Date: / / Subject:

التحليل (4)

المحاضرة (14)

s: هدى شماط

المحتوى العلمي:
- نظرية القيمة الوسطى.
- نظرية تايلور.
- مبرهنة + تمرين.

... - تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات - ...

- نظرية القيمة الوسطى لمتغير واحد: (مهمة جداً). (غير مطلوبة البرهان)

ليكن $\varphi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ومستمرة في النقاط المحيطة عندئذ

$$\exists \mu \in]a,b[: \varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(\mu)$$

حيث $a < \mu < b$

و بعبارة ثانية:

$$\mu = a + \theta(b-a)$$

حيث $0 < \theta < 1$

لو فرضنا $\theta = 1$

$a + (1)(b-a) = b$

أي أن θ محصورة بين a و b.

Date : / / Subject:

تعميم نظرية القيمة الوسطى: لتكن $f: D \subseteq R^n \longrightarrow R$

ولتكن $C \in D$ ، $C+h \in D$

والقطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة في D

$$[[C, C+h] \subseteq D]$$

والمشتقات الجزئية من المرتبة الأولى موجودة ومستمرة على D

$$\frac{dF}{dx_i} \quad (i = 1 \ldots n)$$

$$f(C+h) - f(C) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{dF}{dx_i} \cdot (C_i + \theta h_i)$$

$: 0 < \theta < 1$

ولربط الرموز القديمة مع الرموز الجديدة.

$$C + h = b \quad , \quad C = a$$

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{dF}{dx_i} \cdot [a_i + \theta (b_i - a_i)]$$

☆ مبرهنة: لتكن $f: D \subseteq R^n \longrightarrow R$ مفتوحة ومترابطة.

ولنعرف $\frac{dF}{dx_i}$ ، $(i = 1 \ldots n)$

موجودة ومستمرة على D ، و

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots\ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

عندئذ يكون F هي دالة ثابتة.

Scanned by CamScanner

الإثبات: بما أن D مترابطة فإذا كانت $a, b \in D$

فيوجد خط مضلع $L_1, L_2, \dots\dots, L_n$ يصل بين a, b

يقع بأكمله في D رؤوس الخط هي $a, c^1, c^2, \dots c^{n-1}, b$

ولنطبق نظرية القيمة الوسطى على النقطتين a, c^1

$$f(c^1) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (c_i^1 - a_i) \frac{dF}{dx_i} [a_i + \theta(c_i^1 - a_i)] = 0$$

حيث $0 < \theta < 1$

$$f(c^1) - f(a) = 0 \Rightarrow f(c^1) = f(a)$$

بنفس الطريقة نطبق نظرية القيمة الوسطى على c^1, c^2:

$$\Rightarrow f(c^1) = f(c^2)$$

وهكذا

$$f(a) = f(c^1) = f(c^2) = \dots\dots = f(b)$$

أي f هي دالة ثابتة.

نظرية تايلور لمتغير واحد: [فهم ليس للحفظ فقط مطلوب بحفظ القانون ١٨]

(غير مطلوب)

$$f: D \subseteq R \longrightarrow R$$

ولتكن $[x_0, x_0+h] \subseteq D$ وأن لـ f مشتقات حتى المرتبة $n+1$

وموجودة في الساحة D إن f مستمرة في النقاط المحيطة

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + R_{n+1}$$

حيث $h = x - x_0$
$x_0 + h = x$

Date : / /   Subject:

الباقي النوني بصيغة لاغرانج $R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$

حيث $0 < \theta < 1$

بصيغة كوشي $R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)(1-\theta')^n$

$0 < \theta' < 1$

نظرية تايلور لمتغيرين: (غير مطلوب): $f : D \subseteq R^2 \longrightarrow R$

ولتكن $(a+h, b+k) \in D$ ، $(a, b) \in D$ والقطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة في D.

والمشتقات الجزئية حتى المرتبة $m+1$ بما فيها $(m+1)$ موجودة ومستمرة في الساحة D والدالة f مستمرة في النقاط المحيطة.

