري التحويل بين الأسطر على أساس الأكبر
٤- نعود إلى غاوس
٥- نطبق الطريقة مرة ثانية على الأسطر المتبقية

Scanned by CamScanner

مثال(12):

حل جمل المعادلات الآتية باستخدام طريقة غاوس المعدّلة:

-1

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4$$

-2

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

-3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

الحل:

-1

Scanned by CamScanner

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8\\ 2 & -2 & 3 & -3 & \vdots & -20\\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & -2\\ 1 & -1 & 4 & 3 & \vdots & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2-2R_1\\ R_3 \to R_3-R_1\\ R_4 \to R_4-R_1\end{array}$$

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8\\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4\\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6\\ 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 12\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_3\\ R_4 \to R_4+2R_3\end{array}$$

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8\\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 4\end{pmatrix}$$

فالجملة الناتجة:

نبدأ من الأدنى إلى الأعلى

$$2x_4=4\Rightarrow x_4=2$$
$$x_3+x_4=4\Rightarrow x_3=4-x_4=2\Rightarrow x_3=2$$
$$2x_2-x_3+x_4=6\Rightarrow x_2=3$$
$$x_1-x_2+2x_3-x_4=-8\Rightarrow x_1=-7$$

ومنه حل الجملة

$$X=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 2 & 2\end{pmatrix}^T$$

-2

الحل:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 4\\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 4\\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 6\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2-2R_1\\ R_3 \to R_3-R_1\end{array}$$

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -4\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2\end{pmatrix}$$

ومنه:

Scanned by CamScanner

$$\Leftarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

وهـذا مـستحيل إذن الجملـة مـستحيلة الحل.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

-3

الحل:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$
$$R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$x_3 = 2 \Leftarrow \begin{cases} -x_3 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

وعليه فإنّ $x_2 = 2 - x_1$ حيثُ x_1 اختيـاري إذن للجملـة عـدد لانهـائي من الحلول.

مساوئ طريقة غاوس المعدّلة: للإطلاع

1) الكلفة الحسابية العالية لهذه الطريقة حيثُ تبلغ هذه الكلفة $n^3/3$ من أجل n كبيرة جداً .

2) لا يمكن تطبيقها بشكل مباشر عندما يكون أحد عناصر القطر الرئيسي صفر.

3) تعاني من حساسية عالية لأخطاء التدوير .

ملاحظة:

إذا كان أحد عناصر القطر الرئيسي مساوياً للصفر فإننا نقوم بإعادة ترتيب الأسطر بحيث نجعل جميع عناصر القطر الرئيسي غير مساوية للصفر وذلك قبل البدء بتطبيق غاوس المحسنة.

Scanned by CamScanner

مثال(13):

حل جملة المعادلات الآتية بطريقة غاوس المحسنة

$$8x_2+2x_3=-7$$
$$3x_1+5x_2+2x_3=8$$
$$6x_1+2x_2+8x_3=26$$

الحل:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}0&8&2&\vdots&-7\\3&5&2&\vdots&8\\6&2&8&\vdots&26\end{pmatrix}$$

بما أنّ $a_{11}=0$ فإنّه لا يمكن تطبيق غاوس المحسنة بشكل مباشر لذلك نجري التحويل $R_i \leftrightarrow R_j$ أي نبادل بين السطرين الأول والثاني وعليه فإننا نحصل على المصفوفة المكافئة.

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}3&5&2&\vdots&8\\0&8&2&\vdots&-7\\6&2&8&\vdots&26\end{pmatrix}\qquad R_3\to R3-2R_1$$

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}3&5&2&\vdots&8\\0&8&2&\vdots&-7\\0&-8&4&\vdots&10\end{pmatrix}\qquad R_3\to R_3+R_2$$

$$\tilde{A}\sim\begin{pmatrix}3&5&2&\vdots&8\\0&8&2&\vdots&-7\\0&0&6&\vdots&3\end{pmatrix}$$

وبذلك تصبح الجملة بالشكل:

$$3x_1+5x_2+2x_3=8\Rightarrow x_1=4$$
$$8x_2+2x_3=-7\Rightarrow x_2=-1$$
$$6x_3=3\Rightarrow x_3=0.5$$

أي إنّ حل الجملة هو

$$X=(4\quad -1\quad 0.5)^T$$

Scanned by CamScanner

3-1-2- طريقة غاوس جوردان:

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية $AX=b$ حيثُ $\det(A)\neq 0$ تقوم طريقة غاوس جوردان لإيجاد حل هذه الجملة على الخطوات التالية:

1) توسيع مصفوفة الأمثال

$$\tilde{A}=\Big(\underbrace{A}_{I} \;\;\vdots\;\; \underbrace{b}_{II}\Big)$$

حيثُ A مصفوفة الأمثال، b عمود الثوابت.

2) نحول الجزء I من المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ إلى مصفوفة قطرية وذلك

- بجعل العناصر التي تحت القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \leftrightarrow R_j-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}R_i \quad ;\begin{cases} j=i+1,\ldots,n \\ i=1,2,\ldots,n-1 \\ a_{ii}\neq 0 \end{cases}$$

- بجعل العناصر التي فوق القطر الرئيسي لـ A أصفاراً وذلك باستخدام التحويلات السطرية التالية:

$$R_j \leftrightarrow R_j-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}R_i \quad ;\begin{cases} j=1,\ldots,i-1 \\ j=1,2,\ldots,i-1 \\ a_{ii}\neq 0 \end{cases}$$

أي:

$$(A\,|\,b)\xrightarrow{\text{Gauss Jordan}}(U\,|\,C)$$

3) نحل الجملة الناتجة.

مثال(14):

حل جملة المعادلات الآتية بطريقة غاوس جوردان

* سوف يتم ذكر الطريقة التي سنستخدمها في الامتحان:

Scanned by CamScanner

$$x - y + 4z = 16$$
$$3x + 2y + z = 18$$
$$x + 4y - 2z = 12$$

الحل:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 18 \\ 1 & 4 & -2 & 12 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$$

ومنه:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -11 & -30 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \end{array}\right) \qquad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -11 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + \frac{11}{5} R_3 \\ R_1 \to R_1 - \frac{4}{5} R_3 \end{array}$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & -4.8 \\ 0 & 5 & 0 & 27.2 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{array}\right) \qquad R_1 \to R_1 + \frac{1}{5} R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0.64 \\ 0 & 5 & 0 & 27.2 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{array}\right)$$

وبذلك نحصل على الجملة

عناصر القطر الرئيسي تعدم العناصر التي فوقه و تحته

$$x = 0.64$$
$$5y = 27.2 \Rightarrow y = 5.44$$
$$5z = 26 \Rightarrow z = 5.2$$

مساوئ طريقة غاوس جوردان: للإطلاع

أبرز مساوئ هذه الطريقة الكلفة الحسابية العالية جداً والتّي لا يبررها إلا كون هذه الطريقة تساعدنا وبشكل كبير جداً على إيجاد معكوس مصفوفة غير شاذة.

Scanned by CamScanner

3-1-3- تقنيات المرتكز Pivoting Strategies:

تُدعى العناصر $\{a_{ii}\}_{1\le i\le n}$ في مصفوفة موسعة $\tilde{A}$ موافقة لجملة معادلات خطية بالعناصر الرائدة (Pivots).

إذا كان أحد العناصر الرائدة على الأقل صغيراً نسبياً بالنسبة لعناصر عموده فإنّ طريقة غاوس المعدلة تفشل الأمر الذي يمكن توضيحه من خلال المثال التالي:

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} E_1 : 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2 : 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \end{cases} \qquad (16)$$

من الواضح أنّ حل هذه الجملة وفق الطرائق المباشرة هو $x_1 = 10 , x_2 = 1$.

سنقوم فيما يلي بحل هذه الجملة باستخدام طريقة غاوس مع ملاحظة أنّ العنصر الرائد في العمود الأول 0.003 صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده.

إنّ المصفوفة الموسعة الموافقة للجملة السابقة هي

$$R_2 \to R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & : & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & : & 46.78 \end{pmatrix} \qquad m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.6\overline{6} \approx 1764$$

ومنه:

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & : & 59.17 \\ 0 & -104300 & : & -104400 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$0.003x_1 + 59.14x_2 \approx 59.17$$

$$-104300x_2 \approx -104400 \Rightarrow x_2 \approx \underline{1.001}$$

ومنهُ

رقم صغير
مع رقم كبير

$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003} = \underline{-10}$$

يُمكننا بسهولة ملاحظة أنّ القيمة التقريبية لـ x_2 قريبة من القيمة الفعلية لـ x_2 بينما

Scanned by CamScanner

قيمة x_1 التقريبية بعيدة جداً عن قيمة x_1 الفعلية وذلك لأنّ العنصر الرائد a_{11} صغير نسبياً بالنسبة إلى a_{21}

مما يعني أنّ طريقة غاوس المعدلة تفشل.

وللتخلص من هذه المشكلة(الفشل الناتج عن كون أحد العناصر الرائدة صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده) يتم تطبيق

3-1-3-1- تقنيات المرتكز الجزئي Partial Pivoting:

والتّي تقوم على تطبيق الخطوات التالية على كل عمود يكون عنصره الرائد صغيراً نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده

1) نختار أكبر عنصر(بالقيمة المطلقة) من العناصر الواقعة تحت العنصر الرائد لمصفوفة موسعة موافقة لجملة معادلات الخطية أي:

$$|a_{ik}| = \max_{k \le j \le n} |a_{jk}|$$

حيثُ k رقم سطر العنصر الرائد، n عدد أسطر المصفوفة الموسعة.

2) نبدل السطر (i) والسطر (k) أي $R_i \leftrightarrow R_k$.

سنقوم فيما يلي بتطبيق تقنية المرتكز الجزئي احل جملة المعادلات الخطية السابقة (16).

وجدنا أنّ المصفوفة الموسعة الموافقة للجملة السابقة هي:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \end{pmatrix}$$

ولاحظنا أنّ العنصر الرائد في العمود الأول $a_{11} = 0.003$ صغير نسبياً بالنسبة لبقية عناصر عموده وعليه

$$\max\{|a_{11}|,|a_{21}|\} = \max\{|0.003|,|5.291|\} = |5.291| = |a_{21}|$$

وعليه

$$R_2 \leftrightarrow R_1$$

Scanned by CamScanner

وبذلك تصبح المصفوفة الموسعة بالشكل:

$$A' = \begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & \vdots & 59.17 \end{pmatrix}$$

لنطبق الآن طريقة غاوس المعدلة

$$R_2 \to R_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} R_1$$

$$\frac{a'_{21}}{a'_{11}} = \frac{0.003}{5.291} = 0.000567$$

وعليه:

$$\begin{pmatrix} 5.291 & -6.13 & \vdots & 46.78 \\ 0 & 59.14 & \vdots & 59.17 \end{pmatrix}$$

بالمتابعة نجد أنّ الحل التقريبي

$$\boxed{(x_1 = 10, x_2 = 1)}$$

الأمر الذي يعني أنّ تقنية المرتكز الجزئي قد ساعدتنا في تحسين طريقة غاوس المعدلة وذلك في حال كان أحد العناصر الرائدة صغيراً نسبياً بالنسبة لبقية العناصر.

أمّا الآن فإننا سنستعرض تقنية أخرى من تقنيات المرتكز الجزئي لتحسين غاوس المعدلة وهي تقنية

3-1-3-2- تقنيات المرتكز الجزئي الدرجي **Scaled Partial Pivoting:**

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية

$$AX = b$$

تُدعى $\tilde{A} = (A \mid b)$ المصفوفة الموسعة الموافقة لهذه الجملة التي عدد أسطرها n.

تقوم تقنية المرتكز الجزئي الدرجي على تطبيق الخطوات التالية وذلك من أجل $j = 1, 2, \ldots, n-1$:

1) نوجد المجموعة

Scanned by CamScanner

$$\left\{S_i\;;S_i=\max_{j\le k\le n}\left\{|a_{ik}|\right\}\right\}_{j\le i\le n}$$

2) نوجد

$$\max_{j\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$$

ومنه

$$\exists\omega\in Z^{+}\quad;\max_{j\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}=\frac{|a_{\omega j}|}{S_\omega}$$

3) نجري التحويل

$$R_j\leftrightarrow R_\omega$$

4) نطبق طريقة غاوس المعدلة على المصفوفة الناتجة عن التحويل.

مثال(15):

حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة غاوس المعدلة وتقنية المرتكز الجزئي:

$$3x_1-4x_2+5x_3=-1$$
$$-3x_1+2x_2+x_3=1$$
$$6x_1+8x_2-x_3=35$$

الحل

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&5&-1\\-3&2&1&1\\6&8&-1&35\end{array}\right)$$

ملاحظة: العامود b لا علاقة له باختيار العنصر الأكبر من كل سطر

الخطوة الأولى (من أجل $j=1$):

نوجد المجموعة

شرح توضيحي:

أولاً: نأخذ العنصر الأكبر من كل سطر بالقيمة المطلقة

مثلاً: العنصر الأكبر هو (5) في السطر (1) وفي السطر (2) هو (3) وفي السطر (3) هو 8

ومن ثم نقسم العنصر الكبير من كل سطر على العامود الأول أي نقسم

العنصر الكبير من السطر الأول على العنصر a_{11} من العامود الأول $\begin{bmatrix}3\\-3\\6\end{bmatrix}$

و ~ ~ ~ الثاني ~ a_{21} ~ ~ ~

و ~ ~ ~ الثالث ~ a_{31} ~ ~ ~

أي $\frac{|3|}{|5|}$ و $\frac{|-3|}{|3|}$ و $\frac{|6|}{|8|}$ وهكذا ....

Scanned by CamScanner

$$\left\{S_i\ ;S_i=\max_{1\le k\le 3}\{|a_{ik}|\}\right\}_{1\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 & \max\limits_{1\le k\le 3}\{|a_{1k}|\}=5 \\ S_2 & \max\limits_{1\le k\le 3}\{|a_{2k}|\}=3 \\ S_3 & \max\limits_{1\le k\le 3}\{|a_{3k}|\}=8 \end{array}\right\}\Rightarrow\{5,3,8\}$$

نوجد

$$\max_{j\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|}{S_i}\right\}$$

بدايةً نوجد المجموعة

$$\left\{\frac{|a_{i1}|}{S_i}\right\}_{1\le i\le 3}$$

- المقارنة تتم بين العناصر الأولى من كل عامود.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|a_{11}|}{S_1}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{|a_{21}|}{S_2}=\dfrac{3}{3}=1 \\ \dfrac{|a_{31}|}{S_3}=\dfrac{6}{8} \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\frac{3}{5},1,\frac{6}{8}\right\}$$

نوجد الآن العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة

$$\max\left\{\frac{3}{5},1,\frac{6}{8}\right\}=1$$

نجري التحويل $R_1\leftrightarrow R_2$ وعليه تصبح المصفوفة $\tilde{A}$ بالشكل:

$$\tilde{A}^*=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & -4 & 5 & \vdots & -1 \\ 6 & 8 & -1 & \vdots & 35 \end{pmatrix}$$

نطبق غاوس المعدلة على المصفوفة الأخيرة فنجد

بإجراء التحويلات التالية:

$R_2 \longrightarrow R_2 + R_1$

$R_3 \longrightarrow R_3 + 2R_1$

Scanned by CamScanner

$$\tilde{A}^{*} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & +6 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 37 \end{array}\right)$$

الخطوة الثانية(من أجل $j=2$):

نوجد المجموعة

$$\left\{S_i' \,; S_i' = \max_{2\le k\le 3}\left\{\left|a_{ik}^{*}\right|\right\}\right\}_{2\le i\le 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{2\le k\le 3}\left\{\left|a_{2k}^{*}\right|\right\} = 6 \\ \max\limits_{2\le k\le 3}\left\{\left|a_{3k}^{*}\right|\right\} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \{6,12\}$$

نوجد

$$\max_{2\le i\le n}\left\{\frac{\left|a_{ij}^{*}\right|}{S_i}\right\}_{2\le i\le 3}$$

بدايةً نوجد المجموعة

$$\left\{\frac{\left|a_{i2}^{*}\right|}{S_i'}\right\}_{2<i<3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\left|a_{22}^{*}\right|}{S_2'} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\left|a_{32}^{*}\right|}{S_3'} = \dfrac{12}{12} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{1}{3},1\right\}$$

نوجد الآن العنصر الأعظمي للمجموعة الأخيرة

$$\max\left\{\frac{1}{3},1\right\} = 1 = \frac{\left|a_{31}^{*}\right|}{S_3'}$$

نجري التحويل $R_2 \leftrightarrow R_3$ وعليه تصبح المصفوفة $\tilde{A}^{*}$ بالشكل:

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 12 & 1 & \vdots & 37 \\ 0 & -2 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

- نجري التحويل التالي :

$$R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{6} R_2$$

فينتج المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & 37 \\ 0 & 0 & \frac{37}{6} & \frac{37}{6} \end{array}\right]$$

نطبق غاوس المعادلة في المصفوفة الأخيرة فتحصل في الجملة :

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$12x_2 + x_3 = 37$$

$$\frac{37}{6} x_3 = \frac{37}{6}$$

بتطبيق طريقة التعويضات التراجعية في الجملة الأخيرة نجد :

$x_1 = 2$

$x_2 = 3$

$x_3 = 1$

Scanned by CamScanner

تصويب الخطأ الوارد في المحاضرة الأولى:

صفحة $\boxed{11}$ آخر ثلاث أسطر:

نظيم المصفوفة:

$$\|\cdot\| : M \longrightarrow \mathbb{R}^{+} = [0,\infty[$$

يحقق الشروط الثلاث:

1- $\|A\| > 0$ if $A \neq 0$

2- $\|cA\| = |c|\,\|A\|$

3- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

لكن سوف نتطرق للملاحظة التالية:

$$\|A\cdot B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$$

$$\forall A,B \in \underline{M_n}(\mathbb{R})$$

أي يجب أن تكون المصفوفة مربعة.

