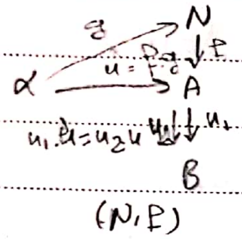
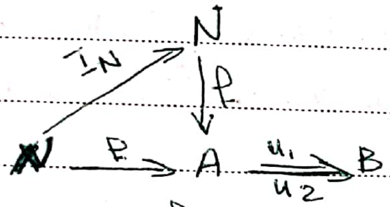


النواة ① لأجل كل $x \in ob(\ell)$ ولأجل كل مورفيزم $u: X \to A$
يحقق $u_1 . u = u_2 . u$ يوجد مورفيزم وحيد
② شرط
$g: X \to N$
$f.g = u$
ـ لأجل كل مورفيزم $X \xrightarrow{u} A$ يوجد $g: X \to N$ تحقق
$f.g = u$
$u_1 . u = u_2 . u$

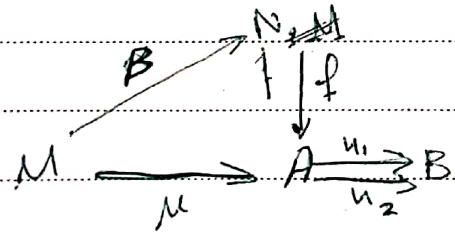


* ينتج من التعريف مباشرة أن
$u_1 . f = u_2 . f$
① تمهيدية: لتكن ℓ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$
$u_1 . f = u_2 . f$
مورفيزمين للفئة ℓ الشروط الآتية متكافئة.
1ـ (N, f) نواة للمورفيزم u_1, u_2
2ـ $u_1 . f = u_2 . f$ ولأجل كل مورفيزم $u: X \to A$ تحقق $u_1 . u = u_2 . u$ يوجد مورفيزم
وحيد $\lambda : X \to N$ بحيث $f . \lambda = u$

البرهان: ① ⟸ ② واضح
② ⟸ ① ليكن $u: X \to A$ مورفيزم للفئة ℓ، وليكن $g: X \to N$ بحيث $f.g = u$
حسب الفرض فإن $u_1 . u = u_1(f.g)$
$= (u_1 . f).g = (u_2 . f).g = u_2(f.g)$
$= u_2 . u$
وبالتالي الثنائية (N, f) نواة

② مبرهنة: لتكن ℓ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمين للفئة ℓ، إذا كانت كل من (N, f)
و (M, μ) نواة للمورفيزمين u_1, u_2، عندئذٍ يوجد ~~ايزومورفيزم~~ $\alpha : N \to M$

البرهان:



بالنظر إلى أن الثنائية (N, f) نواة u_1, u_2
فإنه لأجل المورفيزم $\mu : M \to A$ و الذي تحقق
$u_1 . \mu = u_2 . \mu$ (نواة M)
يوجد مورفيزم وحيد $\beta : M \to N$ بحيث $f . \beta = \mu$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\mu"] & \\ N \arrow[ur, "\alpha", "\beta.\alpha"'] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

ايضاً لما كانت الثنائية (M, μ) نواة u_2 و u_1 وانه
المورفيزم $f : N \to A$ تحقق $u_1 . f = u_2 . f$ يوجد
$\alpha : N \to M$ ظيب $\mu . \alpha = f$ و منه

$$f = \mu . \alpha = (f . \beta) . \alpha = f . (\beta . \alpha) = f . I_N$$

$$\Rightarrow \beta . \alpha = I_N$$

ايضاً لدينا $\mu = f . \beta = (\mu . \alpha) . \beta = \mu . (\alpha . \beta) = \mu . I_M$

و منه نجد أن $\alpha . \beta = I_M$ و بالتالي
α ايزومورفيزم

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\mu"] & \\ M \arrow[ur, "I_M"] \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

(3) مبرهنة : لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$
عندئذٍ يوجد دالي غير مباشر $F : \mathcal{L} \to Set's$ يُعطى بالشكل

$$\forall x \in ob(\mathcal{L}) ; \ F(x) = \{ f : f \in \mathcal{L}(x, A) ; \ u_1 . f = u_2 . f \}$$

البرهان : ليكن $x, y \in ob(\mathcal{L})$ بحيث $x = y$ عندئذٍ $\mathcal{L}(x, A) = \mathcal{L}(y, A)$ و بالتالي

$$\forall f \in \mathcal{L}(X, A) \wedge u_1 . f = u_2 . f \Rightarrow f \in \mathcal{L}(y, A) \wedge u_1 . f = u_2 . f$$

$$\Rightarrow F(x) = F(y)$$

أي أن F تطبيق أشياء.

