الموضوع: .... التاريخ: / /

ليكن $A \in ob(\mathcal{L}_1)$، عندئذٍ لما كان $\varphi: F \to G$ مورفيزم دالي فإن $\varphi(A): F(A) \to G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$ وعليه فإن $T(\varphi(A)): T.F(A) \to T.G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$.

ليكن $u: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$، ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$
\begin{tikzcd}
T.F(A) \arrow[r, "T(\varphi(A))"] \arrow[d, "T.F(u)"'] & T.G(A) \arrow[d, "T.G(u)"] \\
T.F(B) \arrow[r, "T.\varphi(B)"'] & T.G(B)
\end{tikzcd}
$$

أي لنبرهن أن: $(T.G(u)).(T.\varphi(A)) = T.\varphi(B).T.F(u)$

$$\underline{T.G(u)}.T.\varphi(A) = T(G(u)).T(\varphi(A)) \overset{\text{لأن } T \text{ دالي}}{=} T(G(u).\varphi(A)) = T(\varphi(B).F(u))$$

ولما كان $\varphi: F \to G$ مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم $u: A \to B$ المخطط الآتي تبديلي:

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\
F(B) \arrow[r, "\varphi(B)"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

كما أنه

$= T(\varphi(B)).T(F(u))$

$= T.\varphi(B).T.F(u)$

ومنه ينتج أن $T.\varphi$ مورفيزم دالي.

م 8. تكافؤ الفئات.

(29) **تمهيدية**: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات، ولنفرض أنه $F_1: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ و $F_2, F_3: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ دوال مباشرة، وليكن $\varphi: F_2 \to F_3$ مورفيزم دالي، عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي $\varphi.F_1: F_2.F_1 \to F_3.F_1$ يعرف بالشكل

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1);\ \varphi.F_1(A) = \varphi(F_1(A))$$

البرهان: (1) ليكن $A \in ob(\mathcal{L}_1)$ عندئذٍ $F_1(A) \in ob(\mathcal{L}_2)$، ولما كان φ مورفيزم دالي فإن $\varphi(F_1(A))$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

$$\varphi(F_1(A)): F_2.F_1(A) \to F_3.F_1(A)$$

(2) لما كان φ مورفيزم دالي، فإنه لأجل أي مورفيزم $u: A \to B$ للفئة $\mathcal{L}_2$ المخطط الآتي تبديلي:

الموضوع : ....   التاريخ :   /   /

$$\begin{array}{ccc} F_2(A) & \xrightarrow{\psi(A)} & F_3(A) \\ {\scriptstyle F_2(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_3(u)} \\ F_2(B) & \xrightarrow{\psi(B)} & F_3(B) \end{array}$$

(*) $F_3(u) \,.\, \psi(A) = \psi(B) \,.\, F_2(u)$

عنق المنطلق u

ليكن $\vartheta : A' \longrightarrow B'$ مورفيزم الفئة ℓ_1 . ولنبرهن على أنّ المخطط الآتي تبديلي :

$$\begin{array}{ccc} F_2.F_1(A) & \xrightarrow{\psi.F_1(A')} & F_3.F_1(A') \\ {\scriptstyle F_2.F_1(\vartheta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_3.F_1(\vartheta)} \\ F_2.F_1(B) & \xrightarrow{\psi.F_1(B')} & F_3.F_1(B') \end{array}$$

$F_3.F_1(\vartheta) \,.\, \psi.F_1(A') = \psi.F_1(B') \,.\, F_2.F_1(\vartheta)$

$- F_3.F_1(\vartheta) \,.\, \psi.F_1(A') = F_3(\underbrace{\overset{u}{F_1(\vartheta)}}_{\ell_2}) \,.\, \psi(\underbrace{\overset{B}{F_1(A')}}_{\ell_2}) = \psi(F_1(B')) \,.\, F_2(F_1(\vartheta))$

$\Leftarrow$ (*) جـ

$= \psi(F_1(B')) \,.\, F_2.F_1(\vartheta)$

*تعريف :

ليكن $F : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ دالي مباشر. نقول إنّ F تكافؤ فئات إذا وجد دالي مباشر آخر $G : \ell_2 \longrightarrow \ell_1$ و ايزومورفيزمات دالية :

$\psi : I_{\ell_1} \longrightarrow G.F$

$\psi : I_{\ell_2} \longrightarrow F.G$

تحققان معاً : $F.\psi = \psi.F$ ونقول في هذه الحالة أنّ الفئتين متماثلتين (متكافئتين) و نرمز لذلك $\ell_1 \simeq \ell_2$.