*نعتذر عن ورود هذا الخطأ.

انتهت المحاضرة

Hadeel Saeed

Kamal Al-Refae

SyriaMath Team

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

11/3/2019

المحاضرة الثالثة:

دكتورة المادة: بركات مطيط

عنوان المحاضرة: الحل العددي لجملة المعادلات الخطية.

المحتوى العلمي:

توضيح طرائق LU (كروات - دوليتل - شولسكي)
والطرائق التكرارية (جاكوبي وغاوس سيدل)

* الحل العددي لجملة المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$AX = B \;;\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

طرائق مباشرة — طرائق تكرارية

طرائق مباشرة: غاوس — المرتكز — طرائق LU

Scanned by CamScanner

طرائق LU :

1- كراوت LU ص127 :

$$A = L \cdot U$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثية دنيا

مثلثية عليا وعناصر القطر هي (1)

2- دولتيل ص131 :

$$A = L \cdot U$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} \\ 0 & 1 & l_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

مثلثية عليا

مثلثية عليا بالإضافة لعناصر القطر الرئيسي هي (1)

3- تشولسكي ص136 : معرفة وإيجابية (من أخذها متنا ظرة)

$$A = L \cdot U = L \cdot L^T$$

متحول L

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

* بدلنا كل عمود من L بـ سطر في (L^T)

Scanned by CamScanner

- بالنسبة لتشولسكي إذا لم تطلب الدكتورة في الامتحان أثبت أنها موجبة إيجابياً لانثبتها بل نبدأ بالحل مباشرة.
- ولوحظ أنه لا يأتي مصفوفة أكثر من A_{33} .
- والتعريف يكون عادة في الامتحان إلى 5 منازل عشرية.

* بفرض أننا استطعنا التعريف لا تحل الطرق الثلاث ((وطلب إيجاد الحل لجملة المعادلات:

- خوارزمية الحل:

1) $AX = B$

2) $L\,U.X = B$

3) $Z = U\,X$ نفرض أن

نعود إلى 4) $L.Z = B$ ونوجد Z

نعود إلى 3) ونعوض فنجد X مصفوفة المجاهيل 5)

تذكرة! نحصل على منقول مصفوفة بجعل كل عامود من المصفوفة الأصلية سطراً في مصفوفة المنقول.

بما أنه مطلوب الحل فيجب اتباع خوارزمية الحل.

مثال(16):

أوجد حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + 3y - z &= 6 \\ 3x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

وفق طريقة كراوت بدقة ثلاث منازل عشرية.

الحل:

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{11} = a_{11} = 1 \, , \ell_{21} = a_{21} = 4 \, , \ell_{31} = a_{31} = 3$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 1 \, , u_{12} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1$$

وعليه نجد

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \ell_{22} & 0 \\ 3 & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

يمكن إيجادها دائماً عن طريق ضرب المصفوفات العادي

$$\ell_{22} = a_{22} - \ell_{21} u_{12} = -1$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - \ell_{21} u_{12}}{\ell_{22}} = 5$$

وعليه

Scanned by CamScanner

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&\ell_{32}&\ell_{33}\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&-1\\3&5&3\end{pmatrix}$$

$$\ell_{32}=2\quad,\quad \ell_{33}=\text{-١٠}$$

وعليه

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&\text{-١٠}\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&-1\\3&5&3\end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على الجملة

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&\text{-١٠}\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}UX=Z\\LZ=b\end{cases}$$

$$LZ=b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\3&2&\text{-١٠}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}_{Z}=\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}$$

ومنهُ

$$x'=1$$
$$4x'-y'=6$$
$$3x'+2y'-10z'=4$$

وبحل هذه الجملة نجد أنّ

Scanned by CamScanner

$$x' = 1$$
$$y' = -2$$
$$z' = -0.5$$

وعليه

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -0.5 \end{pmatrix}^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$x + y + z = 1$$
$$y + 5z = -2$$
$$z = -0.5$$

وبحل هذه الجملة نجد أنّ

$$x = 1$$
$$y = 0.5$$
$$z = -0.5$$

وعليه

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}^T$$

وهو المطلوب.

Scanned by CamScanner

مثال(17):

بفرض أنّه لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1) فرق هذه المصفوفة وفق دوليتل.

Scanned by CamScanner

2) استفد من الطلب السابق في حل جملة المعادلات الخطية $AX=b$ حيثُ

$$b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$$

الحل:

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \ell_{21} & 1 & 0\\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1\end{pmatrix}\ ,\ U=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$u_{11}=a_{11}=1\,,u_{12}=a_{12}=1\,,u_{13}=a_{13}=-1$$

$$\ell_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=1\,,\ell_{12}=\frac{a_{13}}{a_{11}}=-2$$

وعليه نجد

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & \ell_{32} & 1\end{pmatrix}\ ,\ U=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$u_{22}=a_{22}-\ell_{21}u_{21}=1$$

$$u_{23}=a_{23}-\ell_{21}u_{12}=-1$$

ومنهُ:

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & \ell_{32} & 1\end{pmatrix}\ ,\ U=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & u_{33}\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\ell_{32}=\frac{a_{32}-\ell_{31}u_{12}}{u_{22}}=3\quad ,\quad u_{33}=a_{33}-\ell_{31}u_{12}-\ell_{32}u_{23}=2$$

وعليه

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\ ,\ U=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

وبذلك نحصل على الجملة

Scanned by CamScanner

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} UX = Z \\ LZ = b \end{cases}$$

$$LZ = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{Z}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وحسب طريقة التعويضات المتقدمة نجد أن:

$$x' = 1$$
$$y' = 0$$
$$z' = 3$$

وعليه

$$Z = (1 \quad 0 \quad 3)^T$$

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

وبتطبيق طريقة التعويضات التراجعية نجد أنّ

$$x = 1$$
$$y = \frac{3}{2}$$
$$z = \frac{3}{2}$$

وعليه $X = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$

Scanned by CamScanner

مثال(18):

حل جملة المعادلات الخطية الآتية وفق طريقة تشوليسكي:

$$4x + 2y + 14z = 14$$

$$2x + 17y - 5z = -101$$

$$14x - 5y + 83z = 155$$

الحل:

Scanned by CamScanner

نكتب المصفوفة A (مصفوفة الأمثال) وفق طريقة تشوليسكي:

$$A = LU = LL^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2 , \ell_{21} = \frac{a_{21}}{\ell_{11}} = 1 , \ell_{31} = \frac{a_{31}}{\ell_{11}} = 7$$

$$\ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = 4$$

$$\ell_{32} = \frac{a_{32} - \ell_{31}\ell_{21}}{\ell_{22}} = -3$$

$$\ell_{33} = \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = 5$$

وبذلك تصبح جملة المعادلات بالشكل

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{pmatrix}}_{b}$$

ولحل هذه الجملة نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} UX = Z \\ LZ = b \end{cases}$$

$$LZ = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{Z} = \begin{pmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$Z = (7 \quad -27 \quad 5)^T$$

Scanned by CamScanner

لنحل الآن الجملة

$$UX = Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}^T$$

وهو المطلوب.

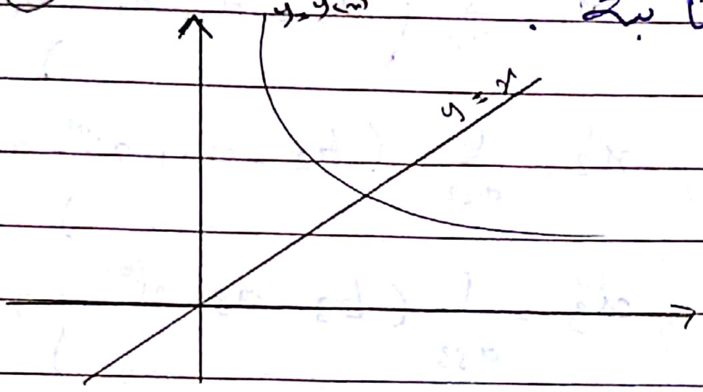
Scanned by CamScanner

* حل جملة معادلات خطية (عددياً)

تحليل عددي (1)

* الطرائق التكرارية :

- تعتمد على فكرة النقطة الثابتة.
(مجهول واحد).



$$f(x)=0 \iff x=g(x)$$

شرط أن يوجد حل هو $\max|g'| < 1$

شرط التوقف $|x_{new} - x_{old}| < 10^{-2}$

$$x - \sin x = 0$$

$$x = \sin x \rightarrow g(x)$$

- يجب أن تكون هناك نقطة ابتدائية $(x_0 = 0.5)$

الطرائق التكرارية :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \quad \boxed{1}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{3}$$

- علماً بأن القيمة الابتدائية

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_1^0 \\ \rightarrow x_2^0 \\ \rightarrow x_3^0 \\ \rightarrow x_4^0 \end{matrix}$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

- جاكوبي : ص 148

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} x_2^{(0)} - a_{13} x_3^{(0)} - \dots \right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} x_1^{(0)} - a_{23} x_3^{(0)} - \dots \right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31} x_1^{(0)} - a_{32} x_2^{(0)} - \dots \right)$$

* إذا كانت مسيطرة قطرياً فهي متقاربة

- أما إذا لم تكن مسيطرة قطرياً فلا نفهم

شيء [illegible] ولا [illegible] الحالة العادية

غاوس - سيدل ص 152

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} x_2^{(0)} - a_{13} x_3^{(0)} - \dots \right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} \boxed{x_1^{(1)}} - a_{23} x_3^{(0)} - \dots \right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31} x_1^{(1)} - a_{32} \boxed{x_2^{(1)}} - a_{33} x_3^{(0)} - \right)$$

محسوبة سابقاً

مبرهنة (12):

إنّ طريقة جاكوبي العددية والتّي تُعطى متتاليتها التكرارية بالعلاقة (34) تتقارب نحو حل الجملة $AX=b$ ، التي مصفوفة أمثالها مربعة غير شاذة، إذا كانت مصفوفة أمثالها مسيطرة قطرياً تماماً أي إذا كان

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |a_{ij}| \quad ; i = 1, \ldots, n$$

ملاحظة:

بالاعتماد على المبرهنة (9) يمكن القول إنّ طريقة جاكوبي متقاربة إذا كان $\rho(B_J)<1$.

مثال(20):

أوجد الحل التقريبي للجملة

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + x_3 &= -17 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= 14 \\ x_1 + 6x_2 \qquad &= 14 \end{aligned}$$

وذلك بدقة أربعة منازل مستخدماً طريقة جاكوبي علماً أنّ القيمة الابتدائية $x^{(0)}=0$.

الحل:

إنّ هذه الجملة ليست مسيطرة قطرياً تماماً وذلك لأنّه في المعادلة الثانية $|7| \ngtr |2|$.

لذلك نغير ترتيب المعادلات حيثُ سنقوم بتبديل المعادلة الثانية والثالثة فتصبح الجملة بالشكل:

هنا نوهت الدكتورة بأنها لا تطلب أكثر من ثلاث تكرارات أو اثنين

$$\begin{aligned} 9x_1+4x_2+x_3&=-17\\ x_1+6x_2 \qquad &=14\\ x_1-2x_2-6x_3&=14 \end{aligned}$$

وهي جملة مسيطرة قطرياً تماماً.

لنطبق خوارزمية جاكوبي المعطاة بالعلاقة (35) فنحصل على المتتالية التكرارية:

$$(*)\quad \begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{9}\left(-17-4x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\right)\\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{6}\left(+14-x_2\right)\\ x_3^{(K+1)}=\dfrac{1}{-6}\left(14-x_1+2x_2\right) \end{cases}$$

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}x^{(1)}=\begin{pmatrix}-1.8889\\0.6667\\-2.3334\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}x^{(2)}=\begin{pmatrix}-1.9268\\0.9816\\-2.8706\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$x^{(3)}=\begin{pmatrix}-2.1538\\1.0257\\-3.0344\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}x^{(4)}=\begin{pmatrix}-2.0077\\1.0257\\-3.0344\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}x^{(5)}=\begin{pmatrix}-2.0077\\1.0014\\-3.0101\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$x^{(6)}=\begin{pmatrix}-1.9996\\1.0014\\-3.0020\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}x^{(7)}=\begin{pmatrix}-2.0005\\1.0000\\-3.0006\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}x^{(8)}=\begin{pmatrix}-2.0000\\1.0002\\-3.0003\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$x^{(9)}=\begin{pmatrix}-2.0002\\1.0001\\-3.0002\end{pmatrix}\overset{(*)}{\Rightarrow}x^{(10)}=\begin{pmatrix}-2.0002\\1.0001\\-3.0002\end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{(9)}-x^{(10)}\right\|\le\frac{10^{-3}}{2}$$

وعليه يكون الحل التقريبي المطلوب:

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

مثال(22):

أوجد الحل العددي لجملة المعادلات:

$$5x + y + z = 7$$

$$x + 3y + z = 5$$

$$x + y + 4z = 6$$

مقرباً إلى ثلاث منازل وذلك باستخدام طريقة غاوس سيدل علماً أنّ القيمة الابتدائية $X^{(0)}$. ((إذا لم يذكر في الامتحان القيمة الابتدائية صفر (٥)))

الحل:

مصفوفة الأمثال مسيطرة قطرياً تماماً.

Scanned by CamScanner

بتطبيق الخوارزمية (36) نجد

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(7 - y^{(k)} - z^{(k)}\right) \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(5 - x^{(k+1)} - z^{(k)}\right) \\ z^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 - x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

نعوض القيمة الابتدائية $x^{(0)}$ في العلاقة الأخيرة

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.2 \\ 0.85 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.0533 \\ 0.9892 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9915 \\ 1.0064 \\ 1.0005 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.9986 \\ 1.0003 \\ 1.0003 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} X^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 0.9999 \\ 1.0001 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0001 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Rightarrow} x^{(7)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0001 \end{pmatrix}$$

بما أنّ

$$\left\| x^{(7)} - x^{(6)} \right\| \leq \frac{10^{-3}}{2}$$

فإنّ الحل التقريبي

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

انتهت المحاضرة

Hadeel Saeed

Kamal AL-Refae

Syria Math Team

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

14/3/2019

* المحاضرة الرابعة:
- الدكتورة المادة: بركنت سطيف
- عنوان المحاضرة: الحل العددي للمعادلات التفاضلية.

- المحتوى العلمي:

سنبدأ في الفصل الثالث في هذه المحاضرة. سنتحدث عن الحل العددي للمعادلات التفاضلية (يأتي ما بين الـ 20 و 25 علامة من هذا البحث)، ومبرهنة ومثال.

ص 165 * الحل العددي للمعادلات التفاضلية.

- عادية
  - مرتبة أولى
    - مع شروط ابتدائية
    - مع شروط حدية
  - مرتبة ثانية
- جزئية

$y(x_0) = y_0$

$x_0 + h \longrightarrow y_1$

$x_0 + 2h \longrightarrow y_2$

$\vdots$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , \quad \underbrace{y(x_0) = y_0}_{\text{معلومة}}$$

الفكرة

* قبل البدء بحل المسألة عليك الانتباه لما يلي:
• وجود ووحدانية الحل:
- هل الحل موجود؟
- هل الحل وحيد؟
• خصائص الحلول • مبرهنة الاستقرار

DARKAL CENTRAL STATIONERY

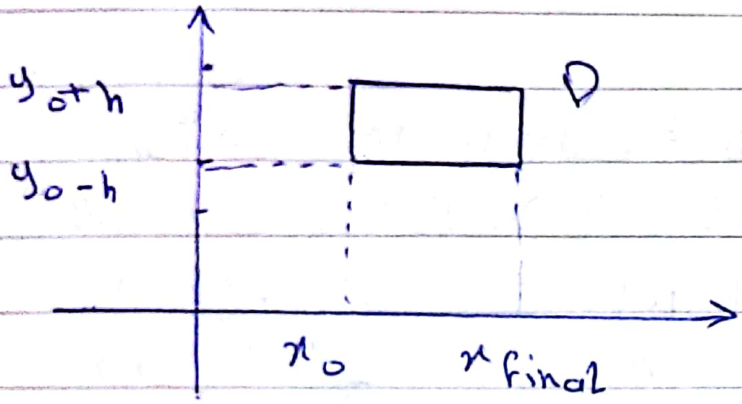
Scanned by CamScanner

- مبرهنة بيكارد لوجود ووحدانية الحل:

ليكن $f(x,y)$ تابعاً مستمراً على D

$$D = \{(x,y) : x \in [x_0 , x_{final}] , y \in [y_0 - h , y_0 + h]\}$$

$\boxed{h > 0}$



- ولنفرض أن (1) $|f(x,y_0)| \le k$ ((محدودة)).

