

ليكن  $A \in \text{ob}(C_1)$  ، عندئذٍ  $\varphi: F \rightarrow G$  مورفزم دالي فائتة

$$\varphi(A): F(A) \rightarrow G(A)$$

$$T(\varphi(A)): T.F(A) \rightarrow T.G(A)$$

ليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفزم الفئة  $C_1$  ، ولنفرض أنه المخطط الآتي تبليغ

$$T.F(A) \xrightarrow{T(\varphi(A))} T.G(A)$$

$$\downarrow T.F(u)$$

$$\downarrow T.G(u)$$

$$T.F(B) \xrightarrow{T(\varphi(B))} T.G(B)$$

$$(T.G(u)) \cdot (T(\varphi(A))) = T(\varphi(B)) \cdot T.F(u)$$

$$T.G(u) \cdot T(\varphi(A)) = T(G(u)) \cdot T(\varphi(A)) \stackrel{\text{عندئذٍ تبليغ}}{=} T(G(u) \cdot \varphi(A)) = T(\varphi(B) \cdot F(u))$$

ولذلك  $\varphi: F \rightarrow G$  مورفزم دالي فائتة لأجل المورفزم  $u: A \rightarrow B$  المخطط الآتي تبليغ

$$F(A) \xrightarrow{\varphi(A)} G(A)$$

$$\downarrow F(u)$$

$$\downarrow G(u)$$

$$F(B) \xrightarrow{\varphi(B)} G(B)$$

$$= T(\varphi(B)) \cdot T(F(u))$$

$$= T(\varphi(B)) \cdot T.F(u)$$

وهذا يثبت أنه  $T(\varphi)$  مورفزم دالي

8. م تكافؤ الفئات

تعميرية: ليكن  $C_1, C_2, C_3$  فئات ، ولنفرض أنه  $F_1: C_1 \rightarrow C_2$  و  $F_2: C_2 \rightarrow C_3$  مورفزم دالي فائتة

$$F_2 \circ F_1: C_1 \rightarrow C_3$$

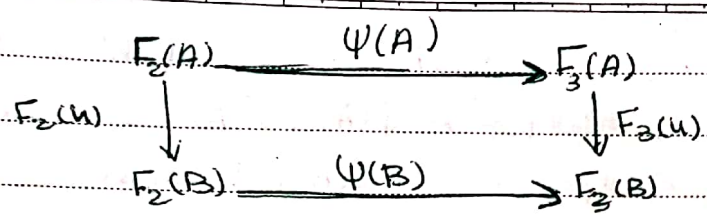
دالي ، عندئذٍ يوجد مورفزم دالي  $\varphi: F_2 \circ F_1 \rightarrow F_3 \circ F_1$  يعرف بالشكل  $\forall A \in \text{ob}(C_1)$

$$\varphi(F_2 \circ F_1(A)) = \varphi(F_2(F_1(A)))$$

البيان: ليكن  $A \in \text{ob}(C_1)$  عندئذٍ  $F_1(A) \in \text{ob}(C_2)$  ، ولذا كان  $\varphi$  مورفزم دالي فائتة  $\varphi(F_1(A))$  مورفزم الفئة  $C_3$

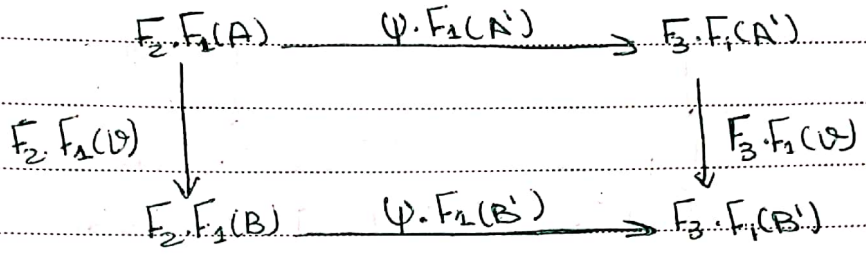
$$\varphi(F_1(A)): F_2 \circ F_1(A) \rightarrow F_3 \circ F_1(A)$$

ولذلك  $\varphi$  مورفزم دالي ، فإنه لأجل أي مورفزم  $u: A \rightarrow B$  للفئة  $C_1$  المخطط الآتي تبليغ:



$F_3(u) \cdot \psi(A) = \psi(B) \cdot F_2(u)$  (نقطة التعلق)

لكن  $\psi: A' \rightarrow B'$  مورفيزم الفئة  $\mathcal{A}$  ولزمنه على أنها  $\mathcal{A}$  التي تبديل



$F_3 \cdot F_1(u) \cdot \psi \cdot F_1(A') = \psi \cdot F_1(B') \cdot F_2 \cdot F_1(u)$