(21) * مبرهنة :

ليكن $F : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ دالي مباشر. إذا كانت F تكافؤ فئات عندئذٍ :

1- أياً كان لدينا $A,B \in ob(\ell_1)$ فإنّ : $F_{A,B} : \ell_1(A,B) \longrightarrow \ell_2(F(A),F(B))$ تقابل أو قابل للقلب ؛ تطبيق متباين وغامر.

2- لأجل كل $M \in ob(\ell_2)$ يوجد $N \in ob(\ell_1)$ بحيث $F(N) \cong M$ * تطبيق الأشياء غامر بمفهوم التماثل *

البرهان :

1- لما كان F تكافؤ فئات ، يوجد دالي مباشر $G : \ell_2 \longrightarrow \ell_1$ و ايزومورفيزمات دالية.

$\psi : I_{\ell_1} \longrightarrow G.F$

$\psi : I_{\ell_2} \longrightarrow F.G$

حيث $F.\psi = \psi.F$

الموضوع : .... التاريخ : / /

لنبرهن على أنّ التطبيق $F_{A,B}$ متباين

ليكن $u, v \in \mathcal{C}_1(A,B)$ بحيث $F(u) = F(v)$ عندئذٍ $G.F(u) = G.F(v)$

و لما كان φ ايزومورفيزم دالي فإنّه لأجل المورفيزم u المخطط الآتي تبديلي :

$\varphi : I_{\mathcal{C}_1} \to G.F$

$A \xrightarrow{u} B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "u"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(u)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(B)"] & G.F(B) \end{tikzcd}$$

$$G.F(u).\varphi(A) = \varphi(B).u$$

$$\varphi(B)^{-1}.G.F(u).\varphi(A) = u$$

أيضاً لما كان φ ايزومورفيزم دالي فإنّه لأجل المورفيزم v المخطط الآتي تبديلي :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "v"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(v)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(B)"] & G.F(B) \end{tikzcd}$$

$$G.F(v).\varphi(A) = \varphi(B).v$$

$$\varphi(B)^{-1}.G.F(v).\varphi(A) = v$$

و منه $u = v$ ، أي أنّ F متباين .

ليكن $w : F(A) \longrightarrow F(B)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "\varphi(A)"'] & B \arrow[d, shift left, "\varphi(B)"] \\ G.F(A) \arrow[r, "G(w)"'] & G.F(B) \arrow[u, shift left, "\varphi(B)^{-1}"] \end{tikzcd}$$

لنفرض أنّ $w^* = \varphi(B)^{-1}.G(w).\varphi(A) \in \mathcal{C}_1(A,B)$

و لنبرهن أنّ $F(w^*) = w$

$$F(w^*) = F(\varphi(B)^{-1}.G(w).\varphi(A)) = F(\varphi(B)^{-1}).F(G(w)).F(\varphi(A))$$

$$= F(\varphi(B)^{-1}).F.G(w).\varphi.F(A)$$

لما أنّ φ ايزومورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم w المخطط الآتي تبديلي :

التاريخ : / /

الموضوع :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi(F(A))"] \arrow[d, "w"'] & F.G(F(A)) \arrow[d, "F.G(w)"] \\ F(B) \arrow[r, "\varphi(F(B))"] & F.G(F(B)) \end{tikzcd}$$

$$F.G(w).\varphi(F(A)) = \varphi(F(B)).w$$

$$F(w^*) = F(\varphi(B)^{-1}).\varphi(F(B)).w = F(\varphi(B)^{-1}).F(\varphi(B)).w$$

$$= F(\varphi(B)^{-1}.\varphi(B)).w = F(I_B).w$$

منطلق $\varphi(B)$

$B \longrightarrow G.F(B)$

$$= I_{F(B)}.w = w.$$

$\varphi(B)^{-1}.\varphi(B) = I_B$ و $\varphi(B).\varphi(B)^{-1} = I_{G.F(B)}$

عامر

ع ليكن $M \in ob(\ell_2)$ ولما كان φ ايزومورفيزم دالي فإن

$\varphi(M) : M \longrightarrow F.G(M)$ ايزومورفيزم للفئة ℓ_2

لنفرض أن $N = G(M)$ عندئذٍ $\varphi(M) : M \longrightarrow F(N)$ ايزومورفيزم وجينة:

$$F(N) \cong M$$

م.و

٣.٣ فئة المجموعات:

لنفرض أن $\ell = Sets$ فئة المجموعات ولأجل كل $A \in ob(\ell)$ يوجد دالي مباشر:

$$F : \ell \longrightarrow \ell$$

$$\forall B \in ob(\ell) \; ; \; F(B) = A \times B$$

واضح أن F هو تطبيق أشياء.