$\forall x \in [x_0 , x_{final}] , k > 0$

(2) يحقق التابع $f(x,y)$ شرط ليبشتز أي:

$$|f(x,u) - f(x,v)| \le L|u - v| \quad (*) \quad \forall u,v \in D$$

يمكن الاستعاضة عن هذا الشرط بـ $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$

من العلاقة (*) نضرب الوسطين بالطرفين نحصل على المشتقة

* تنويه: يمكن وضع شرط لضمان سلامة اختيار h

$$\frac{1}{h} \ge \frac{k}{L}\left(e^{L(x_0 - x_{final})} - 1\right)$$

مثال 167 ص

- لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية:

$$y'(x) = 1 + x\sin(xy) \qquad 0 \le x \le 2 \quad ; \quad y(0) = 0$$

هل للمسألة حل وهل هو وحيد ؟؟؟

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى $\xi \in [y_1, y_2]$ نجد أن:

$$\frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi) = x^2 \cos(x\xi)$$

نستنتج: لدينا أكبر قيمة لـ (x) في هذا المجال هي (2)

و

$$\cos x \le 1$$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2 - y_1| \, |x^2 \cos(x, \xi)|$$

$$\le 4 |y_2 - y_1|$$

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi)$$

$$|x^2 \cos(x, y)| \le |x^2| \le 4$$

أي أن f يحقق الشروط السابقة ومسألة القيمة الابتدائية لها حل وحيد حيث

$$0 \le x \le 2 \quad , \quad -\infty < y < \infty$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

ما هو شرط أن تكون موضوعة جيداً

- أبعاد التعريب لمسألة قيمة ابتدائية موضوعة جيداً :

* السؤال: متى تكون مرضية ومتى جيدة؟؟

متى نقول عن مسألة أنها موضوعة جيداً :

$y'(x) = f(x,y) \;,\; a \le x \le b$

$y(a) = \alpha$

- إذا تحققت الشروط التالية :

1) للمسألة حل وحيد

2) من أجل أي عدد موجب ε يوجد ثابت موجب آخر $K(\varepsilon)$

بحيث أنه إذا كان $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ و

$\delta(x)$ تابع مستمر على $[a,b]$ بحيث يحقق:

$|\delta(x)| < \varepsilon$ لكل المجال $[a,b]$

يوجد الحل وحيد $Z(x)$ للمسألة :

$Z(a) = \alpha + \varepsilon_0$

$Z'(x) = f(x,y) + \delta(x)$

ضفنا مقدار التغير يرجع لدينا تغير صغير لكن هذا التغير محدود

$a \le x \le b$

بحيث يحقق $K(\varepsilon)\varepsilon > |\underbrace{Z(x)}_{\text{الحل الجديد}} - \underbrace{y(x)}_{\text{الحل القديم}}|$

متعلقة بـ (ε) بحيث أنه مهما كان ε صغير يكون محدود

* مبرهنة :

$D = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in]-\infty, \infty[\}$

1) f مستمر على D

2) يحقق شرط لبشتز بالمتغير y (كتاب 10)

تكون المسألة موضوعة جيداً.

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

تصحيح الخطأ الوارد من المحاضرة الثالثة.

صفحة ١١ ماسح

طريقة دولتيل:

الخطأ:

$$A = L \cdot U$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{13} \\ 0 & 1 & l_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

مثلثية علياً!

التصحيح:

$$A = L \cdot U$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

مثلثية دنيا

بالإضافة لعناصر القطر الرئيسي هي ال1

انتهت المحاضرة

Hadeel Saeed

Kamal Al-Refae

Syria Math

Team

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

18/3/2019 — المحاضرة الخامسة

- دكتورة المادة: د. رلنت مهيار
- عنوان المحاضرة: الحل العددي للمعادلات الخطية.
- المحتوى العلمي:

الطرائق التكرارية ((اما هو شرط التقارب))

الخطأ المطلق والخطأ النسبي بالطريقة التكرارية

مبرهنة الاكتفاء ((الإثبات غير مطلوب))

"يأتي من هذه المحاضرة ما يقارب ال 20 علامة"

الحل العددي للمعادلات الخطية:

- الطرائق المباشرة
- الطرائق التكرارية
  - جاكوبي
  - غاوس سيدل
  - S.O.R

تعتمد فكرة (طريقة النقطة الثابتة)

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

* والسؤال: ((اما هو شرط التقارب))؟؟!!

$$\max |g'| < 1$$

هنا لدينا مصفوفات:

- يعرف لدينا

$$F : M_n \longrightarrow M_{n} \quad \text{مربعة}$$

$$F(x) = Bx + C$$

إذا كان $\|B\| < 1$ فالتابع تقلصي وفي هذه الحالة:

$$X^{(n+1)} = F(x^n)$$

يحق لنا تطبيق النقطة الثابتة

Scanned by CamScanner

$AX = b$

إن جميع الطرائق التكرارية

M هي مصفوفة الأمثال غير X

يمكن تفريق المصفوفة :

$A = M - N$

$\det M \neq 0$

$(M - N)X = b$

$MX = NX + b$

حيث B هي المرافقة لـ X

$$X = \overbrace{M^{-1}N}^{B} X + \overbrace{M^{-1}b}^{C}$$

*هنا لا نستطيع قسمة مصفوفات لذلك نضرب بالمقلوب.

مثلاً :

$$X^{k+1} = M^{-1}N x^{k} + M^{-1}b$$

والشرط هو $\|B\| < 1 \Longleftrightarrow \rho(B) < 1$

رصف القطر الرئيسي

وفي هذه الحالة سيتقارب الحل العددي إلى الحل الفعلي

$$\lim_{k \to \infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$$

حل تقريبي — الحل الفعلي

مثال : طريقة جاكوبي :

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} y^{(k)} - a_{13} z^{(k)} \right)$$

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} x^{(k)} - a_{23} z^{(k)} \right)$$

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31} x^{(k)} - a_{32} y^{(k)} \right)$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$D X^{(k+1)} = -(L+U) X^{(k)} + b$$

L مصفوفة سفليا
U مصفوفة دنيا
D مصفوفة القطر الرئيسي

$$X^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B} X^{(k)} + \underbrace{D^{-1} b}_{C}$$

$B = -D^{-1}(L+U)$ لدراسة التقارب لا تأسسو كل الإشارة (-) لأنه يوجد نظيم والنظيم دوماً موجب.

* وبطريقة مشابهة:

- نجد بطريقة كاوس سيدل:

$$B = -(D+L)^{-1} U$$

* الخطأ المطلق والخطأ النسبي بالطريقة التكرارية ص 142

ليكن $A X = b \longrightarrow x$ الحل الفعلي
$\longrightarrow \tilde{x}$ الحل التقريبي

- يعرف الخطأ المطلق (الفعلي):

$$E = x - \tilde{x} \Rightarrow \|E\| = \|x - \tilde{x}\|$$

- ويعرف الخطأ النسبي:

$$R = \frac{E}{x} \Rightarrow \|R\| = \frac{\|E\|}{\|x\|}$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

مثال(26):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= -4 \end{aligned}$$

والمطلوب:

1) ادرس التقارب بطريقة جاكوبي.

2) أوجد ω_{Opt} في طريقة S.O.R.

Scanned by CamScanner

الحل:

لنحسب الآن $\rho(B_J)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B_J - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \mp\frac{1}{3}}$$

نختار الموجب لأن نصف القطر الطيفي لا يجب أن يكون سالب

$$\rho(B_J) = \frac{1}{3} < 1$$

إذن طريقة جاكوبي متقاربة.

Scanned by CamScanner

مبرهنة :

- الحد الأعلى للخطأ الفعلي:

$$\|x-\tilde{x}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|b-\tilde{b}\|$$

- الحد الأعلى للخطأ النسبي:

$$\|R\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \, \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

$$\le \operatorname{Cond}(A) \, \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

- البرهان: الإثبات غير مطلوب:

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ A\tilde{x} = \tilde{b} \end{array}\right\} \quad A(x-\tilde{x}) = b-\tilde{b}$$

$$x-\tilde{x} = A^{-1}(b-\tilde{b})$$

$$\|x-\tilde{x}\| \le \|A^{-1}\| \, \|b-\tilde{b}\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}}$$

نعلم أن $\|R\| = \dfrac{\|E\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|b-\tilde{b}\| \cdot \left(\dfrac{\|A\|}{\|b\|}\right)$

$$\le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \left(\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}\right)$$

$$\le \operatorname{Cond}(A) \left(\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}\right)$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

* طريقة S O R

- تعتمد على طريقة كاوس - سيدل + أدخال متحول $0 < w < 2$ على الشكل التالي:

$$3x_1 - x_2 + x_3 = -1$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = -7$$

بطريقة كاوس - سيدل:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(-1 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{3}\left(7 + x_1^{k+1} + x_3^{k}\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}\left(-7 - x_1^{k+1} + x_2^{k+1}\right)$$

- بطريقة S.O.R

$$x_1^{k+1} = (1-w)x_1^{k} + w\left[\frac{1}{3}\left(-1 + x_2^{k} - x_3^{k}\right)\right]$$

$$x_2^{k+1} = (1-w)x_2^{k} + w\left[\frac{1}{3}\left(7 + x_1^{k+1} + x_3^{k}\right)\right]$$

$$x_3^{k+1} = (1-w)x_3^{k} + w\left[\frac{1}{3}\left(-7 - x_1^{k+1} + x_2^{k+1}\right)\right]$$

نعوض $w = 1,25$

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

بالتعويض بالقانون

$x_1^{(1)} = -0,41667$

$x_2^{(1)} = 2,7431$

$x_3^{(1)} = -1,6001$

$x_1^{(2)} = 1,4972$

$x_2^{(2)} = 2,1880$

$x_3^{(2)} = -2,2288$

تمرين ص 163 رقم (7) وظيفة

انتهت المحاضرة

Hadeel Saeed

Kamal Al-Refae

Syria Math

Team

تحليل عددي (2)

25/3/2019

- المحاضرة السادسة :
- دكتورة المادة : د/ لينة مطيط
- عنوان المحاضرة : طريقة S.O.R

- المحتوى العلمي :
- حل تمرين وظيفة و طريقة S.O.R ومبرهنات عن التقارب.

- التمرين 7 صفحة 163
- أوجد العدد الشرطي ؟

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} , \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} , \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

- سوف نستخدم النظيم الثاني :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \{|\lambda_i|\}} \quad ; \lambda_i \in \lambda(A^T \cdot A)$$

$$\det(A \cdot A^{T} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 74-\lambda & 105 \\ 105 & 149-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Scanned by CamScanner

$\lambda^2 - 223\lambda + 1 = 0$

$\lambda_1 = 222,9955156$

$\lambda_2 = 0,00448439$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = 14,93303437$

نحسب الآن ؟ $\|A^{-1}\|_2$

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(A^{-1} \cdot (A^{-1})^T - \lambda I\right) = 0$$

بفك المحدد نحصل :

$\lambda^2 - 223\lambda + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 222,9955156 \\ \lambda_2 = 0,00448439 \end{array}\right\} \Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \|A\|_2$$

$\Rightarrow \operatorname{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$= \sqrt{\lambda_1} \cdot \sqrt{\lambda_1} = 222,9955156$

باستخدام نظيم ال ∞

$\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}| = \max\{12, 17\} = 17$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{12, 17\} = 17$

$\operatorname{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 17^2 = 289$

Scanned by CamScanner

ب/ استخدام التنظيم الأول:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$= \max\{12, 17\} = 17 = \|A^{-1}\|_1$$

$$\Rightarrow cond(A) = 17^2 = 289$$

ج/ أوجد الخطأ المطلق والنسبي الفعلي:

الخطأ المطلق

$$\|E\|_2 = \|x - \tilde{x}\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.17 \\ 0.22 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.17 \\ -0.12 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \sqrt{(0.17)^2 + (-0.12)^2} = 0.20808652 05$$

$$\|E\|_\infty = \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 0.17$$

$$\|E\|_1 = \|x - \tilde{x}\|_1 = \sum_i |x_i| = 0.17 + 0.12 = 0.29$$

الخطأ النسبي الفعلي:

$$\|R\| = \frac{\|E\|}{\|x\|}$$

$$\|x\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(0)^2 + (0.1)^2} = 0.1$$

الحل الفعلي

$$\Rightarrow \|R\|_2 = 2.0808652 05$$

$\|x\|_\infty = 0,1 \Rightarrow \|R\|_\infty = 1,7$

$\|x\|_1 = 0,1 \Rightarrow \|R\|_1 = 2,9$

C) أوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق، والحد الأعلى للخطأ النسبي؟

الحد الأعلى للخطأ المطلق:

$\|E\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 . \|b-\tilde{b}\|_2$

$\|b-\tilde{b}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0,7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,69 \\ 1,01 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,01 \end{pmatrix} \right\|_2$

$= 0,01414213562$

$\|E\|_2 \leq 0,2111849973$

$\|b-\tilde{b}\|_\infty = 0,01 \Rightarrow \|E\|_\infty \leq 0,17$

$\|b-\tilde{b}\|_1 = 0,02 \Rightarrow \|E\|_1 \leq 0,34$

الحد الأعلى للخطأ النسبي:

$\|R\|_2 \leq \mathrm{Cond}(A) \dfrac{\|b-\tilde{b}\|_2}{\|b\|_2}$

$\sqrt{(0,7)^2 + 1^2} = 1,22065562 = \|b\|_2$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

$$\|R\|_2 \leqslant (222,9955156) \cdot \frac{(0,01414213562)}{(1,220655562)}$$

$$\leqslant 2,583556674$$

$$\|R\|_\infty \leqslant cond(A) \cdot \frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leqslant 2,89$$

$$\|b\|_\infty = 1$$

$$\|R\|_1 \leqslant cond(A) \cdot \frac{\|b-\tilde{b}\|_1}{\|b\|_1} \leqslant 3,4$$

$$\|b\|_1 = 1 + 0,7 = 1,7$$

تنويه: في الامتحان في حال لم يتم تحديد النظيم يجب استخدام نفس النظيم بكامل المسألة من البداية إلى النهاية

* مثلاً استخدمنا $\|R\|_1$ نبقى على النظيم الأول حتى النهاية

طريقة S.O.R ص 153

(غاوس سيدل) GS

$$X_i^{(k+1)} = (1-w)\, X_i^{(k)} + w\, X_i^{(GS)} \qquad 0 < W < 2$$

سؤال: هل يمكن كتابتها بالشكل:

$$X^{(k+1)} = B_{SOR}\, X^{(k)} + C_{S.O.R} \;?$$

الجواب: نعم

النقطة الثابتة

مصفوفة طريقة $= -\left(\frac{D}{W} + \underset{\text{مثلثية دنيا}}{L}\right)^{-1}\left(\frac{1-W}{W} D - \underset{\text{عليا}}{U}\right)$

تنويه

- عندما نزيد w ونصف قطر التقارب فإذا $\rho(B) > 1$ نتوقف
أما في حال حل النظام لا نتوقف

مبرهنات في التقارب: الهام

1- $\rho(B_w) \geq |w-1|$

2- $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$ جاكوبي

3- $$W_{optimal} = \frac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(B_J))^2}}$$

$$\rho(B_w) = w-1$$

4- إذا كانت المصفوفة مسيطرة قطرياً عندئذٍ تكون متقاربة بطريقة جاكوبي.

و " " " غاوس سيدل.