$F_3 \cdot F_1(u) \cdot \psi \cdot F_1(A') = F_3(F_1(u)) \cdot \psi(F_1(A')) = \psi(F_1(B')) \cdot F_2(F_1(u)) = \psi(F_1(B')) \cdot F_2 \cdot F_1(u)$

\* تعريف

ليكن  $f_1: A \rightarrow B$  دالة مباشرة. نقول إن  $f_1$  كانت ذات إذا وجد دالة مباشرة آخر

$\varphi: I_{A_1} \rightarrow G_1 \cdot f_1$   
 $\varphi: I_{A_2} \rightarrow f_1 \cdot G_2$

تتقارن معاً  $f_1 \cdot \varphi = \varphi \cdot f_1$  ونقول في هذه الحالة إن  $f_1$  العنينة وفقاً لتعريف فرمز لولاد

$f_1 \cong f_2$

\* مبرهنة (2)

ليكن  $f_1: A \rightarrow B$  دالة مباشرة إذا كانت  $f_1$  كانت ذات عند  $f_1$

أ. أي أن  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{A})$  فإن  $f_1(A), f_1(B) \in \text{ob}(\mathcal{A})$   $f_1(A) \cong f_1(B)$   $f_1(A, B) \xrightarrow{f_1} f_1(A), f_1(B)$   $f_1(A, B)$  متباين وغير

لا نجد كل  $(M, N) \in \text{ob}(\mathcal{A})$   $f_1(M) \cong f_1(N)$   $f_1(M, N) \xrightarrow{f_1} f_1(M), f_1(N)$   $f_1(M, N)$  متباين غير

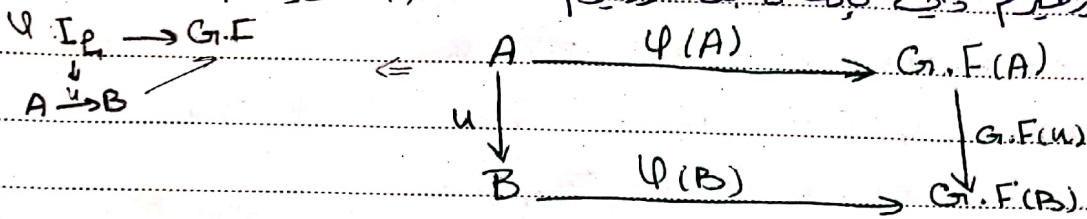
ب. إذا كانت  $f_1$  ذات فإن  $f_1$  يوجد دالة مباشرة  $G: A \rightarrow B$   $G: A \rightarrow B$   $G: A \rightarrow B$  دالة

$\varphi: I_A \rightarrow G \cdot f_1$   
 $\varphi: I_B \rightarrow f_1 \cdot G$

$f_1 \cdot \varphi = \varphi \cdot f_1$  كخط

لنبرهن على أنه التماثل  $F_{A,B}$  حثاين

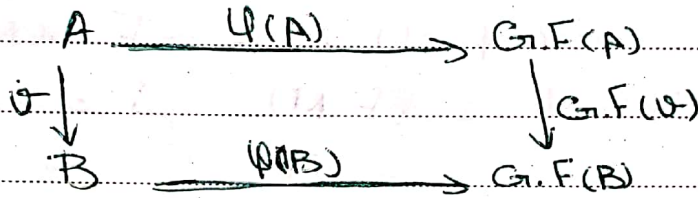
ليكن  $u, v \in \mathcal{L}_1(A, B)$  حيث  $F(u) = F(v)$  عنيتي  $G.F(u) = G.F(v)$  ولما كان  $\varphi$  الزومورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم  $u$  المخطط الآتي تبليغ:



$$G.F(u) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot u$$

$$\varphi(B)^{-1} \cdot G.F(u) \cdot \varphi(A) = u$$

أيضا لكان  $\varphi$  الزومورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم  $v$  المخطط الآتي تبليغ:

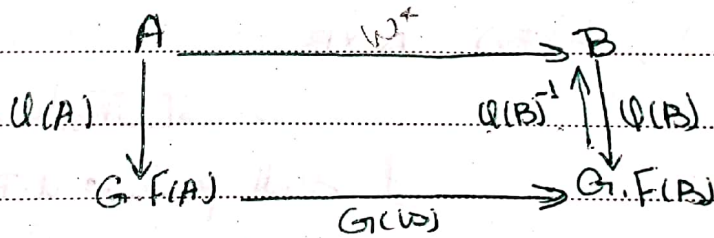


$$G.F(v) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot v$$

$$\varphi(B)^{-1} \cdot G.F(v) \cdot \varphi(A) = v$$

وعنه  $u = v$  أي أنه  $F$  حثاين

ليكن  $w: F(A) \rightarrow F(B)$  مورفيزم الفجوة  $\mathcal{L}_2$



$$w^* = \varphi(B)^{-1} \cdot G(w) \cdot \varphi(A) \in \mathcal{L}_2(A, B)$$

لنقرض أنه

$$F(w^*) = w$$

ولنبرهن على أنه

$$F(w^*) = F(\varphi(B)^{-1} \cdot G(w) \cdot \varphi(A)) = F(\varphi(B)^{-1}) \cdot F(G(w)) \cdot F(\varphi(A))$$