لنعرف تطبيق المورفيزمات بالشكل : ليكن $u : X \to Y$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$.

$$F(u) : F(Y) \to F(X) \ ; \ \forall g \in F(Y) \text{ فإن } u_1 . g = u_2 . g$$

$u_1 . f = u_2 . f$ ... $= \mathcal{L}(X, A)$ الانتباه ... $F(x)$ ... $F(u)(g) = g . u \in F(x)$

$$X \xrightarrow{g} A \overset{u_1}{\underset{u_2}{\rightrightarrows}} B$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g.u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

وأن $u_1 (g . u) = (u_1 . g) u$
$= (u_2 . g) . u = u_2 . (g . u)$

لأجل $\forall x \in ob(\mathcal{L})$ ،

$$F(I_X) : F(X) \to F(X)$$

$$\forall g \in F(x) : F(I_X)(g) = g . I_X = g$$

$$F(I_X) = I_{F(X)}$$

الموضوع: .... التاريخ: / /

لتكن $u: X \to Y$ و $v: Y \to Z$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$

$v.u : X \to Z$

$F(v.u): F(Z) \to F(X)$

$\forall \lambda \in F(Z)$ ؛ $F(v.u)(\lambda) = \lambda.(v.u) = (\lambda.v).u = F(v)(\lambda).u$

$F(v): F(Z) \to F(Y)$ ، $F(v)(\lambda) = \lambda.v : Y \to A$

$F(u): F(Y) \to F(X)$ ، $F(u)(F(v)(\lambda)) = F(v)(\lambda).u$

$= F(u)(F(v)(\lambda)) = F(u).F(v)(\lambda)$

~~$F(v.u) = F(v)$~~ $F(v.u) = F(u).F(v)$

(٦) مبرهنة:

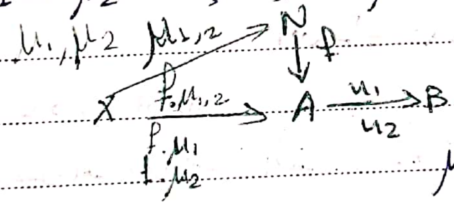
لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u_1,u_2: A \to B$ مورفيزمين من الفئة $\mathcal{L}$ إذا كانت (N,f) نواة لـ u_1,u_2 فإن f مونومورفيزم.

البرهان: لنبين أن $f: N \to A$ أياً كان $x \in ob(\mathcal{L})$ لنبرهن على أن التطبيق

$\alpha: \mathcal{L}(X,N) \to \mathcal{L}(X,A)$

$\alpha(\mu) = f.\mu$ متباين

لتكن $\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{L}(X,N)$ بحيث $\alpha(\mu_1) = \alpha(\mu_2)$ عندئذٍ $f.\mu_1 = f.\mu_2$

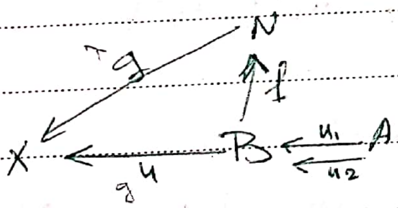


إذ أن $u_1.(f.\mu_1) = (u_1.f).\mu_2$

$= (u_2.f).\mu_2 = u_2.(f.\mu_2)$

ولما كانت الثنائية (N,f) نواة ينتج أن $\mu_1 = \mu_2$

ومنه α متباين



النواة المرافقة:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة $u_1,u_2: A \to B$ مورفيزمين من الفئة $\mathcal{L}$

نقول عن الثنائية (N,f) حيث $f: B \to N$

إنها نواة مرافقة للمورفيزمين u_1 و u_2 إذا تحقق:

١- أياً كان $x \in ob(\mathcal{L})$ ولأجل كل مورفيزم $u: B \to X$ يحقق $u.u_1 = u.u_2$