و " " " S.O.R

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

- لكن إذا لم تكن مسيطرة قطرياً فإننا لا نفهم ونغير هنا شرطاً لا يلزم وغير كافي

ملاحظة - أحياناً بتبديل الأسطر نحصل على مصفوفة مسيطرة قطرياً

* س. دورة مكرر: مثلاً: أوجد الحل بطريقة جاكوبي
يكون الجواب ببساطة:
هي متقاربة بطريقة جاكوبي لأنها مسيطرة قطرياً

س. دورة مكرر: أوجد نصف قطر التقارب بطريقة جاكوبي:

☺ انتهت المحاضرة ☺

Hadeel Saeed

Kamal AL-Refae

Com Team

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

28/3/2019

المحاضرة السابعة:

- محاضرة المادة: د. [illegible]
- عنوان المحاضرة: الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية

- المحتوى العلمي:

نستكمل من الفصل الثالث ما بدأنا في المحاضرة الرابعة ((تعريف)) ومتى نقول عن مسألة القيمة الابتدائية أنها موضوعة جيداً بالإضافة إلى "مثال" لنبدأ

- تعريف (1):

نقول عن مسألة القيمة الابتدائية:

$y'(x) = f(x,y)\ ;\ a \le x \le b$

$y(a) = \alpha$ } علماً أنه ابتدائي

- أنها موضوعة جيداً (جيدة الطرح) إذا تحققت الشروط التالية

1) للمسألة حل وحيد

2) من أجل أي عدد موجب ε يوجد ثابت موجب آخر $K(\varepsilon)$

بحيث أنه إذا كان $|\varepsilon_0| < \varepsilon$

$\delta(x)$ تابع مستمر على $[a,b]$ يحقق:

$|\delta(x)| < \varepsilon$ على $[a,b]$

يوجد حل وحيد للمسألة نرمز له $z(x)$

$z(a) = \alpha + \varepsilon_0 \qquad a \le x \le b$

$z'(x) = f(x,y) + \delta(x)$

- بحيث تحقق: $|z(x) - y(x)| < K(\varepsilon).\varepsilon$

حيث: $y(x)$ هو الحل الفعلي إذا وُجد و ε_0 خطأ التدوير

و $z(x)$ الحل الجديد الذي ينتج بالحاسب

و $z(a)$ شرط ابتدائي

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

تهتم الطرائق العددية دائما بحل المعادلة القلقة،لأن أي خطأ يدخل في التمثيل يؤدي إلى مسألة من هذا الطراز، وفي حال كون المعادلة موضوعة جيداً فإن الحل العددي للمعادلة القلقة سوف يكون قريباً جداً من حل المعادلة الأصلية، والمبرهنة التالية توضح هذا الأمر:

مبرهنة(2) :

لتكن المجموعة D المعرفة بالشكل:

$$D=\{(x,y):x\in[a,b],y\in]-\infty,+\infty[\}$$

فإذا كان f مستمراً على D ويحقق شرط ليبتشز بالمتغير y،عندها تكون مسألة القيمة الابتدائية (1) موضوعة جيداً.

مثال(2):

بكالوريوس 2015 ثانية

بفرض المجموعة D هي:

$$D=\{(x,y)\ :\ x\in[0,1]\ ,\ y\in]-\infty,+\infty[\}$$

Scanned by CamScanner

ولنأخذ مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$y'(x) = y - x^2 - 1 \; ; \qquad 0 \le x \le 2 \qquad , \; y(0) = 0.5$$

شرط ابتدائي

لدينا:

$$\left| \frac{\partial\left(y - x^2 - 1\right)}{\partial y} \right| \le |1| = 1$$

نستنتج أن التابع يحقق شرط ليبتشزعلى D، وبما أنه مستمر على المجموعة D، فإن المسألة موضوعة جيدا.

والمسألة المرافقة لها هي:

تعطى بنفس المسألة

$$z'(x) = z - x^2 - 1 + \delta \; ; \qquad 0 \le x \le 2 \; , \; z(0) = 0.5 + \varepsilon_0$$

حيث δ و ε_0 ثابتان

لكن الحل الفعلي للمسالة هو:

$$y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$$

أما المسألة القلقة فحلّها:

تعطى بنفس المسألة

$$z(x) = (x+1)^2 + (\delta + \varepsilon_0 - 0.5)e^x - \delta$$

ويمكننا التحقق أنه إذا كان $|\delta| < \varepsilon$ و $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ فإن:

$$\begin{aligned} |z(x) - y(x)| &= \left|(\delta + \varepsilon_0)e^x - \delta\right| \\ &\le |\delta + \varepsilon_0| e^2 + |\delta| \\ &\le \left(2e^2 + 1\right)\varepsilon \end{aligned}$$

وهذا يتوافق مع معطيات المبرهنة السابقة.

2- الطرائق ذات الخطوة الواحدة:

سنستعرض في البداية طريقتين ابتدائيتين لإعطاء القارئ فكرة عن الموضوع المدروس، ومن ثم ننتقل إلى طرائق أخرى أكثر دقة وفاعلية.

Scanned by CamScanner

توضيح المسألة القلقة :

$$|Z(x)-y(x)| = |\cancel{(x+1)^2}+(\delta e^{x})+\varepsilon_0 e^{x}-\cancel{0.5e^{x}}-\delta -\cancel{(x+1)^2}+\cancel{0.5e^{x}}|$$

$$= |(\delta+\varepsilon_0)e^{x}-\delta|$$

كون $|\delta|<\varepsilon$

و $|\varepsilon_0|<\varepsilon$

وأكبر قيمة لـ x هي (2)

كون $0\leq x\leq 2$

نكتبها e^2

$$\leq |\delta+\varepsilon_0|e^{2}+|\delta|$$

$$< (\varepsilon+\varepsilon)e^{2}+\varepsilon$$

$$< 2\varepsilon e^{2}+\varepsilon$$

$$< (2e^{2}+1)\varepsilon$$

استطعنا كتابة الحل التقريبي - الحل الفعلي < من مقدار متعلق بـ (ε)

أي $|Z(x)-y(x)|<K(\varepsilon).\varepsilon$

فكلما سعت ε إلى الصفر فإن الحل التقريبي الذي ينتج من الحاسوب سوف يسعى إلى الحل الفعلي

$\varepsilon \longrightarrow 0$

$Z(x) \longrightarrow y(x)$

تنويه :

إذا كانت الدالة محققة شرط ليبشتز والحل وحيد فإن المسألة القلقة محققة حتماً (تحصيل حاصل).

يأتي السؤال كما سبق كما يلي:

لتكن y_2 ——— و y'_2 ——— ، Z_2 ———

Z'_2 ———

1. أثبت أن $y(x)$ هو حل لـ $y'(x)$

2. أثبت أن $z(x)$ هو حل لـ $z'(x)$

3. وهل المسألة قلقة ؟؟ أو ادرس المسألة القلقة:

هنا نطبق شرط القرب بحيث تكون الصغر من مقدار متعلق بـ ε

$$|z(x) - y(x)| < k(\varepsilon) . \varepsilon$$

إلى هنا تكون قد انتهت محاضرتنا ...

لكننا سوف نضع توضيح لتمرين ص 129 من الكتاب موجود في المحاضرة الثالثة.

بالإضافة إلى تصحيح بعض الأخطاء.

Scanned by CamScanner

$$A = L.U \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$l_{11}.1+0+0=1 \Rightarrow \boxed{l_{11}=1}$ a_{11} = سطر أول X عامود أول

$l_{21}.1+0+0=4 \Rightarrow \boxed{l_{21}=4}$ a_{21} = سطر ثاني X عامود أول

$l_{31}.1+0+0=3 \Rightarrow \boxed{l_{31}=3}$ a_{31} = سطر ثالث X عامود أول

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ 3 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نعوض في المصفوفة (L)

$u_{12}.1+0+0=1 \Rightarrow \boxed{u_{12}=1}$ a_{12} = سطر أول X عامود ثاني

$u_{13}.1+0+0=1 \Rightarrow \boxed{u_{13}=1}$ a_{13} = سطر أول X عامود ثالث

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نعوض في (U)

$4+l_{22}+0=3 \Rightarrow \boxed{l_{22}=-1}$ a_{22} = سطر ثاني X عامود ثاني

نعوض

$4-u_{23}+0=-1 \Rightarrow \boxed{u_{23}=5}$ a_{23} = سطر ثاني X عامود ثالث

$3+l_{32}+0=5 \Rightarrow \boxed{l_{32}=2}$ a_{32} = سطر ثالث X عامود ثاني

$3+10+l_{33}=3 \Rightarrow \boxed{l_{33}=-10}$ a_{33} = سطر ثالث X عامود ثالث

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L \cdot U$$

Scanned by CamScanner

تصحيح الأخطاء:

م5 الصفحة (3) سطر 5 و 6

الخطأ:

ا مصفوفة عليا

ل " دنيا

الصحيح:

ا مصفوفة دنيا.

ل " عليا.

م6 الصفحة الأخيرة ما بعد الملاحظة.

* سؤال دورة: أوجد الحل بطريقة جاكوبي ——— X

التصحيح: لمعرفة فيما إذا كانت متقاربة بطريقة جاكوبي أم لا نرى أولاً إذا كانت مسيطرة قطرياً فهي متقاربة بطريقة جاكوبي عندئذٍ الأمر بالنسبة لـ S.O.R وغاوس سيديل

انتهت المحاضرة ☹

Hadeel Saeed

Kamal Al-Refae

iom Team ☺

Scanned by CamScanner

-٤- (2) تحليل عددي

3/4/2019 — المحاضرة الثامنة :

د. المادة : برلنت مطرجي

عنوان المحاضرة : حل معادلات خطية S.O.R

المحتوى العلمي :

- أمثلة بالإضافة إلى مبرهنات.

ومقدمة للفصل الأول سنبدأ به المحاضرة القادمة.

- حل معادلات خطية S.O.R

هامة

مثال ص 153

توضيح المثال :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

- أوجد $\rho(B_{SOR})$:

$$\lambda = (1-w) + \frac{w^2}{200} \mp \frac{1}{2}\left[4(1-w)\frac{w^2}{100} + \frac{w^4}{10000}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1-w) + \frac{w^2}{200} \mp \frac{1}{2}\boxed{\left(\frac{w}{10}\right)}\left[4(1-w) + \frac{w^2}{100}\right]^{1/2} \quad \boxed{1}$$

أخرجنا $\sqrt{\frac{w^2}{100}}$ كعامل مشترك

إذا اعتبرنا $4(1-w) + \frac{w^2}{100} = 0 \Rightarrow \frac{w^2}{200} = -2(1-w)$ $\boxed{2}$

نعوض من $\boxed{1}$ فنجد :

$$\lambda = (1-w) - 2(1-w)$$

$$\Rightarrow \lambda = w - 1$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

بالاعتماد على التعريف السابق والعلاقة (26) نجد أنّ المتتالية التكرارية الموافقة لطريقة S.O.R تُعطى بالشكل:

$$x^{(k+1)} = B_{SOR}x^{(k)} + C_{SOR} \quad (37)$$

حيثُ

$$\begin{cases} B_{SOR} = M^{-1}N = -\left(\frac{D}{\omega}+L\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D-U\right) \\ C_{SOR} = M^{-1}b = \left(\frac{D}{\omega}+L\right)^{-1}b \end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كانت $\omega = 1$ فإنّ طريقة S.O.R تتطابق مع طريقة غاوس سيدل.

مثال(23):

بفرض أنّه لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = b$ حيثُ

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

والمطلوب:

1) أوجد جذور هذه الجملة باستخدام طريقة S.O.R في حال $\omega = 1$.

Scanned by CamScanner

2) قارن بين $\rho(B_{SOR})$ و $\rho(B_{GS})$ عندما يحقق ω العلاقة

$$4(1-\omega)+\frac{\omega^2}{100}=0$$

الحل:

$$\frac{1}{\omega}D+L=\begin{pmatrix}\frac{10}{\omega} & 0\\ 1 & \frac{10}{\omega}\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{1}{\omega}D+L\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\omega}{10} & 0\\ -\frac{\omega^2}{100} & \frac{\omega}{10}\end{pmatrix}$$

$\det A = \frac{100}{w^2}$

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega}D-U\right)=\begin{pmatrix}\frac{1-\omega}{\omega}(10) & -1\\ 0 & \frac{1-\omega}{\omega}(10)\end{pmatrix}$$

ومنه

$$B_{SOR}=-\left(\frac{D}{\omega}+L\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D-U\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1-\omega & -\frac{\omega}{10}\\ -\frac{\omega(1-\omega)}{10} & \frac{\omega^2}{100}+1-\omega\end{pmatrix}$$

هنا ناس تقارب لا توجد إشارة (-)

القيم الذاتية الموافقة لهذه المصفوفة تنتج من العلاقة

$$\det\left(B_{SOR}-\lambda I\right)=0$$

نحاول كتابتها معادلة درجة ثانية لأن المصفوفة $A_{2\times 2}$

$$(1-\omega-\lambda)\left[\frac{\omega^2}{100}+1-\omega-\lambda\right]-\frac{\omega^2(1-\omega)}{100}=0$$

$$\lambda^2-\lambda\left[\frac{\omega^2}{100}+2(1-\omega)\right]+(1-\omega)^2=0$$

نحل المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى λ فنجد:

$$\lambda=(1-\omega)+\frac{\omega^2}{200}\pm\frac{1}{2}\left[4(1-\omega)\frac{\omega^2}{100}+\frac{\omega^4}{10000}\right]^{1/2}$$

Scanned by CamScanner

وجدنا أنّه عندما $\omega = 1$ فإنّ طريقة S.O.R تتطابق مع طريقة غاوس سيدل بتعويض $\omega = 1$ في العلاقة الأخيرة نجد أنّ $\lambda - 1$ الأمر الذي يعني وجود جذرين هما $0.01, 0$، وبتغيير ω تتغير الجذور.

من الفرض ،

بفرض أننا اخترنا ω تحقق العلاقة $4(1-\omega)+\frac{\omega^2}{100}=0$ عندئذٍ

$$\frac{\omega^2}{200} = -2(1-\omega)$$

وعليه $\lambda = \omega - 1$.

ومنه فإنّ أصغر قيمة لـ ω هي $\omega = 1.002512579$ أي إنّ $\omega \approx 1$ أي إنّها قريبة جداً من قيمة ω الموافقة لطريقة غاوس سيدل.

بالحساب نجد أنّ

$$\rho(B_{SOR}) = 0.002512579$$

في حين أنّ

$$\rho(B_{G.S.}) = 0.01$$

مما يوضح الدور الذي يلعبه $\rho(B)$ في عملية اختيار ω.

Scanned by CamScanner

* مبرهنات :

1- اذا كانت المصفوفة (B) مسيطرة قطرياً تماماً عندئذ : الطرائق التكرارية متقاربة .

2- $a_{ii} \neq 0$ Then $\rho(B_{S.O.R}) \geq |w-1|$

3- معرفة ايجابياً $[1] \, B_{S.O.R}$ $\{ 0 < w < 2 \; [2]$ طريقة S.O.R متقاربة مهما تكن القيمة الابتدائية

4- $\rho(B_{G.S}) = [\rho(B_J)]^2$

5- $w_{optimal} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(B_J))^2}}$

$\Rightarrow \rho(B_{SOR}) = w - 1$

- لنتعرف إلى الفرق بين النظيم الطيفي ونصف القطر الطيفي

* النظيم الطيفي

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

$\|X\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|X\|_1$

أكبر قيمة للقيمة الذاتية

* نصف القطر الطيفي :

$\rho(A) = \max |\lambda_i|$

$\rho(A) \leq \|A\|$

العلاقة بين نصف القطر الطيفي والنظيم

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

مثال :

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$B_J = -D^{-1}(L+U)$$

$$= -\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{8} \\ -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\rho(B_J)} = \frac{5}{2\sqrt{14}}$$

$$B_{G.S} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{8} \\ 0 & \frac{25}{56} \end{pmatrix} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{\rho(B_{G.S})} = \frac{25}{56}$$

$$\rho(B_{G.S}) = (\rho(B_J))^2$$

كون

$$W = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{25}{56}\right)}} \simeq 1,147 < 2$$

$$\rho(B_{S.O.R}) = W-1 = 0,147 < 1$$ فهي متقاربة

مثال (2) : حل 156

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{4} & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ادرس التقارب بطريقة S.O.R

$$\det A = 24$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 7$$

[1] مصة إيجابية [1]

(2)

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

3- $\boxed{4}$ السطر القائد موجب:

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}75 & 0 \\ -0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(B_J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0{,}625)$$

$$\rho(B_J) = \sqrt{0{,}625}$$

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-0{,}625}} = 1{,}24$$

$$\lambda = 0{,}24 < 1$$

ملاحظة:

- لتكن لدينا A مصفوفة غير شاذة فإن:

$$\sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A A^T)}$$

* تصحيح الخطأ في المحاضرة السابقة:

- الصفحة الأولى السطر الأخير:

- الخطأ: $\det(A.A^{-T} - \lambda I) = 0$

- التصحيح: $\det(A.A^{T} - \lambda I) = 0$

مثال(24):

أوجد الاختيار الأمثل لـ ω الموافقة لطريقة S.O.R للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

الحل:

1) من الواضح أنّ A ثلاثية الأقطار.