$$= F(\varphi(B)^{-1}) \cdot F \cdot G(w) \cdot \varphi \cdot F(A)$$

لما كان  $\varphi$  الزومورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم  $w$  المخطط الآتي تبليغ:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\psi(F(A))} & F \cdot G(F(A)) \\
 \downarrow w & & \downarrow F \cdot G(w) \\
 F(B) & \xrightarrow{\psi(F(B))} & F \cdot G(F(B))
 \end{array}$$

$$F \cdot G(w) \cdot \psi(F(A)) = \psi(F(B)) \cdot w$$

$$F \cdot (w^*) = F(\psi(B)^{-1}) \cdot \psi(F(B)) \cdot w = F(\psi(B)^{-1}) \cdot F(\psi(B)) \cdot w$$

$$= F(\psi(B)^{-1} \cdot \psi(B)) \cdot w = F(I_B) \cdot w = w$$

$\begin{matrix} \text{صطلحت} \\ \psi(B) \\ B \rightarrow G \cdot F(B) \end{matrix}$

$$\psi(B)^{-1} \cdot \psi(B) = I_B \Rightarrow \psi(B) \cdot \psi(B)^{-1} = I_{G \cdot F(B)}$$

ليكن  $M \in \text{ob}(A)$  ولما كان  $\psi$  ايزومورفيزم دالي فإنه

$$\psi(M) : M \rightarrow F \cdot G(M)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{لنفرض أنه } N = G(M) & \text{عندها} & \psi(M) : M \rightarrow F(N) \\
 & & F(N) \cong M
 \end{array}$$

د.ف  
فئة المجموعات  
د.ف

لنفرض أنه  $S = \text{Set}$  فئة المجموعات ولما كان  $A \in \text{ob}(A)$  دالي مباشر

$$F : A \rightarrow A$$

$$\forall B \in \text{ob}(A); F(B) = A \times B$$

واضح أنه  $F$  هو تطبيق اشتاء

ليكن  $u : B \rightarrow D$  مورفيزم لفئة  $A$

$$\text{العلاقة الترتيبية } \pi : A \times B \rightarrow A \times D$$

$$\forall (a, b) \in A \times B; \pi(a, b) = (a, u(b))$$

$$\forall (a_1, b_1), (a, b) \in A \times B; (a_1, b_1) = (a, b)$$

$$(a_1, u(b_1)) = (a, u(b)) \iff u(b_1) = u(b) \iff b_1 = b \text{ و } a_1 = a$$

$$\Rightarrow \pi(a_1, b_1) = \pi(a, b)$$

لأجل ذلك مورفيزم  $u : B \rightarrow D$  لفئة  $A$  ينفع

$$F(u) : F(B) \rightarrow F(D)$$

$$A \times B \rightarrow A \times D$$

ليكن  $u, v$  مورفزمين الفئحة  $f$  حيث  $u = v$

$$u, v : B \rightarrow D \quad \forall b \in B, u(b) = v(b)$$

$$\bar{u}, \bar{v} : A \times B \rightarrow A \times D \quad \forall (a, b) \in A \times B, \bar{u}(a, b) = (a, u(b)) = (a, v(b)) = \bar{v}(a, b)$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{v} \Rightarrow F(u) = F(v) \text{ وبالتالي}$$

$$F(I_B) = I_{F(B)} \text{ حيث } B \in \text{ob}(f) \text{ ليكن [الشروط]}$$

$$I_B : B \rightarrow B$$

$$\bar{I}_B : A \times B \rightarrow A \times B$$

$$\bar{I}_B(a, b) = (a, I_B(b)) = (a, b)$$

$$\bar{I}_B = I_{A \times B} = I_{F(B)}$$

$$F(B) = \bar{I}_B = I_{F(B)}$$

$$v : B \rightarrow D \xrightarrow{w} K \text{ ليكن [الشروط]}$$

$$w, v : B \rightarrow K$$

$$F(w, v) : F(B) \rightarrow F(K)$$

$$A \times B \rightarrow A \times K$$

$$F(w, v) = \overline{w, v}$$

$$\forall (a, b) \in A \times B : \overline{w, v}(a, b) = (a, w, v(b)) = (a, w(v(b))) \\ = \overline{w}(a, v(b)) = \overline{w}(\bar{v}(a, b)) = \overline{w} \cdot \bar{v}(a, b)$$

