Date : 2019 / 4 / 8 Subject:

التحليل (4)

المحاضرة الثانية عشر

هدى شماء :s

مبرهنة: لتكن $f: D \subseteq R^n \longrightarrow R$ ولتكن $C \in D^{\circ}$ فإذا كانت كل المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى موجودة في جوار C ومستمرة في C عندئذ تكون الدالة f قابلة للمفاضلة في C.

- إن وجود المشتقات الجزئية الأولى واستمرارها على كامل الساحة D يقتضي قابلية الاشتقاق لهذه الدالة على كامل الساحة D وبالتالي f مستمرة على جميع نقاط الساحة D

نتيجة: خواص الدوال القابلة للاشتقاق: لتكن $f,g: D \subseteq R^n \longrightarrow R$ قابلة للاشتقاق $C \in D^{\circ}$ ، $\alpha, B \in R$

فإن: 1) $\alpha f + B g$ تكون قابلة للاشتقاق في C حيث $\alpha, B \in R$

2) $d_c f(\alpha f + Bg) = \alpha d_c f + B d_c g$

3) f, g قابلة للاشتقاق:

$d_c (f \cdot g) = d_c f \cdot g + f \cdot d_c g$

Date : / / Subject:

تركيب الدوال القابلة للاشتقاق :

إذا كان $u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto u(x, y)$

$(x, y) \longmapsto v(x, y)$

ولتكن F دالة متجهية $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$

حيث الدالة المتجهية هي زوج مرتب من الدوال الحقيقية فتكون الدالة المتجهية F قابلة للاشتقاق في نقطة داخلية C مركباتها u, v قابلة للاشتقاق فيها

$$\underset{\text{قابلة للاشتقاق}}{D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\ F\ }} F(D) = D' \underset{\text{قابلة للاشتقاق}}{\xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}} \quad C$$

عندئذ : $g = f \circ F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق عند C

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(f \circ F)(x, y) = \frac{d}{dx} f(F(x, y))$$

$$= \frac{d}{dx}\left[F(u(x, y), v(x, y))\right]$$

Date : / / Subject:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dF(u,v)}{du} \cdot \frac{du(x,y)}{dx} + \frac{dF(u,v)}{dv} \cdot \frac{dv(x,y)}{dx}$$

$$\frac{dg}{dy} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{dF}{dv} \cdot \frac{dv}{dy}$$

تمرين: لتكن $f : R^2 \longrightarrow R$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

ولنفرض أن $x, y : R \longrightarrow R$

$x(t) = a t^2 \quad , \; y(t) = 2at$

أوجد $\frac{dF}{dt}$ بطريقتين مختلفتين ؟

الحل: الطريقة الأولى: $f(t) = (a t^2)^2 - (2at)^2$

$= a^2 t^4 - 4a^2 t^2$

$$\frac{df(t)}{dt} = 4a^2 t^3 - 8a^2 t$$

الطريقة الثانية: $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$\frac{df}{dt} = (2x)(2at) + (-2y)(2a)$$

$$= (2at^2)(2at) - (4at)(2a)$$

$$= 4a^2t^3 - 8a^2 t$$

Sabbagh

Date : / / Subject:

(هام جداً).

تمرين: لتكن

$$f: R^2 \setminus \{0,0\} \longrightarrow R$$

$$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$y(t) = \sin t \quad , \quad x(t) = \cos t$$

$$(\arctan)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

أوجد $\frac{df}{dt}$ بطريقتين مختلفتين؟

الطريقة الأولى:

$$f(t) = \arctan \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)'}{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = 1$$

الطريقة الثانية:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} (-\sin t) + \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} . \cos t$$

$$= \frac{y \sin t}{x^2+y^2} + \frac{x \cos t}{x^2+y^2} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

تمرين : لتكن :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ x^2+y^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & :(x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

1] أوجد $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$

2] هل f_y, f_x مستمرة عند $(0,0)$

3] هل f قابلة للاشتقاق في $(0,0)$

الحل :

1] $$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0$$

$$2x - y^2\left(\cos(x^2+y^2)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{-2}x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 0 & :(x,y)=(0,0) \\ 2x - y^2\frac{x}{(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}}\cos(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} & :(x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim \frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = 0$$

$$f_y(x,y) = 2y\sin(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + y^2\cos(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{2y}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 0 & :(x,y)=(0,0) \\ 2y\sin(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - y^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cos(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} & :(x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

Date : / / Subject:

$$\lim f_x(x,x) = \lim_{x \to x} \left[2x - x^3 (2x^2)^{-\frac{3}{2}} \cos (2x^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \lim 2x - \frac{x^3}{(2)^{\frac{3}{2}} x^3} \cos \frac{1}{(2x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

النهاية غير موجودة $\Leftarrow$ f_x غير مستمرة

$$f(h,k) - 0 = 0 + 0 + \lambda \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h\, f_x(a,b) + k\, f_y(a,b) + \lambda \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$h^2 + k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lambda \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$\lambda = \frac{h^2 + k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + k^2 \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|(h,k)\| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = 0$$

$$\left| \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} < \delta$$

Sabbagh

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta = \varepsilon , \| (h, k) \| < \delta \Rightarrow | \lambda - 0 | < \varepsilon$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \lambda = 0$$

تمارين وظيفة :

التمرين 1 :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^6 + 2y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

أثبت أنه يوجد للدالة f مشتق في (0,0) في أي اتجاه

$u(\alpha, \beta)$ حيث $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ في النقطة (0,0)

ثم بين أن الدالة f غير مستمرة عند (0,0)

التمرين 2 : أوجد المشتق الاتجاهي للدالة : $f : R^2 \longrightarrow R$

$$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$$

وفق الاتجاه الذي يصنع زاوية قياسها 120 مع محور الفواصل.

انتهت المحاضرة ...

كهينة الصالح

و

نارمان حلو