2) إنّ A معرفة إيجاباً لأنّ

- A تناظرية $\left(A=A^T\right)$
- A معرفة إيجاباً لأنّه من أجل $0\neq x\in M_{3\times 1}(R)$

$$x^T A x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4x_1+3x_2\\ 3x_1+4x_2-x_3\\ -x_2+4x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1^2+3\left(x_1+x_3\right)^2+3x_2^2+\left(x_2-x_3\right)^2>0$$

لنحسب الآن $\rho(B_J)$:

Scanned by CamScanner

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B_J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0.625)$$

$$\rho(B_J) = \sqrt{0.625}$$

نعوض في العلاقة

$$\omega_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(B_J))^2}}$$

فنجد

$$\omega_{Opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-0.625}} \approx 1.24$$

Scanned by CamScanner

* الفصل الأول:

- التقريبات باستخدام المربعات الصغرى:

- الاستيفاء

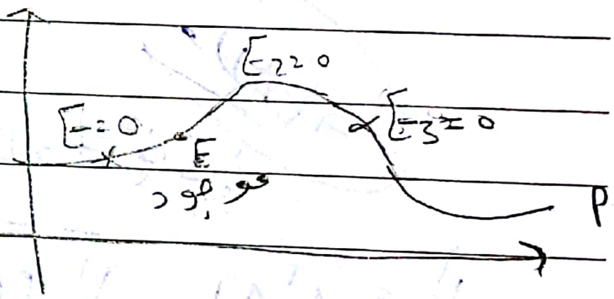
الغرض:

$(x_0, y_0) = (0, 1)$

$(x_1, y_1) = (2, 3)$

$(x_2, y_2) = (4, 6)$

الهدف: إيجاد دالة تمر في جميع القيم ثم حساب القيمة التقريبية عندها.



لعدم وجود النقاط

التقريبات:

- إيجاد دالة معلومة من حيث درجتها وليس مجاهيلها

$P_2 = ax^2 + bx + c$

حيث: الأعطاء أو المجاهيل من خلال النقاط رقم لاحق.

انتهت المحاضرة.

Hadeel Saeed

Kamal Al-Refae

Com Team

تحليل عددي (2)

4/4/2019

المحاضرة التاسعة:

د. نرلت مطيط

- عنوان المحاضرة: الطرائق العددية

- المحتوى العلمي:
- أقسام الطرائق العددية.
- مثال.
- أنماط الأخطاء من أولر.

تقسم الطرائق العددية إلى قسمين:

الطرائق ذات الخطوة الواحدة | الطرائق ذات عدة خطوات

أولر | رانج كوتا | آدمز - باشفورث | آدمز - مولتن

متسلسلة تايلور

طريقة أولر: هدفها إيجاد تقريب لحل المعادلة الابتدائية موضوعة جيداً.

نستخدم مبرهنة تايلور بجوار $x+h$

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x).$$

1) نقسم المجال إلى M نقطة كي يكون البعد بين النقاط $h = \frac{b-a}{M}$ ولتكن هذه النقاط $\{x_0, x_1, \dots, x_M\}$

عدد النقاط

التقريب عند نقاط محددة من المجال

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

I نستخدم مبرهنة تايلور لتقريب $y(x)$ عند هذه النقاط

* بحذف الحدود اعتباراً من $\frac{h^2}{2!} y''(x)$ ينتج لدينا:

$$y(x+h) = y(x) + \underbrace{h y'(x)}$$

$f(x,y)$

معطاة بالمسألة $y(x_0) = y_0$

$y_1 = y(x_0 + h)$

$y_2 = y(x_0 + 2h)$

$y_3 = y(x_0 + 3h)$

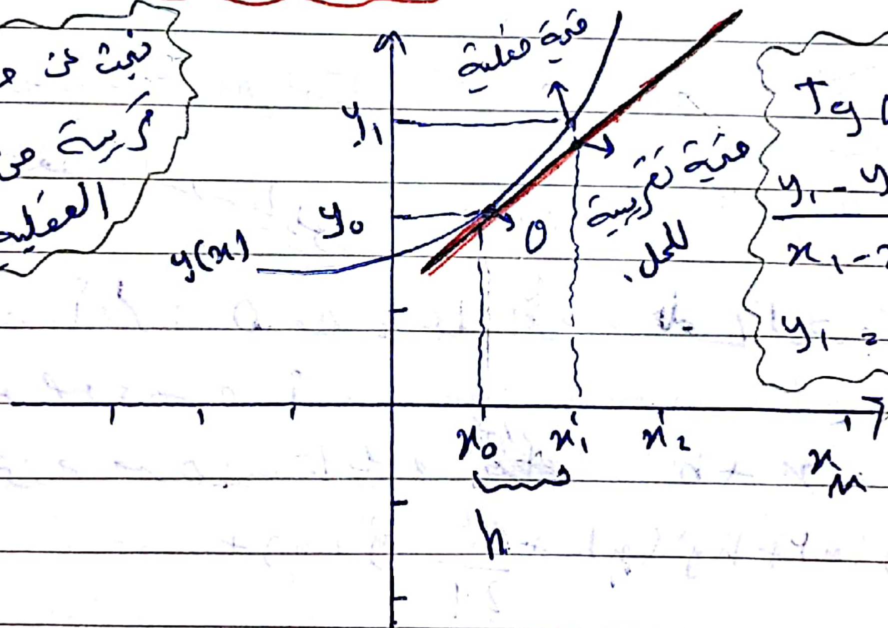
$\vdots$

$y_i = y(x_0 + ih)$

- الصيغة العامة $\boxed{1}$ لحفظ

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)} \quad ; \quad i = 0, 1, \ldots, M-1$$

نبحث عن قيمة تقريبية قريبة من القيمة الفعلية



$T_{g\theta} = f(x_0, y_0)$

$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$

$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$

السلبية من هذه الطريقة هي وجوب اختيار $\boxed{h}$ صغيرة.

للاستزادة والتدريب والفهم أكثر يوجد تمارين حل 21-2020

(10) ، (9) ، (8) ، (7) ، (2) ، (1)

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

الأخطاء في أولر:

أنماط الأخطاء:

أخطاء الاقتطاع

- موضعي
- عام

أخطاء التدوير

- موضعي: $\delta_i = 0.5 \times 10^{-\beta}$ ، β عدد المنازل العشرية
- عام: $\delta = \max_i \{\delta_i\}$ أكبر قيمة

نقصد بالموضعي: الخطأ عند كل خطوة.

للاستزادة الرجوع إلى المبرهنة (3) ص 173

س دورة 2 درجة ((أوجد الخطأ الكلي لصيغة أولر)):

- يمكن الرجوع إلى مبرهنة (4) ((الصيغة مطلوبة فقط البرهان غير مطلوب))

- الخطأ الكلي E_{max} : عام

نفرض معلومية البداية $\forall x \in [a,b] \quad |y''(x)| \leq M$

$$|y(x_i) - y_i| \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(x_i - a)} - 1\right] + |\delta_0|\, e^{L(x_i-a)}$$

حل فعلي — تقريبي

الحد الأعلى لا يتجاوز هذه القيمة للخطأ

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$$

* شرط ليبشتز

$\boxed{L}$ الحد الأعلى عندما يتحقق شرط ليبشتز

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M$$

- في حال كان المشتق الثاني غير معلوم سنطبق هذا القانون

$$y''_{x_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

القانون

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

مثال(3):

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = x + y$ حيث $y(0) = 0$، و بفرض $h = 0.2$ في المجال $[0,1]$.

الحل:

باستخدام العلاقة(2) وبالاستفادة من الشرط $y(0) = 0$ نجد أن:

$$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \qquad x_n = x_0 + nh = nh$$

$$y_1 = y_0 + 0.2(x_0 + y_0) = 0$$

$$y_2 = y_1 + 0.2(x_1 + y_1) = 0 + 0.2(0.2 + 0) = 0.04$$

$$y_3 = y_2 + 0.2(x_2 + y_2) = 0.04 + 0.2(0.4 + 0.04) = 0.128$$

$$y_4 = y_3 + 0.2(x_3 + y_3) = 0.128 + 0.2(0.6 + 0.128) = 0.2736$$

$$y_5 = y_4 + 0.2(x_4 + y_4) = 0.2736 + 0.2(0.8 + 0.2736) = 0.48832$$

n	$x_n = 0.2n$	$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$
0	0	0
1	0.2	0
2	0.4	0.04
3	0.6	0.128
4	0.8	0.2736
5	1	0.48832

جدول 1

Scanned by CamScanner

مثال الطريقة أولر ص 170-172

$$\underbrace{y' = x + y}_{f(x,y)} \quad ; \quad y(0) = 0 \ , \ x \in [0,1]$$

$$h = 0.2$$

الحل:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$$

$$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$$

$$y_1 = y_0 + 0.2\,(x_0 + y_0) = 0$$

تنويه

((التحليل العددي دا جزء (صغير) من إيجاد الحل المستمر لذلك يعطينا الحل التقريبي))

نحن ندرس حالة $y' = f(x,y)$ نعلم منها القيمة الابتدائية

فقط $y(x_0) = y_0 \; \} \; (x_0, y_0)$

* نوهت الدكتورة أن طريقة أولر ليست سؤال امتحاني لكنها مهمة وهي بداية لباقي الطرق لذلك لا بد من فهمها ودراستها.

طريقة -إيلور- خد أكثر من مرة.

انتهت المحاضرة.

Hadeel Saeed

Kamal AL-Refae

Com Team

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

8/4/2019

المحاضرة العاشرة:

د. بركات مطلك

العنوان: التقريبات.

المحتوى العلمي:

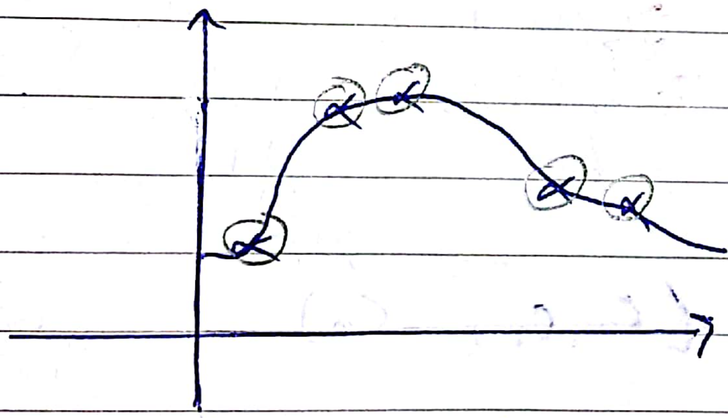
تكملة البحث الأول الا التقريبات باستخدام المربعات الصغرى)) - التقريب الخطي - مثال:

يمكن تعاملها f(x) بدلاً من y

التقريبات:

الغرض: مجموعة نقاط معلومة مختلفة

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$



هذه النقاط خطأها أصغر ما يمكن وليس صفر لأنه لو كان يساوي الصفر لعدنا إلى حالة الاستيفاء.

المطلوب: 1] ايجاد دالة تمر قريبة لأكثر من هذه النقاط ((لكن خطأها أصغر ما يمكن))

2] ايجاد تقدير $\boxed{y^*}$ لـ (x^*)

مثل حالة المشتقة الأولى = 0

مثلاً:

$\phi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$

$d_0 = 1, \ d_1 = x, \ d_2 = x^2$

$\phi(x) = C_0 + C_1 x$

$d_0(x) = 1, \ d_1(x) = x$

هدفنا إيجاد الثوابت

- التقريب :

خطي (للثوابت) | غير خطي (للثوابت)

الشيء الثوابت $\phi(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$

غير خطية لأن الثوابت ليست من الدرجة الأولى

$\phi(x) = e^{C_1 x} + C_2 x$

أننا نختار ϕ كيفية عن طريق ولكن تكون هذه الطريقة بعيدة عن الحل الصحيح

لا يوجد علاقة بين عدد الثوابت وعدد النقاط

التقريب خطي

بيانات متقطعة | بيانات مستمرة.

$\left.\begin{matrix} x_0, x_1, \dots, x_n \\ f(x_0) = y_0 \\ y_1 \end{matrix}\right\}$ $(n+1)$ نقطة مختلفة

تقريب

$[a, b]$ مجال

- نبحث عن $\phi^{(0)}(x)$ بحيث

لأنها من مرتبة متغيرات

$\|f - \phi^{(0)}\|_2^2 = \min E^2$

الوزن أصغر ما يمكن هنا.

$(C_0, C_1, \dots, C_n)$ الخطأ بالنسبة للثوابت.

- وهذا يعني $\dfrac{\partial E^2}{\partial C_j} = 0$ } المشتق بالنسبة للثابت $= 0$

هامة لإيجاد الخطأ المرتكب

$E^2 = \sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \phi(x_i, c)\right)^2$

w_i دالة الوزن

- نفرض أن

$\phi(x) = C_0 d_0(x) + C_1 d_1(x)$

$\vdots$

$C_n d_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k d_k(x)$

d_k دالة معلومة مفروضة.

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

$\frac{\partial \phi}{\partial c_0} = \mathcal{d}_0 , \ldots$ نشتق حسب عدد الثوابت

الآن: (أي مربع / $\frac{\partial E^2}{\partial c_0} = 0 \Rightarrow 2 E E'_{c_0} = 0$

$\Rightarrow E E'_{c_0} = 0$

$(2) \div \Rightarrow 2 \mathcal{d}_0 \sum w_i (f(x_i) - \phi(x_i)) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{d}_0 \sum_{i=0}^{N} w_i \left(f(x_i) - \sum_{k=0}^{n} c_k \mathcal{d}_k(x_i) \right) = 0$

$\mathcal{d}_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} w_i c_k \mathcal{d}_k(x_i)}_{\text{المجاهيل}} = \underbrace{\mathcal{d}_0 \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i)}_{\text{المعاليم}}$ ← (ما يعطيها الثوابت)

$\sum_{k=0}^{n} w_i c_k \mathcal{d}_0 \mathcal{d}_k(x_i) = \sum_{i=0}^{N} w_i \mathcal{d}_0 f(x_i)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$(\mathcal{d}_j , \mathcal{d}_k) = \sum_{i=0}^{N} w_i \mathcal{d}_j(x_i) \mathcal{d}_k(x_i)$ $j=0$, $j=1$ نرمز

$(f , \mathcal{d}_j) = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \mathcal{d}_j(x_i)$ فقط

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{d}_0,\mathcal{d}_0) & \cdots & (\mathcal{d}_0,\mathcal{d}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\mathcal{d}_0) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

فقط حلها

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

لتكن $(\overset{x_0}{1}, 2.1), (\overset{x_1}{2}, 2.9), (\overset{x_2}{5}, 6.1), (\overset{x_3}{7}, 8.3)$

أوجد التقريب لمعادلة مستقيم الذي يقرب البيانات السابقة.

الحل: لا يتعلق بعدد النقاط.

$\phi(x) = c_0 + c_1 x$ حيث $\phi_0 = 1$ ، $\phi_1 = x$

$$\begin{pmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\phi_0, f) \\ (\phi_1, f) \end{pmatrix}$$

$W = 1$ في الدوريات

$$(\phi_0, \phi_0) = \sum_{i=0}^{N} 1 = \underbrace{N + 1}_{\text{عدد النقاط}} = 4$$

$$(\phi_0, \phi_1) = \sum_{i=0}^{N} (x_i) \cdot 1 = (\phi_1, \phi_0)$$

$$= x_0 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$= 1 + 2 + 5 + 7$$

$$(\phi_1, \phi_1) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = (1)^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2$$

$$(f, \phi_0) = \sum_{i=0}^{3} 1 f(x_i) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$$

$$(f, \phi_1) = \sum x_i y_i = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

ثم نعوض في المصفوفات.

$$\phi = \underbrace{1.04396}_{c_1} x + \underbrace{0.9352}_{c_0}$$

c_0 ظهرت أولاً لمكان بالحل
لترتيب المتغيرات.

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

مثال(2):

أوجد معادلة المستقيم الذي يقرب البيانات التالية:

(1,2.1) ,(2,2.9) ,(5,6.1) ,(7,8.3) ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

x_0 x_1 x_2 x_3

طريقة ثانية

الحل:

لنحسب كل من S_y , S_{xy} , S_{xx} , S_x

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1+2+5+7 = 15$$

حيث n عدد النقاط

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2 = 79$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (1)(2.1) + (2)(2.9) + (5)(6.1) + (7)(8.3) = 96.5$$

Scanned by CamScanner

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i = 2.1+2.9+6.1+8.3 = 19.4$$

وبذلك نجد:

أصغر ما يمكن بالنسبة لرتبة المشتقات.

$$\hat{c}_0^{(0)} = \frac{nS_{xy} - S_xS_y}{nS_{xx} - S_xS_x} = \frac{4(96.5)-(15)(19.4)}{4(79)-(15)(15)} = \frac{386-291}{316-225} = \frac{95}{91} = 0,9352$$

$$c_1^{(0)} = \frac{S_{xx}S_y - S_{xy}S_x}{nS_{xx} - S_xS_x} = \frac{(79)(19.4)-(96.5)(15)}{4(79)-(15)(15)}$$

$$= \frac{1532.6-1447.5}{316-225} = \frac{85.1}{91} = 1,04396$$

وبذلك يكون التابع الخطي المطلوب :

$$f(x) = 1.04396\,x + 0.9352$$

ويكون الخطأ المرتكب:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{4}[f(x_i) - y_i]^2$$

$$E^2 = [f(x_1)-y_1]^2 + [f(x_2)-y_2]^2 + [f(x_3)-y_3]^2 + [f(x_4)-y_4]^2$$

حيث:

$$f(x_1) = 1.04396(1)+0.9352 = 1.9792$$
$$f(x_2) = 1.04396(2)+0.9352 = 3.02312$$
$$f(x_3) = 1.04396(5)+0.9352 = 6.155$$
$$f(x_4) = 1.04396(7)+0.9352 = 8.24292$$

ومنه:

$$E^2 = [2.1-1.9792]^2 + [2.9-3.02312]^2 + [6.1-6.155]^2 + [8.3-8.24292]^2$$
$$= [0.1208]^2 + [-0.12312]^2 + [-0.055]^2 + [0.05708]^2$$
$$= 0.01459264 + 0.0151585344 + 0,003025 + 0.0032581264$$
$$= 0.0360343008$$

$\Rightarrow E = 0,1898270286$ وهو الخطأ المرتكب المطلوب.