ليكن $u : B \longrightarrow D$ مورفيزم للفئة ℓ

العلاقة الآتية $\bar{u} : A \times B \longrightarrow A \times D$ هو مورفيزم للفئة ℓ.

$$\forall (a,b) \in A \times B \; , \; \bar{u}(a,b) = (a, u(b))$$

$$\forall (a_1, b_1), (a,b) \in A \times B \; ; \; (a_1, b_1) = (a,b)$$

فإن $a_1 = a$ و $b_1 = b$ ⇐ $u(b_1) = u(b)$ ⇐ $(a_1, u(b_1)) = (a, u(b))$

$\Rightarrow \bar{u}(a_1, b_1) = \bar{u}(a,b)$ تطبيق.

لأجل كل مورفيزم $u : B \longrightarrow D$ للفئة ℓ لنضع $F(u) = \bar{u}$

$$F(u) : F(B) \longrightarrow F(D)$$

$$: A \times B \longrightarrow A \times D.$$

ليكن u, v مورفيزمين في الفئة $\mathcal{L}$ بحيث $u = v$

$u, v : B \longrightarrow D \quad \forall b \in B ; u(b) = v(b)$

$\bar{u}, \bar{v} : A \times B \longrightarrow A \times D \quad \forall (a,b) \in A \times B ; \bar{u}(a,b) = (a, u(b)) = (a, v(b)) = \bar{v}(a,b)$

وبالتالي $\Rightarrow \bar{u} = \bar{v} \Rightarrow F(u) = F(v)$

الشرط 1 - ليكن $B \in ob(\mathcal{L})$ فإن $F(I_B) = I_{F(B)}$

$$I_B : B \longrightarrow B$$

$$\bar{I}_B : A \times B \longrightarrow A \times B$$

$$\bar{I}_B(a,b) = (a, I_B(b)) = (a, b)$$

$$\bar{I}_B = I_{A \times B} = I_{F(B)}$$

$$F(B) = \bar{I}_B = I_{F(B)}$$

الشرط 2 - ليكن $v : B \longrightarrow D \xrightarrow{w} K$

$$w.v : B \longrightarrow K$$

$$F(w.v) : F(B) \longrightarrow F(K)$$

$$A \times B \longrightarrow A \times K$$

$$F(w.v) = \overline{w.v}$$

$$\forall (a,b) \in A \times B : \overline{w.v}(a,b) = (a, w.v(b)) = (a, w(v(b)))$$

$$= \bar{w}(a, v(b)) = \bar{w}(\bar{v}(a,b)) = \bar{w}.\bar{v}(a,b)$$

$$\overline{w.v} = \bar{w}.\bar{v} = F(w) \circ F(v)$$

F دالي مباشر

3) وظيفة: لنفرض أنه $\mathcal{L} = Sets$ فئة مجموعات لأجل كل $A \in ob(\mathcal{L})$ يوجد دالي مباشر

$$G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

G تطبيق أشياء $\forall B \in ob(\mathcal{L}) ; G(B) = B \times A$

* لنفرض أنه $\mathcal{L} = Sets$ فئة المجموعات: لأجل كل $B \in ob(\mathcal{L})$ يوجد دالي مباشر

$$F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}) ; F(A) = Hom_{\mathcal{L}}(B, A) = \mathcal{L}(B, A)$$

واضح أنه F تطبيق أشياء

التاريخ: / /

الموضوع: ....

ليكن $u: A \to D$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$.

$$F(u) : F(A) \longrightarrow F(D)$$

$$: \mathcal{L}(B,A) \longrightarrow \mathcal{L}(B,D)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & D \\ B \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "u.\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall \lambda \in \mathcal{L}(B,A)$ ؛ $F(u)(\lambda) = u.\lambda$

أيضاً إن F تطبيق مورفيزمات

$\forall A \in ob(\mathcal{L})$ ؛ $F(I_A) : F(A) \longrightarrow F(A)$

$$: \mathcal{L}(B,A) \longrightarrow \mathcal{L}(B,A)$$

$\forall \lambda \in \mathcal{L}(B,A)$ ؛ $F(I_A)(\lambda) = I_A.\lambda = \lambda = I_{\mathcal{L}(B,A)}(\lambda)$

$$F(I_A) = I_{\mathcal{L}(B,A)} = I_{F(A)}$$

ليكن $w: D \to K$ و $\vartheta : A \to D$ مورفيزمين من الفئة $\mathcal{L}$ (تطبيقات)

$$w.\vartheta : A \longrightarrow K$$

$$F(w.\vartheta) : F(A) \longrightarrow F(K)$$

$$: \mathcal{L}(B,A) \longrightarrow \mathcal{L}(B,K)$$

$\forall \lambda \in \mathcal{L}(B,A) : F(w.\vartheta)(\lambda) = (w.\vartheta).\lambda = w.(\vartheta.\lambda) = F(w)(\vartheta.\lambda)$

$$= F(w)(F(\vartheta)(\lambda)) = F(w).F(\vartheta)(\lambda)$$

F دالي مباشر

علاقات التكافؤ :