$$\overline{w, v} = \overline{w} \cdot \bar{v} = F(w) \circ F(v)$$

$F$  دالة مباشرة

وظيفة: لنفرض أنه  $S = \text{Set}$  فئة مجموعات الأعداد  $S$   $A \in \text{ob}(f)$  يوم دالة مباشرة

$$G : S \rightarrow S$$

$$\forall B \in \text{ob}(f), G(B) = B \times A$$

$G$  تطبيق التناوب

\* لنفرض أنه  $S = \text{Set}$  فئة المجموعات الأعداد  $S$   $B \in \text{ob}(f)$  يوم دالة مباشرة

$$F : S \rightarrow S$$

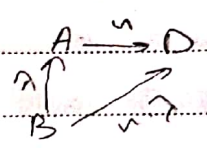
$$\forall A \in \text{ob}(f), F(A) = \text{Hom}_f(B, A) = \underline{f}(B, A)$$

واضح أنه  $F$  تطبيق التناوب

ليكن  $u: A \rightarrow D$  مورفيزم الفئة  $\mathcal{F}$ .

$$F(u) : F(A) \rightarrow F(D)$$

$$\mathcal{F}(B, A) \rightarrow \mathcal{F}(B, D)$$



$\forall \lambda \in \mathcal{F}(B, A) ; F(u)(\lambda) = u \cdot \lambda$

أيضاً إذا  $F$  تطبيق مورفيزمات

$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{B}) ; F(I_A) : F(A) \rightarrow F(A)$

$\mathcal{F}(B, A) \rightarrow \mathcal{F}(B, A)$

$\forall \lambda \in \mathcal{F}(B, A) ; F(I_A)(\lambda) = I_A \cdot \lambda = \lambda = I_{\mathcal{F}(B, A)}(\lambda)$

$F(I_A) = I_{\mathcal{F}(B, A)} = I_{F(A)}$

ليكن  $v: A \rightarrow D ; w: D \rightarrow K$  مورفيزم الفئة  $\mathcal{F}$  (نظراً لـ  $v$ )

$w \cdot v : A \rightarrow K$

$F(w \cdot v) : F(A) \rightarrow F(K)$

$\mathcal{F}(B, A) \rightarrow \mathcal{F}(B, K)$

$\forall \lambda \in \mathcal{F}(B, A) : F(w \cdot v)(\lambda) = (w \cdot v) \cdot \lambda = w(v \cdot \lambda) = F(w)(v \cdot \lambda) = F(w)(F(v)(\lambda)) = F(w) \cdot F(v)(\lambda)$

$F$  ولي حاش

علاقات التكافؤ:

تعريف: ليكن  $M$  مجموعة غير خالية، نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي  $M \times M$  علاقة على  $M$  ومنه العلاقة تكون علاقة تكافؤ إذا حققت:

$\forall a \in M, (a, a) \in \mathcal{R} \iff a \mathcal{R} a$

$\forall a, b \in M, (a, b) \in \mathcal{R} \iff (b, a) \in \mathcal{R}$

$\forall a, b, c \in M, (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \implies (a, c) \in \mathcal{R}$

الفئة  $\mathcal{F}$ :

ليكن  $\mathcal{F}$  مورفيزمات: - صف الأسماء المورفيزم  $(M, \mathcal{F})$  و  $\bar{M}$  حيث  $M$  مجموعة و  $\mathcal{F}$  علاقة تكافؤ على  $M$ .

صف المورفيزمات المورفيزم في جميع الطبقات

$u: M \rightarrow N$

حيث  $M, N \in \text{ob}(\mathcal{F})$  خاتمة  $u$  علاقة تكافؤ

$u: (M, \mathcal{F}) \rightarrow (N, T)$

$\forall a, b \in M, a \mathcal{F} b \implies u(a) T u(b)$



الموضوع:

التاريخ: / /

$$\Phi(\omega, u) = \overline{\omega \cdot u}$$

$$\forall \alpha \in \mathcal{M}, \overline{\omega \cdot u(\alpha)} = \overline{\omega \cdot u(\alpha)} = \overline{\omega(u(\alpha))} = \overline{\omega(u(\alpha))}$$

$$\text{ب: } \overline{\omega} \rightarrow \overline{\omega}$$

$$= \overline{\omega(u(\alpha))} = \overline{\omega} \cdot \overline{u(\alpha)}$$

$$u(\alpha) \in \mathcal{N}, \overline{u(\alpha)} = \overline{u(\alpha)}$$

$$\overline{\omega \cdot u} = \overline{\omega} \cdot \overline{u} = \Phi(\overline{\omega}) \cdot \Phi(u)$$

دالة هاشم  $\Phi$