انتهت المحاضرة

Hadeel Saeed

Kamal Al-Refae

Com Team

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

المحاضرة الحادية عشر: 11/4/2019

د. برلنت مطيط

العنوان: الطرائق العددية

المحتوى العلمي:

- طريقة سلسلة تايلور - مثال:
- سنبدأ أولاً بشرح ملاحظة من الكتاب p175
- لنبدأ الآن:

من المعادلات التفاضلية غير صحيح أنه كلما صغرنا h حصلنا دقة أكبر وذلك بسبب وجود h بصيغة الخطأ من البسط والمقام و (h المثلى) هي التي توازن بين المقدار الأول والثاني حيث الخطأ منها أصغر ما يمكن

مبرهنة(4) :

ليكن $y(x)$ حلاً وحيداً لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y'(x)=f(x,y) \qquad a\le x\le b \qquad y(a)=\alpha$$

وكلما أصغرنا يكون (نفعي)

و $u_0,u_1,\dots,u_n$ هي القيم التقريبية للحل الناتجة عن استخدام الطرائق السابقة:

أن المشتق الأول بالنسبة لـ h يساوي الصفر

$$u_0=\alpha+\delta_0$$

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)+\delta_{i+1} \qquad i=0,1,2,\dots,M-1$$

فإذا كانت $|\delta_i|<\delta$ $(\forall i=0,1,2,\dots,M)$، وتحققت أيضاً فرضيات مبرهنة الخطأ الحدي. (أي إنّ f مستمر ويحقق شرط ليبتشز على D بثابت L ويوجد حد أعلى للقيمة المطلقة للمشتق الثاني لـ y). فإن:

$$|y(x_i)-y_i|\le\frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(x_i-a)}-1\right]+|\delta_0|e^{L(x_i-a)} \qquad (4)$$

نلاحظ أنّ الخطأ هنا غير مرتبط خطياً بمقدار الخطوة h وذلك لأن:

$$\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)\xrightarrow{h\to0}\infty$$

ويُتوقع أن يصبح الخطأ أكبر من أجل قيم لـ h صغيرة بشكل كاف، ويمكن إجراء بعض الحسابات لإيجاد حد أدنى لمقدار الخطوة h، وذلك بوضع:

$$E(h)=\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right) \qquad (5)$$

نقوم بدراسة هذا المقدار حتى يكون أصغر ما يمكن لذلك نشتقه ونجعله يساوي الصفر

$$\Rightarrow E'(h)=\left(\frac{M}{2}-\frac{\delta}{h^2}\right)$$

وعندئذ نجد:

إذا كان $h<\sqrt{2\delta/M}$، فإن $E'(h)<0$ وعليه فإن $E(h)$ يتناقص، مع ملاحظة $|E(h)|$ متزايدة.

M المشتق الثاني بالقيمة المطلقة

وإذا كان $h>\sqrt{2\delta/M}$، فإن $E'(h)>0$ وعليه فإن $E(h)$ يتزايد.

أما القيمة الدنيا لخطأ الخطوة فهي من أجل h التالية:

$|y''(x)|\le M$

Scanned by CamScanner

يأتي السؤال " أوجد الخطأ الأعظمي بطريقة أولر ثم أوجد h الأمثل "

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}} \qquad (6)$$

ويؤدي تناقص h إلى أقل من هذه القيمة زيادة في الخطأ الكلي في التقريب، لقد جرت العادة أن تكون قيمة δ صغيرة بقدر كافٍ بحيث لا يؤثر هذا الحد الأدنى لـ h في عمليات طرائق أولر.

إذا أزددنا عدد النقاط يصبح الحل أدق (حسب سيمبسون).

أما بالاشتقاق هنا يوجد مشكلة:

$$E(h) = \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)$$

$$E'(h) = \left(\frac{M}{2} - \frac{\delta}{h^2}\right)$$

نلاحظ أنه عندما نصغر (h)

فإن $\frac{\delta}{h}$ يكبر وبالتالي فإن $\frac{hM}{2}$ يصغر

وعندما نكبر (h) فإن $\frac{\delta}{h}$ يصغر و $\frac{hM}{2}$ يكبر.

يصبحان مثل حبل

شد

حيث δ هي الخطأ الأعظمي للتدوير.

* طريقة سلسلة تايلور *

الصيغة التكرارية لهذه الطريقة:

$$y_{i+1} = y_i + h\,T^{(k)}(x_i, y_i)$$

$i = 0, 1, \ldots, M-1$

$$T^{(k)}(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f'(x_i, y_i)$$

$$+ \cdots + \frac{h^{(k-1)}}{k!} f^{(k-1)}(x_i, y_i)$$

مثال: P.178 أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + x + 1 \;;\; x \in [0, 1]$$

$f(x, y)$ $\quad y(0) = 1$

باستخدام طريقة تايلور من الرتبة الثانية $(k=2)$

و الرتبة الرابعة $(k=4)$ حيث أن $M = 10$

1) يمكنكم الرجوع إلى الكتاب ورؤية الحل كما ورد فيه

P178, 179, 180

و الجدول (4) يوجد مقارنة في جدول للأخطاء.

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

$K = 2$ $\boxed{T}$

$$y_{i+1} = y_i + h\,T^2(x_i, y_i)$$

$$T^2(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f'(x_i, y_i)$$

$$\boxed{h = 0.1} = \frac{b-a}{M}$$

$$f(x_i, y_i) = -y_i + x_i + 1$$

$$f'(x, y) = -y' + 1 = y - x - 1 + 1 = y - x$$

((المشتقة لسيني x)) $y = y(x)$

$$f'(x_i, y_i) = y_i - x_i$$

$$y_1 = y_0 + h(-y_0 + x_0 + 1) + \frac{h^2}{2}(y_0 - x_0)$$

$$= 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1 - 0)$$

$$= 1 + 0 + \frac{0.01}{2} = 1.005$$

$$\boxed{K = 4}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,T^4(x_i, y_i)$$

$$f''(x, y) = y' - 1 = -y + x + 1 - 1 = -y + x$$

$$f''(x_i, y_i) = -y_i + x_i$$

$$f'''(x, y) = -y' + 1 = y - x - 1 + 1 = y - x$$

$$f'''(x_i, y_i) = y_i - x_i$$

x_i	$\boxed{K=2}$ تايلور من أجل قيم y	$\boxed{K=4}$ تايلور من أجل قيم y
القيمة الابتدائية 0	1	1
0,1	1,005	1,0048
0,2	1,090	1,0187
0,3		
⋮		
0,9	⟶	

- الدقة تزداد كلما كبرت المرتبة

إذا كان الحل الفعلي (موجود) فإنه كلما ازدادت مرتبة K ستقترب الحل التقريبي من الحل الفعلي.
بينما إذا كان الحل الفعلي غير موجود (موعا طنيا ياه نبحث الحسابية) فالحل هو طريقة تايلور.

* صيغة السؤال تكون على النحو التالي:
* أوجد الخطأ الأعظمي الكلي بطريقة أولر ثم أوجد $h_{optimal}$ (h المثالي)

نضع القانون ونعوض

انتهت المحاضرة.

Hadeel Saeed
Kamal AL Refae
Com Team
Hadeel

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

المحاضرة الثانية عشر: 15/4/2019

د. برلنت مطيط

- العنوان: التقريبات.

- المحتوى العلمي: التقريبات (الخطي) بيانات متقطعة
- التقريبات الجبرية - التقريب بالحدوديات المتعامدة
- أمثلة من الكتاب.

- التقريبات: (الخطي) بيانات متقطعة:
- العرض: يوجد لدينا مجموعة نقاط
(x_0, y_0) —— (x_m, y_m) } $N+1$ نقطة

لو علاقة

$\phi = c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n$ }

$$\begin{pmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) & \cdots & (\phi_0, \phi_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & (\phi_n, \phi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\phi_0, f) \\ \vdots \\ (\phi_n, f) \end{pmatrix}$$

$$(\phi_j, \phi_k) = \sum_{i=0}^{N} w_i \, \phi_j(x_i) \cdot \phi_k(x_i)$$

$$(f, \phi_j) = \sum_{i=0}^{N} w_i \, f(x_i) \, \phi_j(x_i)$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

P 21

1 الحدوديات الجبرية : $W=1$

الجملة الشاذة

$$\begin{pmatrix} N+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$E^2 = \sum_{i=0}^{N} [\underbrace{f(x_i)}_{y_i} - \phi(x_i)]^2$$

2 التقريب بالحدوديات المتعامدة:

$$\begin{pmatrix} (d_0, d_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (d_1, d_1) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (d_2, d_2) & \cdots \\ & & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_0, f) \\ \vdots \\ (C_n, f) \end{pmatrix}$$

$$\phi = C_0 d_0 + C_1 d_1 + \cdots + C_n d_n$$

$$C_0 = \frac{(d_0, f)}{(d_0, d_0)} \quad \cdots \quad C_n = \frac{(d_n, f)}{(d_n, d_n)}$$

Scanned by CamScanner

3

اسم الحدودية	المجال	$w(x)$	الصيغة التكرارية:
ليجندر	$]-1,1[$	1	$P_{k+1}=\frac{1}{k+1}\left((2k+1)\,x\,P_k(x)-k\,P_{k-1}(x)\right)$ $P_0=1 \quad , \quad P_1=x$
تشبيشيف	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
لاكير	$]0,\infty[$	e^{-x}	
هرميت.	$]-\infty,\infty[$	e^{-x^2}	

$$x=\left(\frac{b-a}{2}\right)t+\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)\,P_j(x)\,dx=\delta_{ij}\left(\frac{2}{2i+1}\right)$$

$$dx=\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

- بالإضافة إلى الأمثلة في الكتاب (مطلوبة):

مثال (3) - p24 - مثال 4 - p27 مثال 5 - p29 مثال 6 - p38

مثال 7 - p42 - مثال 8 - p49 مثال 9 - p51

مثال 10 - p53

* مع الانتباه إلى الأخطاء الواردة وتصحيحها في الجدول.

انتهت المحاضرة.

Hadeel Saeed

Kamal AL-Refae

Com Team

Hadeel

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2)

22/4/2019

* المحاضرة الثالثة عشر:

د. برلنت مطيع

العنوان: التقريبات.

المحتوى العلمي:

التقريب باستخدام حدودية تشبيشيف / مثال.

أصفار الحدودية. - مبرهنة.

* التقريب باستخدام حدوديات تشبيشيف ص59

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad]-1,1[$$

$$T_n(x) = \cos\left(n \cos^{-1}(x)\right) \qquad \boxed{n \geq 0}$$

$n=0$: $T_0(x) = 1$

$n=1$: $T_1(x) = x$

$T_{n+1}(x) = 2x T_n - T_{n-1}$

$T_2(x) = 2x T_1 - T_0$

$T_{\boxed{2}} = \boxed{2} x^2 - 1$

$T_{\boxed{3}} = \boxed{4} x^3 - 3x$

$T_{\boxed{4}} = \boxed{8} x^4 - 8x^2 + 1$

مضاعفات (2)

$$\int_{-1}^{1} w T_n T_m = \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & : m = n \neq 0 \\ \pi & : m = n = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن معامل أكبر درجة 2^{n-1}

حدودية تشبيشيف واحدية المعامل.

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

Scanned by CamScanner

ميزتها أنها متعامدة — أي جذور

أصفار حدودية تشيبشيف:

$T_1 \longrightarrow$ تملك جذراً بسيطاً

$T_2 \longrightarrow$ تملك (2) جذراً بسيطاً

$T_n \longrightarrow$ تملك (n) جذراً بسيطاً

تنتمي إلى $[-1,1]$

وهذه الجذور

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k=1,2,\ldots,n$$

مثال:

$n=2$

طريقة تقليدية

$$T_2(x) = 2x^2-1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

حسب القانون

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{4}\pi\right) \quad k=1,2 \quad n=2$$

$$\tilde{x}_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{x}_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

أصفار $T_n(x)$ = أصفار $\tilde{T}_n(x)$

القيم القصوى: $T_n(x)$ هي:

ليست المشتق

$$\tilde{x}^*_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \quad k=1,\ldots,n-1$$

$\boxed{n=2}$

التقليدية

$$T_2(x) = 2x^2-1$$

$$T_2'(x) = 4x \quad \Big\} \quad T_2'(x)=0, \quad \tilde{x}^*_1 = 0$$

حسب القانون

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{k}{2}\pi\right) \quad k=1$$

$$\tilde{x}^*_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

وأيضاً:

$$T_n(\tilde{x}^*_k) = (-1)^k$$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

تنويه: (*) رمز القيمة القصوى.

$\tilde{T}_0 = 1$

$\tilde{T}_2 = x\tilde{T}_1 - \frac{1}{2}\tilde{T}_0$

$\vdots$

$\tilde{T}_{n+1} = x\tilde{T}_n - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}$

$\tilde{T}_n(\tilde{x}_k^*) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$ الجذور والقيم القصوى ذاتها.

مبرهنة: ص 64

$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1\le x\le 1} |\tilde{T}_n(x)| \le \max_{-1\le x\le 1} P_n(x)$

تكمن أهمية تشبيشيف في تصغير الخطأ الناتج عن الاستيفاء.

$(n+1)$ نقطة مختلفة $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$E_{max} = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} K_{n+1}$

$K_{n+1}(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_n)$

ما هي أعظم قيمة لـ $K_{n+1}(x)$

إذا افترضنا $x_0, x_1, \ldots, x_n$ جذور (أصفار) تشبيشيف عندئذ يمكن إيجاد أعظم قيمة.

$\max |K_{n+1}| = \frac{1}{2^n}$

حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة n تأخذ الشكل:

$\phi(x) = C_0^{(0)}T_0(x) + C_1^{(0)}T_1(x) + \cdots + C_n^{(0)}T_n(x)$

وتصبح المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} (T_0,T_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (T_1,T_1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & (T_n,T_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,T_0) \\ \vdots \\ (f,T_n) \end{pmatrix}$$

مع استخدام التكامل وتمييز الحالات: $\int_{-1}^{1} w T_n T_m$

حيث (f,T_0) هي ما نريد تقريب دالة (f) هنا.

هام

حدودية الاستيفاء غير مطالبين بها لكن حدودية التقريب ثم

مثال(11):

أوجد حدودية ~~الاستيفاء~~ التقريب من الدرجة الثانية للتابع $f(x)=\sin \pi x$ على المجال $[-1\,,1]$ و باستخدام أصفار تشبتشيف،ثم قدر قيمة الخطأ المرتكب.