ولنأخذ: $\varphi : [0.1] \longrightarrow R$

$$t \longmapsto \varphi(t) = f(\underbrace{a+th}_{x}, \underbrace{b+tk}_{y})$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dF(a+th, b+tk)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dF(a+h, b+th)}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= h \frac{dF(a+th, b+tk)}{dx} + k \frac{dF(a+th, b+tk)}{dy}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d^2t} = h\left[\frac{d^2F}{d^2x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2F}{dy\,dx} \cdot \frac{dy}{dt}\right] + k\left[\frac{d^2F}{dx\,dy} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2F}{d^2y} \cdot \frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2\varphi}{d^2t} = h^2\frac{d^2F}{d^2x} + 2hk\frac{d^2F}{dy\,dx} + k^2\frac{d^2F}{d^2y}$$

$$= \left(h\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dy}\right)^2 F(a+th,\, b+tk)$$

$P < m+1$

$$\frac{d^p\varphi}{dt^p} = h^p\frac{d^pF}{dx^p} + \frac{p\,h^{p-1}k\,d^pF}{1!\,dx^{p-1}dy} + \frac{p(p-1)}{2!}h^{p-2}\frac{k^2 d^pF}{dx^{p-2}dy^2} + k^p\frac{d^pF}{dy^p}$$

★★

$$\frac{d^p\varphi}{dt} = \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}\right)^p F(a+th,\, b+tk)$$

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n\,x^{n-1}y}{1!} + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}y^2}{2!}$$

$x_0 = 0,\ h = 1$ بالعودة إلى منشور تايلور بمتغير واحد بعد التعويض

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + R_{m+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + R_{m+1}$$

$$R_{m+1} = \frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}$$ حيث: $0<\theta<1$

$$f(a+h,\, b+k) - f(a,b) = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}\right)^n . F(a,b) + R_{m+1}$$

باقي تايلور $R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}\right)^{m+1} . F(a+\theta h,\, b+\theta k)$

$0 < \theta < 1$

Date / / Subject:

حفظ

ملاحظة: إن وجود مشتقات جزئية لـ F من جميع المراتب والـ R_{m+1} كان يسعى نحو الصفر عندما $m \to \infty$ فإننا نجد:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} \right)^n . F(a,b)$$

وهي متسلسلة تايلور (نشر تايلور).

مثال: اكتب الحدود الثلاثة الأولى في منشور الدالة:

$f(x,y) = e^x \cos y$ في جوار $(0,0)$

الحل: $R_{m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ (المشتقات الجزئية من جميع المراتب) موجودة ومستمرة

$$f(h,k) - f(0,0) = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n!} \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} \right)^n . F(0,0)$$

لو أن f(0,0) تساوي الصفر نأخذ الحد 3

$$= \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} \right) F(0,0) + \frac{1}{2!} \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} \right)^2 F(0,0)$$

الحد الأول. $f(0,0) = 1$

$$\frac{dF}{dx}(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \frac{dF}{dx}(0,0) = 1$$

$$\frac{dF}{dy}(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow \frac{dF}{dy}(0,0) = 0$$

الحد الثاني $\left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} \right) . F(0,0) = h\frac{dF(0,0)}{dx} + k\frac{F(0,0)}{dy} = h$

الحد الثالث

$$\frac{1}{2!} \left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} \right)^2 F(0,0) = \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{d^2F}{d^2x}(0,0) + 2hk\frac{d^2F(0,0)}{dx\,dy} + k^2 \frac{d^2F}{d^2y}(0,0) \right)$$

Date : / / Subject:

$$\frac{d^2F}{d^2x} = 1$$

$$\frac{dF}{dx \cdot dy}(x,y) = -e^x \sin y \Longrightarrow \frac{d^2F}{dx\,dy}(0.0) = 0$$

$$\frac{d^2F}{d^2y} = -e^x \cos y \Longrightarrow \frac{d^2F}{d^2y}(0,0) = -1$$

الحد الثالث $= \left(\frac{h^2 - k^2}{2}\right)$

متسلسلة تايلور

$$f(h,k) - 1 = h + \frac{h^2 - k^2}{2}$$

$$e^h \cos k = 1 + h + \frac{h^2 - k^2}{2}$$

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{x^2 - y^2}{2}$$

انتهت المحاضرة ...

تكملة الصالح

&

ناريان حلو

Sabbagh