تعريف: لتكن M مجموعة غير خالية، نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $M \times M$ علاقة على M وهذه العلاقة تكون علاقة تكافؤ إذا حققت:

$\forall a \in M , (a,a) \in \rho \Leftrightarrow a \rho a$

$\forall a,b \in M , (a,b) \in \rho \Leftrightarrow (b,a) \in \rho$

$\forall a,b,c \in M , (a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$

الفئة $\bar{\mathcal{L}}$:

نعرف $\bar{\mathcal{L}}$ من خلال: - صف الأشياء المؤلف من (M,ρ) ونرمز لها $\bar{M}$

حيث M مجموعة و ρ علاقة تكافؤ على M.

- صف المورفيزمات المؤلف من جميع التطبيقات

$$u : M \longrightarrow N$$

حيث $M,N \in ob(\bar{\mathcal{L}})$ خاصة u تحافظ على علاقة تكافؤ

$$\boxed{\begin{array}{l} u : (M,\rho) \longrightarrow (N,T) \\ \forall a,b \in M , a \rho b \Rightarrow u(a) T u(b) \end{array}}$$

- إن $\mathcal{F}$ تشكل فئة. ~~...~~ ← وظيفة

مبرهنة (27): لنفرض أن $\mathcal{F}$ الفئة المعرفة سابقاً عندئذٍ:

1- يوجد دالي مباشر $E: \mathcal{F} \to Sets$

$E(M,\rho) = M$ ← وظيفة

2- يوجد دالي مباشر $Q: \mathcal{F} \to Sets$

$Q(M,\rho) = \frac{M}{\rho}$

البرهان: واضح أنه تطبيق Q

ليكن $u:(M,\rho) \to (N,S)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{F}$

$Q(u): Q(M,\rho) \to Q(N,S)$

$: M/\rho \longrightarrow N/S$

$\forall \bar{a}_\rho \in \frac{M}{\rho}, \ \bar{u}: \frac{M}{\rho} \longrightarrow \frac{N}{S}$

$\bar{u}(\bar{a}_\rho) = \overline{u(a)}_S$

$Q(u) = \bar{u}$ $\quad \bar{a}_\rho, \bar{b}_\rho \ ; \ \bar{a}_\rho = \bar{b}_\rho \Rightarrow a \rho b \Rightarrow u(a) S u(b)$

$\Rightarrow \overline{u(a)}_S = \overline{u(b)}_S$

وحيدية التطبيق

$Q(u) = \bar{u}$ $\quad \Rightarrow u_1 = u_2 : (M,\rho) \longrightarrow (N,S)$

$\bar{u}_1, \bar{u}_2 : \frac{M}{\rho} \longrightarrow \frac{N}{S}$

$\bar{u}_1(\bar{a}) = \overline{u_1(a)} = \overline{u_2(a)} = \bar{u}_2(\bar{a})$

لأجل كل $\bar{a} \in M/\rho$ وحيدة $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$

$Q(I_{(M,\rho)}) = I_{M/\rho}$ إذ أن $I_{M/\rho} : \frac{M}{\rho} \longrightarrow M/\rho$

$\forall \bar{a} \in \frac{M}{\rho} : I_{M/\rho}(\bar{a}) = \overline{I_{M/\rho}(a)} = \bar{a} = I_{(M,\rho)}$

ليكن

$u:(M,\rho) \longrightarrow (N,S) \xrightarrow{w} (K,T)$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{F}$

$w.u : (M,\rho) \longrightarrow (K,T)$

$Q(w.u) : Q(M,\rho) \longrightarrow Q(K,T)$

$: \frac{M}{\rho} \longrightarrow \frac{K}{T}$

الموضوع:

التاريخ: / /

$$\varphi(w \cdot u) = \overline{w \cdot u}$$

$\forall \bar{a} \in \frac{M}{\rho}$; $\overline{w \cdot u}(\bar{a}_\rho) = \overline{w \cdot u(a)}_T = \overline{w(u(a))} = \bar{w}(\overline{u(a)})$

$\bar{w} : \frac{N}{S} \longrightarrow \frac{K}{T}$

$u(a) \in N$; $\underset{\bar{w}}{\overline{u(a)}} = \overline{w(u(a))}$

$= \bar{w}(\bar{u}(\bar{a})) = \bar{w} \cdot \bar{u}(\bar{a})$

$\overline{w \cdot u} = \bar{w} \cdot \bar{u} = \varphi(w) \cdot \varphi(u)$

φ دالة مباشر