الحل:

ص ب (5) درجات

بما أن $n=2$ فالحدودية المطلوبة من الشكل:

$$p_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

لنوجد النقاط x_k حيث $k=0,1,2$.

$$x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)\ ;\ k=0,1,2$$

$$k=0\Rightarrow x_0=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1\Rightarrow x_1=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)=0$$

$$k=2\Rightarrow x_2=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

وبالتالي:

$$x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ x_1=0\ ,\ x_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

كما أن:

Scanned by CamScanner

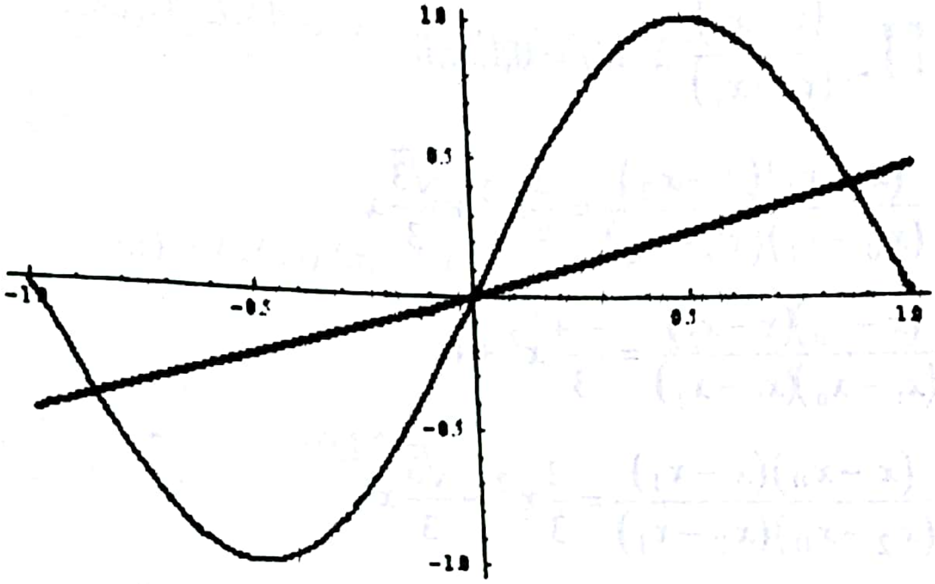
ما نريده فقط هو الخطأ المرتكب:

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-p_2(x)\right|\le \frac{1}{2^2(3)!}\max_{-1\le x\le 1}\left|f^{(3)}(\xi(x))\right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin(x)-p_2(x)\right|\le \frac{1}{24}\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin^{(3)}(\xi(x))\right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\sin(x)-p_2(x)\right|\le \frac{1}{24}(8)=\frac{1}{3}$$

ويكون الرسم البياني:



الشكل 17

يمكن تحويل النقاط x_k من المجال $[-1\,,1]$ إلى المجال $[a\,,b]$ كما يبين لنا المثال التالي:

يأتي السؤال لا أوجد الحدودية التقريبية!!

مثال(12): أوجد حدودية ~~الاستيفاء~~ من الدرجة الثالثة للتابع $f(x)=xe^x$ على المجال $[0\,,1.5]$ و باستخدام أصفار تشبتشيف. وأوجد الخطأ المرتكب.

ملاحظة

لو كانت $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $f(x) = x^2$

أكو حد فلا (f , T.)

لو حسب على الآلة الحاسبة سيكون الناتج $\frac{1}{0}$

(خطأ رياضي) ويمكن معالجته تحليلياً:

$$\frac{h}{3}\{y_0 + y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots\}$$

سؤال دورة:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad , \quad f(x) = 1-x^2$$

بحسابه على الآلة الحاسبة يكون الناتج ∞

وتتم معالجته تحليلياً حيث يمكن حسابه على الآلة الحاسبة

ويصبح

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

انتهت المحاضرة

Hadeel Saeed
Kamal Al-Refa
com Team

24/4/2019 المحاضرة الرابعة عشر:

د. برلنت مطلك

- العنوان: الطرائق العددية.

- المحتوى العلمي:
- رانج كوتا. طريقة نقطة المنتصف - أمثلة
- رانج كوتا من المرتبة الرابعة.

- رانج كوتا: الشكل العام للحل التقريبي:

$y_{i+1} = y_i + \phi h$ الميل (مقدار الزيادة)

$\phi = \phi(x, y, h)$ مجاهيل

$\phi = a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots + a_n K_n$

$y_{i+1} = y_i + (a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots + a_n K_n) h$

رانج كوتا من المرتبة n.

رانج كوتا من المرتبة الثانية $(n = 2)$

* طريقة نقطة المنتصف: حفظ

الصيغة التكرارية للحل التقريبي: مجاهيل

$y_0 = \alpha$

$y_{i+1} = y_i + (a_1 K_1 + a_2 K_2) h$ لفظ

$i = 1, 2, \dots, n-1$

$K_1 = f(x_i, y_i)$ هو المشتق $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ لفظ

$K_2 = f(x_i + \boxed{P_1} h, y_i + \boxed{q_1} K_1 h)$ مجهول، مجاهيل، معاليم لفظ

$a_1 + a_2 = 1 \quad , \quad a_2 P_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_2 q_1 = \frac{1}{2}$ لفظ

$P_1 h$ تغير صغير بالنسبة لـ x و y تغير صغير بالنسبة لـ $q_1 K_1 h$

Scanned by CamScanner

(3) معادلات بدلالة (4) مجاهيل لذلك نأخذ واحد اختياري

1- أولر المعدلة   2- هين   3- رالستون

$a_2 = 1$ $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{2}{3}$

I

$$\boxed{a_1 = 0,\quad p_1 = \frac{1}{2},\quad q_1 = \frac{1}{2}}$$

$$y_{i+1} = y_i + K_2 h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}K_1 h)$$

2

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{2},\quad p_1 = 1,\quad q_1 = 1}$$

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2)h$$

$$K_2 = f(x_i + h,\ y_i + K_1 h)$$

مثال ص 185

$$y' = \underbrace{-y + x + 1}_{f(x,y)} \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \qquad h = 0.1 \qquad (x_0 = 0,\ y_0 = 1)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i) = -y_i + x_i + 1$$

$$K_2 = f(x_i + h,\ y_i + K_1 h) = f(x_i + 0.1,\ y_i + 0.1K_1)$$

$$= -(y_i + 0.1K_1) + (x_i + 0.1) + 1$$

$$= -y_i + 0.1K_1 + x_i + 1.1$$

x_i	$K_1 = -y_i + x_i + 1$	$K_2 = -y_i + 0.1K_1 + x_i + 1.1$	$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2)(0.1)$
0	—	—	1
0.1	$-y_0 + x_0 + 1$	$-y_0 + 0.1K_1 + x_0 + 1.1$ (x_0, y_0)	
0.2	$-y_1 + x_1 + 1$	$-y_1 + 0.1K_1 + x_1 + 1.1$ (x_1, y_1)	
⋮			
1			

Scanned by CamScanner

مثال(8):

باستخدام طريقة رالستون أوجد الحل التقريبي لمسالة القيمة الابتدائية:

$$y' = \frac{(x-y)}{2};0 \le x \le 1 \quad ; y(0)=1 \quad ;h=0.1$$

الحل:

انطلاقاً من معادلة رالستون (13) نحصل على القيم التقريبية لحل المعادلة التفاضلية المبينة في الجدول التالي:

x_n	y_{n+1}
0	1.00000
0.1	0.95375
0.2	0.914629688
0.3	0.88229149
0.4	0.85640478
0.5	0.836655047
0.6	0.822743114
0.7	0.814384387
0.8	0.811308148
0.9	0.813256876

جدول7

وظيفة حله
بالطريقة الحقيقية

Scanned by CamScanner

مثال(9):

أوجد الحل التقريبي لمسالة القيمة الأبتدائية باستخدام طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة:

$$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \qquad h = 0.1$$

الحل:

بتطبيق معادلات رانج – كوتا حيث:

$$f(x, y) = -y + x + 1$$

مثلاً عند $n = 0$:

$$k_1 = 0.1\left(-y_0 + x_0 + 1\right) = 0$$
$$k_2 = 0.1(-0.95 y_n + 0.95 x_n + 1) = 0.005$$
$$k_3 = 0.1\left(-0.9525(x_n - y_n) + 1\right) = 0.009525$$
$$k_4 = 0.1\left(-1 - 0.19525\right) = 0.00525$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة (15)، نحصل على:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1.0048375009$$

Scanned by CamScanner

مثال(10):

الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية $y' = 3x + \frac{y}{2}$ هو:

$$y = 13e^{x/2} - 6x - 12$$

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية من أجل القيمة الابتدائية $y(0) = 1$، وبأخذ $h = 0.1$ على المجال $0 \le x \le 1$، ثم أثبت أن الدقة تزداد بنقصان المجال.

الحل:

بتطبيق معادلات رانج – كوتا حيث $f(x,y) = 3x + y/2$ تصبح:

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0,1) = 0.05$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = hf(0.05, 1.025) = 0.06625$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = hf(0.05, 1.033125) = 0.6665625$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(0.1, 1.06665625) = 0.0833328$$

وبتعويض هذه القيم في معادلة رانج – كوتا (15)

Scanned by CamScanner

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(0.05 + 2\times 0.06625 + 2\times 0.6665625 + 0.083328)$$
$$= 1.06652421856$$

وبالمقارنة مع الحل الفعلي $y = 13e^{x/2} - 6x - 12$ نجد القيمة الفعلية للنقطة y_1 ، بتعويض قيمة x_1، هي $y(0.1) = 1.06652424866$، أي تصل الدقة إلى ثمانية أرقام معنوية، بأخذ $h = 0.1$. وبمقارنة قيمة y الناتجة من الحل الفعلي مع قيمة y الناتجة من الحل العددي وذلك بازدياد قيمة h نلاحظ أن قيمة الخطأ تزداد كما هو موضح في الجدول أدناه:

المجال المختارة h	قيمة y من الحل الفعلي	قيمة y بطريقة رانج - كوتا
$h = 0.1$	$\tilde{y}(0.1) = 1.06665242486$	$y(0.1) = 1.06652421856$
$h = 0.2$	$\tilde{y}(0.2) = 1.16722193718$	$y(0.2) = 1.1672208333$
$h = 0.4$	$\tilde{y}(1.4) = 1.47823585939$	$y(0.4) = 1.4782$

جدول9

Scanned by CamScanner

رانج كوتا من الرتبة الرابعة: $(n=4)$

$y_0 = \alpha$

$K_1 = h\, f(x_i, y_i)$

$K_2 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2} K_1\right)$

$K_3 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{1}{2} K_2\right)$

$K_4 = h\, f(x_i + h,\ y_i + K_3)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

لا يأتي أكثر من تكرارين
سؤال ب (2) درجة

مثال 9: ص 189

$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$

$y(0) = 1 \quad , \quad h = 0.1$

$f(x, y) = -y + x + 1$

$K_1 = 0.1(-y_i + x_i + 1)$

$K_2 = 0.1\left(-\left(y_i + \frac{0.1}{2}\boxed{K_1}\right) + \left(x_i + \frac{0.1}{2}\right) + 1\right)$

$K_3 = 0.1\left(-\left(y_i + \frac{0.1}{2}\boxed{K_2}\right) + \left(x_i + \frac{0.1}{2}\right) + 1\right)$

$K_4 = 0.1\left(-\left(y_i + \boxed{K_3}\right) + (x_i + 0.1) + 1\right)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

DARKAL CENTRAL STATIONERY

Scanned by CamScanner

x_i	K_1	K_2	K_3	K_4	y_{i+1}
0	–	–	–	–	1
0.1					
0.2					
⋮					
1					

- بالإضافة إلى المثال رقم 11 حلوا
الشيت المرفقة.

Hadeel Saeed

Kamal Al-Refae

Com Team

Scanned by CamScanner

تحليل عددي (2).

29/4/2019

- المحاضرة الخامسة عشرة.

د. برلنت مطيط

العنوان: التقريبات.

- المحتوى العلمي:

1- تخفيض درجة حدودية تشيبتشيف / أمثلة.

2- التقريب بتابع أسي.

3- التقريب بتابع قوة

4- الطرائق ذات الخطوات المتعددة.

5- طريقة آدمز باشفورث وآدمز مولتون

---

* تخفيض درجة حدودية تشيبتشيف:

يمكن الاستفادة أيضا من حدوديات تشيبتشيف في إيجاد طرائق لتخفيض درجة حدودية التقريب مع أقل خسارة ممكنة للدقة وذلك لأن حدوديات تشيبتشيف تملك قيما صغرى وعظمى بالقيمة المطلقة تتوزع بانتظام على المجال ما.

لنفرض أننا نريد تقريب حدودية اختيارية من الدرجة n من الشكل :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

على المجال $[-1,1]$ بحدودية من الدرجة $n-1$ على الأكثر .

Scanned by CamScanner

الموضوع المدروس هو اختيار $P_{n-1}(x)$ من $\prod_{n-1}$ بحيث يكون

$$max_{-1\leq x\leq 1}|P_n(x)-P_{n-1}(x)|$$

أصغر ما يمكن .

نلاحظ أن $\big(P_n(x)-P_{n-1}(x)\big)$ هي حدودية واحدية المعامل الرئيسي من الدرجة n وبالتالي حسب مبرهنة سابقة يكون : a_n

$$max_{-1\leq x\leq 1}|P_n(x)-P_{n-1}(x)|\geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

وتتحقق المساواة عندما :

معلومة مجهولة

$$\frac{\big(P_n(x)-P_{n-1}(x)\big)}{a_n}=\tilde{T}_n(x)$$

معلومة

هذا يعني أننا يجب أن نختار:

$$P_{n-1}(x)=P_n(x)-a_n\tilde{T}_n(x)$$

وبهذا الاختيار يصبح لدينا :

$$max_{-1\leq x\leq 1}|P_n(x)-P_{n-1}(x)|=|a_n|max_{-1\leq x\leq 1}\left|\frac{\big(P_n(x)-P_{n-1}(x)\big)}{a_n}\right|$$

أصغر خطأ $$max_{-1\leq x\leq 1}|P_n(x)-P_{n-1}(x)|=\frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

Scanned by CamScanner

مثال دورة ٢٠١٤ 72م

ليكن لدينا التابع : $f(x) = e^x$ والمقرب على المجال $[-1,1]$ بواسطة حدودية ما ك لوران من الدرجة الرابعة :

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

١- أوجد خطأ الاقتطاع الأعظمي

٢- أوجد تقريب الدالة $f(x) = e^x$ لحدودية من الدرجة الثالثة وذلك بالاستفاد من مما سبق وباستخدام أصفار تشيبتشيف ثم اوجد الخطأ الكلي المرتكب

الحل

ان خطأ الاقتطاع الاعظمي يعطى بالعلاقة

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))||x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

أي :

$$|R_4(x)| = \frac{|f^{(5)}(\xi(x))||x^5|}{5!} = \frac{|e^{\xi(x)}||x^5|}{120} \le \frac{e}{120} \approx 0.0226$$

حيث $-1 \le x \le 1$

وحيث اكبر قيمة للمقدار $\xi(x)$ ضمن المجال هي 1 وكذلك إن أكبر للمقدار $|x^5|$ ضمن المجال هي 1

Scanned by CamScanner

أن حدودية التقريب من الدرجة الثالثة تعطى بالعلاقة :

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n\tilde{T}_n(x) \Rightarrow P_3(x) = P_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x) \ldots\ldots (*)$$

لدينا a_4 معامل أكبر أس في الحدودية $P_4(x)$ وهو $a_4 = \frac{1}{4!}$

أما $\tilde{T}_4(x)$ فهي حدودية تشيبتشيف واحدية المعامل الرئيسي والتي نوجدها من حدودية تشيبتشيف .

حيث نعلم ان

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \Rightarrow \tilde{T}_4(x) = \frac{T_4(x)}{2^3}$$

لدينا :

$$\tilde{T}_0(x) = 1\,, \quad \tilde{T}_1(x) = x$$

ولدينا من أجل $\tilde{T}_2(x)$ و $T_3(x)$ و $\tilde{T}_4(x)$ نعوض في العلاقة التكرارية لحدوديات تشيبتشيف .

$$T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad ;n-1$$

$$T_2(x) = 2x.T_1(x) - T_0(x) \Rightarrow \; T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x.T_2(x) - T_1(x) = 2x.(2x^2-1) - x \Rightarrow \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x.T_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = 2^3(x^4 - x^2 + \frac{1}{8})$$

$$\tilde{T}_4(x) = \frac{T_4(x)}{2^3} \Rightarrow \tilde{T}_4(x) = (x^4 - x^2 + \frac{1}{8})$$

نعوض في العلاقة .... $(*)$ فنجد

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

سنقوم بالتقريب الى خمس منازل

$$P_3(x) = 0.99479 + x + 0.54167x^2 + 0.16667x^3$$

الخطأ الناتج عن التقريب يعطى بالعلاقة

Scanned by CamScanner

$$max_{-1\le x\le 1}|P_n(x) - P_{n-1}| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow |P_4(x) - P_3(x)| \le \frac{\frac{1}{24}}{2^3} = \frac{1}{192} \le 0.00520$$

الخطأ الكلي هو حاصل جمع خطأ التقريب مع خطأ الاقتطاع

$$E_{\text{كلي}} = 0.00520 + 0.02265 = 0.02785$$

Scanned by CamScanner

1 التقريب بتابع أسي من الشكل be^{ax}

لتكن لدينا البيانات المعطاة

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

نريد تقريب هذه البيانات بتابع أسي من الشكل

$$y = be^{ax}$$

نأخذ ln للطرفين فتصبح

$$y = be^{ax} \Rightarrow ln(y) = ln(b) + ax$$

وباستخدام الرموز التالية :

$$Y = lm(y) \ , \ B = lm(b)$$

$$A = a \quad , \quad X = x$$

نحصل على المعادلة :

$$Y = AX + B$$

وهو تابع خطي نحسب فيه الثوابت بالطريقة المعتادة

مثــال

قرب البيانات التالية الى تابع أسي ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب

x_i	1	1.25	1.50	1.75	2
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

الحــل

عدد البيانات المعطاة $n = 5$

التابع المطلوب من الشكل $y = be^{ax}$

نجري التحويل التالي:

$$Y = ln(y) \ , \ B = ln(b)$$

$$A = a \quad , \quad X = x$$

Scanned by CamScanner

i	1	2	3	4	5
$Y_i = lm(y_i)$	$lm(5.10) = 1.629$	$lm(5.79) = 1.756$	$lm(6.53) = 1.876$	$lm(7.45) = 2.008$	$lm(8.46) = 2.135$

والأن سوف نوجد الثوابت c_i

$$\begin{bmatrix} N+1 & \sum_{i=1}^{5} X_i \\ \sum_{i=1}^{5} X_i & \sum_{i=1}^{5} X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} Y_i \\ \sum_{i=1}^{5} X_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7.5 \\ 7.5 & 11.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.404 \\ 14.422 \end{bmatrix}$$

$$5C_0 + 7.5C_1 = 9.404$$

$$7.5\, C_0 + 11.875\, C_1 = 14.422$$

بحل جملة المعادلتين نحصل على :

$$C_1 = 0.5056 \quad , \quad C_0 = 1.1224$$

أي $\boxed{Y = 0.5056\, X + 1.1224}$

$$C_1 = A = a = 0.5056$$

$$C_0 = B = ln(b) = 1.1224 \Longrightarrow b = e^{1.1224} = 3.071$$

ومنه التابع المطلوب :

$$y = 3.071 e^{0.5056\, x}$$

والخطأ المرتكب:

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - b e^{a x_i}]^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{5} [y_i - 1.658\, e^{1.1224\, x_i}]^2 = \sum_{i=1}^{5} d_i^2$$

ومنه الخطأ المرتكب

$E = 0.00137 \Rightarrow E_1 = 0.03633\ L$

Syria M

Scanned by CamScanner

i	x_i	y_i	$f(x_i)$	d_i^2
1	1	5.10	5.091656	0.00006
2	1.25	5.79	5.777685	0.00015
3	1.50	6.53	6.556148	0.00068
4	1.75	7.45	7.439497	0.00011
5	2	8.46	8.441864	0.00032

2 التقريب بتابع قوة من الشكل bx^a ص 81

لتكن لدينا البيانات المعطاة

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

نريد تقريب هذه البيانات بتابع قوة من الشكل

$$f(x) = bx^a = y$$

نقوم بالتحويل التالي : نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$y = bx^a \implies ln(y) = ln(b) + a\, ln(x)$$

وبوضع

$$Y = ln(y) \ , \ B = ln(b)$$

$$A = a \quad , \quad X = ln(x)$$

فنجد

$$Y = AX + B$$

التقريب لمستقيم لبيانات متقطعة .

وهو تابع خطي نحصل فيه على الثوابت بالطريقة المعتادة

حالة خاصة

إذا كانت قيمة a معلومة فإننا نجد أن

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2a}}$$

Scanned by CamScanner

8^2 مل **مثال** ك، دورة

قرب البيانات التالية الى التابع $f(x) = bx^{\frac{3}{2}}$

i	x_i	y_i
1	58	88
2	108	225
3	150	365
4	228	687

الحل

نلاحظ من التابع أنه تابع ذات قوة من الشكل $f(x) = bx^a$

نلاحظ أن $\frac{3}{2} = a$ لذلك سوف نطبق القانون

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2a}}$$

لأن a معلومة

$$\Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^{\frac{3}{2}}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^3}$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^{\frac{3}{2}} = (88)(58)^{\frac{3}{2}} + (225)(108)^{\frac{3}{2}} + (365)(150)^{\frac{3}{2}} + (687)(228)^{\frac{3}{2}} = 3327103.464$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = (58)^3 + (108)^3 + (150)^3 + (228)^3 = 16682176$$

وبالتالي بالتعويض نجد أن

$$\backslash b = \frac{3327103.464}{16682176} = 0.199440616$$

Scanned by CamScanner

مثال(16):

قرب البيانات التالية إلى التابع: $f(x) = \frac{1}{2}bx^2$.

i	x_i	y_i
1	0.2	0.1960
2	0.4	0.7850
3	0.6	1.7665
4	0.8	3.1405
5	1.0	4.9075

الحل:

وجدنا أن:

$$\frac{1}{2}b = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4}$$

Scanned by CamScanner

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 = (0.1960)(0.2^2) + (0.7850)(0.4^2) + (1.7665)(0.6^2)$$

$$+ (3.1405)(0.8^2) + (4.9075)$$

$$= 7.6868$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = (0.2^4) + (0.4^4) + (0.6^4) + (0.8^4) + (1^4) = 1.5664$$

ومنه:

$$\frac{1}{2} b = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4} = \frac{7.6868}{1.5664} = 4.9073$$

وبالتالي:

$$b = (4.9073)(2) = 9.8164$$

$$f(x) = 4.9073x^2$$

Scanned by CamScanner

د3/ 2 ابة

سؤال امتحان لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية

$$f(x,y) = y' = x + y \quad , y(0) = 0 \, , h = 0.2$$

١- أوجد y_4 باستخدام طريقة آدامس – باشفوث مرتبة رابعة وبالاستعانة بطريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة لإيجاد y_1 , y_2 , y_3

٢- استخدام نتيجة من الطلب (١) لإيجاد y_4 باستخدام آدامس – مولتون من المرتبة الرابعة .

الحل :

[1] نعلم أن الصيغة التكرارية لطريقة رانج-كوتا من المرتبة الرابعة .

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث تعطى

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i) \quad , \quad k_2 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \quad , k_4 = h\,f(x_i + h \,, y_i + k_3)$$

كما أن $\quad y' = f(x,y) = x + y$

نوجد $y_1 , y_2 , y_3 \qquad y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

-في الامتحان غالبا قيمة y_1 , y_2 , y_3 تكون معطاة

$$k_1 = h\,f(x_0, y_0) = (0) \quad , \quad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 0$$

$$k_2 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.2)f(0.1\,,0) = (0.2)(0.1 + 0) = 0.02$$

$$k_3 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = (0.2)f(0.1\,,0.01) = (0.2)(0.1 + 0.01) = (0.2)(0.11) = 0.022$$

Scanned by CamScanner

$$k_4 = h\,f(x_0 + h\,, y_0 + k_3) = (0.2)f(0.2\,, 0.022) = 0.0444$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}(0 + 2(0.02) + 2(0.022) + 0.0444) = 0.0214$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h\,f(x_1, y_1) = (0.2)f(0.2\,, 0.0214) = (0.2)(0.2 + 0.0214) = 0.04428$$

$$k_2 = h\,f\left(x_1 + \frac{h}{2}\,, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.2)f\left(0.3\,, 0.0214 + \frac{0.04428}{2}\right) = (0.2)f(0.3\,, 0.04354)$$

$$= (0.2)(0.3 + 0.04354) = 0.068708$$

$$k_3 = h\,f\left(x_1 + \frac{h}{2}\,, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = (0.2)f\left(0.3\,, 0.0214 + \frac{0.068708}{2}\right)$$
$$= (0.2)f(0.3\,, 0.055754) = (0.2)(0.3 + 0.055754) = 0.0711508$$

$$k_4 = h\,f(x_1 + h\,, y_1 + k_3) = (0.2)f(0.4\,, 0.0214 + 0.0711508) = (0.2)f(0.4\,, 0.092551)$$
$$= (0.2)(0.4 + 0.092551) = 0.098510$$

(x_1, y_1)

$$\boxed{y_2} = 0.0214 + \frac{1}{6}(0.04428 + 2(0.068708) + 2(0.0711508) + 0.098519) = 0.091818$$

(x_2, y_2)

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h\,f(x_2, y_2) = (0.2)f(0.4\,, 0.091818) = (0.2)(0.4 + 0.091818) = 0.098364$$

$$k_2 = h\,f\left(x_2 + \frac{h}{2}\,, y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.2)f\left(0.5\,, 0.091818 + \frac{0.098364}{2}\right) = (0.2)f(0.5\,, 0.141)$$

$$= (0.2)(0.5 + 0.141) = 0.1282$$

$$k_3 = h\,f\left(x_2 + \frac{h}{2}\,, y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = (0.2)f\left(0.5\,, 0.091818 + \frac{0.1282}{2}\right)$$
$$= (0.2)f(0.5\,, 0.155918) = (0.2)(0.5 + 0.155918) = 0.1311836$$

$$k_4 = h\,f(x_2 + h\,, y_2 + k_3) = (0.2)f(0.6\,, 0.091818 + 0.1311836)$$
$$= (0.2)f(0.6\,, 0.223002) = (0.2)(0.6 + 0.223002) = 0.1646004$$

$$y_3 = 0.091818 + \frac{1}{6}(0.098364 + 2(0.1282) + 2(0.1311836) + 0.1646004) = 0.222107$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0]$$

Scanned by CamScanner

$$f_3 = f(x_3, y_3) = f(0.6\,, 0.222107) = 0.6 + 0.222107 = 0.822107$$

$$f_2 = f(x_2, y_2) = f(0.4\,, 0.091818) = 0.4 + 0.091818 = 0.491818$$

$$f_1 = f(x_1, y_1) = f(0.2\,, 0.0214) = 0.2 + 0.0214 = 0.2214$$

$$f_0 = f(x_0, y_0) = f(0\,,0) = 0$$

$$y_4 = 0.222107 + \frac{0.2}{24}[55(0.822107) - 59(0.491818) + 37(0.2214) - 9(0)]$$
$$= 0.425301$$

[2]نعلم أن صغية أدامس –مولتون من المرتبة الرابعة تعطى بالشكل :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1]$$

لدينا y_3, f_1, f_2, f_3 من الطلب الأول بقي أن نقوم بحساب $f_4 = f(x_4, y_4)$

$$f_4 = f(\,x_4, y_4) = f(0.8\,, 0.425361) = 0.8 + 0.4253661 = 1.225361$$

نعوض فنجد

$$y_4 = 0.222107 + \frac{0.2}{24}[9(1.225361) + 19(0.822107) - 5(0.491818) + 0.2214] = 0.425529$$

Scanned by CamScanner

الطرائق ذات الخطوات المتعددة

تعريف طريقة الخطوات المتعددة لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x, y) \quad ; a \le x \le b \ , y(a) = \alpha$$

هي واحدة من معادلات الفروق التي تستخدم لإيجاد التقريب w_{i+1} عند نقطة الشبكة x_{i+1} والتي يمكن تمثيلها بالمعادلة التالية حيث m عدد صحيح أكبر من الواحد :

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$ نعلم أن طريقة رانج كوتا رتبة رابعة $\Longrightarrow$ خطوة واحدة.

$$w_{i+1} = a_m w_i + a_{m-1} w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m}$$
$$+ h[b_m f(x_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, w_i) + \cdots + b_0 f(x_{i+1-m}, w_{i+1-m})]$$

من أجل $i = m-1, m, \ldots, N-1$

Scanned by CamScanner

طريقة آدمز _ باشفورث

مرتبة ثانية	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \quad ; n = 1, \dots\dots$
مرتبة ثالثة	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \quad ; n = 2, \dots\dots$
مرتبة رابعة	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad ; n = 3,$

طريقة آدمز _ مولتون

$$y_{n+p} = y_{n+p-1} - h\, c_P \sum_{i=0}^{P-1} b_i\, f_{n+p-i}$$

حسب الرتبة

مرتبة (1)	$y_{n+1} = y_n + h\, f_{n+1}$ $[(x_{n+1}, y_{n+1})$
مرتبة ثانية	$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}[f_{n+1} + f_{n+2}]$ $+(x_{n+2}, y_{n+2})$
مرتبة ثالثة	$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}[5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}]$
مرتبة رابعة	$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}[9f_{n+4} + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1}]$

Scanned by CamScanner

...جدول تصحيح جديد منا في التقديم...

الفصل الثاني: الحل العددي لجملة المعادلات الخطية...

الصفحة	الخطأ	الصواب
101	في المثال 5:	
	نختار $x_2=\boxed{1}$ فيكون $x_1=\boxed{\frac{1}{2}}$	نختار $x_2=2$ فيكون $x_1=1$
109	في المثال 10: (الطلب 2)	
	$\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2 \geq \boxed{4041}$	$\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2 \geq 40401$
	$cond_\infty(A) \geq \boxed{4041}$	$cond_\infty(A) \geq 40401$
134	في وسط الصفحة:	
	$u_{22}=a_{22}-l_{21}\boxed{u_{21}}=1$ $u_{23}=a_{23}-l_{21}\boxed{u_{12}}=-1$	$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=1$ $u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=-1$
	$l_{32}=\frac{a_{32}-\boxed{l_{31}}u_{12}}{u_{22}}=3$	$l_{32}=\frac{a_{32}-l_{13}u_{12}}{u_{22}}=3$
	$u_{33}=a_{33}-l_{31}\boxed{u_{12}}-l_{32}u_{23}$	$u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}$
142	الخطأ النسبي:	
	$\boxed{R}=\frac{\|E\|}{\|X\|}$	$\|R\|=\frac{\|E\|}{\|X\|}$
143	مبرهنة (11):	
	$\boxed{R}\leq cond(A).\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$	$\|R\|\leq cond(A).\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$
148	$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{6}\left[\boxed{-}14-\boxed{x_2}\right]$	$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{6}\left[14-x_1^{(k)}\right]$
	$x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{6}\left[14-x_1^{\square}+2x_2^{\square}\right]$	$x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{6}\left[14-x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}\right]$

Scanned by CamScanner

الصفحة	الخطأ	الصواب
148	$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.8889 \\ \boxed{0.6667} \\ -2.333\boxed{4} \end{bmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} \boxed{-1.9268} \\ \boxed{0.9816} \\ \boxed{-2.8706} \end{bmatrix}$ وباقي القيم جميعها خاطئة لذلك سننتقل إلى التصحيح مباشرة... وذلك لأنه يوجد فقط (9) تكرارات وليس (10)	$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.8889 \\ 2.333\bar{3} \\ -2.333\bar{3} \end{bmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.6667 \\ 2.6482 \\ -3.4259 \end{bmatrix}$ $x^{(3)} = \begin{bmatrix} -2.6852 \\ 2.7778 \\ -3.6605 \end{bmatrix}$ $x^{(4)} = \begin{bmatrix} -2.7167 \\ 2.7809 \\ -3.7068 \end{bmatrix}$ $x^{(5)} = \begin{bmatrix} -2.7130 \\ 2.7861 \\ -3.7130 \end{bmatrix}$ $x^{(6)} = \begin{bmatrix} -2.7146 \\ 2.7855 \\ -3.7142 \end{bmatrix}$ $x^{(7)} = \begin{bmatrix} -2.7142 \\ 2.7858 \\ -3.7143 \end{bmatrix}$ $x^{(8)} = \begin{bmatrix} -2.7143 \\ 2.7857 \\ -3.7143 \end{bmatrix}$ $x^{(9)} = \begin{bmatrix} -2.7143 \\ 2.7857 \\ -3.7143 \end{bmatrix}$
149	في رأس الصفحة: $\tilde{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\tilde{x} = \begin{bmatrix} -2.7143 \\ 2.7857 \\ -3.7143 \end{bmatrix}$
152	$x^{(6)} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ \boxed{1.0001} \end{bmatrix}$ $x^{(7)} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ \boxed{1.0001} \end{bmatrix}$	$x^{(6)} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$ $x^{(7)} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$

Scanned by CamScanner

الصفحة	الخطأ	الصواب
154	لا يوجد خطأ إلا أنه ينقص خطوة بعد العلاقة في السطر الأخير أي بعد $\lambda = (1-w) + \frac{w^2}{200} \pm \frac{1}{2}\left[\boxed{4(1-w)\frac{w^2}{100} + \frac{w^4}{10^4}}\right]^{\frac{1}{2}}$	الخطوة تكون بإخراج المقدار $\frac{w^2}{100}$ من تحت الجذر وبالتالي نحصل على العلاقة التالية: $\lambda = (1-w) + \frac{w^2}{200} \pm \frac{1}{2}\frac{w}{10}\left[4(1-w) + \frac{w^2}{100}\right]^{\frac{1}{2}}$
156	في السطر الأخير: $= x_1^2 + 3(x_1+x_3)^2 + \boxed{3x_2^2} + (x_2-x_3)^2 > 0$	$= x_1^2 + 3(x_1+x_3)^2 + 3x_3^2 + (x_2-x_3)^2$
157	من علاقة B_J نجد أن $L+U = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-3} & 0 \\ \boxed{-3} & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$ $B_J - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & \boxed{0.75} & 0 \\ \boxed{-0.75} & -\lambda & \boxed{0.25} \\ 0 & \boxed{0.25} & -\lambda \end{bmatrix}$	$L+U = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B_J - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0.75 & 0 \\ 0.75 & -\lambda & -0.25 \\ 0 & -0.25 & -\lambda \end{bmatrix}$

Scanned by CamScanner