يوجد مورفيزم وحيد $g: N \to X$ بحيث $g.f = u$

٢- إذا وجد هذا المورفيزم $u: B \to X$ مورفيزم آخر $g: N \to X$ بحيث $g.f = u$

ينتج أن $u.u_1 = u.u_2$

النواة المرافقة:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمين في الفئة $\mathcal{C}$ ولتكن $f: B \to N$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$. نقول إن الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 إذا حققت:

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[dll, "\lambda"'] \\ X & & B \arrow[ll, "g"] \arrow[u, "f"'] & A \arrow[l, shift left, "u_1"'] \arrow[l, shift right, "u_2"] \end{tikzcd}$$

١) لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$ و لأجل كل مورفيزم $g: B \to X$ تحقق $g.u_1 = g.u_2$ يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: N \to X$ بحيث $\lambda.f = g$

٢) إذا كان لأجل كل مورفيزم $g: B \to X$ يوجد مورفيزم $\lambda: N \to X$ بحيث $\lambda.f = g$ فإن $g.u_1 = g.u_2$

ينتج مباشرةً من التعريف أنه إذا كانت الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 فإن $f.u_1 = f.u_2$

① **تمهيدية:** لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمين في الفئة $\mathcal{C}$ ~~ولنفرض أن~~ ولتكن $f: B \to A$ مورفيزم آخر للفئة $\mathcal{C}$

الشروط الآتية متكافئة:

١- الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2

٢- $f.u_1 = f.u_2$ ولأجل كل مورفيزم $g: B \to X$ للفئة $\mathcal{C}$ بحيث $g.u_1 = g.u_2$ يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: N \to X$ بحيث $\lambda.f = g$

البرهان: ١ ⟸ ٢: واضح

٢ ⟸ ١: لتكن $g: B \to X$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ لأجله يوجد المورفيزم $\lambda: N \to X$ بحيث $\lambda.f = g$ وعليه

$$g.u_1 = (\lambda.f).u_1 = \lambda(f.u_1) = \lambda(f.u_2)$$
$$= (\lambda.f).u_2 = g.u_2$$

② **مبرهنة:** لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$ ولنفرض أن $f: B \to N$ و $\mu: B \to M$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$. إذا كانت كلاً من (N, f) و (M, μ) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2، عندئذٍ يوجد ايزومورفيزم $\alpha: N \to M$

البرهان: لنفرض أن كل من (N, f) و (M, μ) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 عندئذٍ $\mu.u_1 = \mu.u_2$، ولما كانت (N, f) نواة مرافقة لـ u_1, u_2 فإنه لأجل المورفيزم $\mu: B \to M$ يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: N \to M$ بحيث $\alpha.f = \mu$

التاريخ : / /

الموضوع :

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[dll, "\alpha"'] \\ M & & B \arrow[ll, "\mu"] \arrow[u, "f"] & A \arrow[l, shift left, "u_1"] \arrow[l, shift right, "u_2"'] \end{tikzcd}$$

أيضاً لما كانت (N, f) نواة مرافقة فإن $f.u_1 = f.u_2$ ، وبالتالي لأجل المورفيزم

$f: B \to N$ يوجد مورفيزم وحيد $\beta: M \to N$ بحيث $\beta.\mu = f$

ومنه $f = \beta.\mu = \beta.(\alpha.f) = (\beta.\alpha).f$

$\mu = \alpha.f = \alpha.(\beta.\mu) = (\alpha.\beta).\mu$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "{I_N, \beta.\alpha}"'] \\ N \arrow[r, phantom, "(*)"] & B \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f"'] & A \arrow[l, shift left, "u_1"] \arrow[l, shift right, "u_2"'] \end{tikzcd}$$

ولما كانت كل من $I_N , \beta.\alpha$ تجعل المخطط (*) تبديلي

ينتج أن $\beta.\alpha = I_N$

أيضاً ولما كانت كل من $\alpha.\beta$ و I_M تجعل

المخطط (**) تبديلي

ينتج أن $\alpha.\beta = I_M$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "{I_M, \alpha.\beta}"'] \\ M \arrow[r, phantom, "(**)"] & B \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\mu"'] & A \arrow[l, shift left, "u_1"] \arrow[l, shift right, "u_2"'] \end{tikzcd}$$

ومنه α أو β ايزومورفيزم.

③ مبرهنة:

لتكن ℓ فئة و $u_1, u_2: A \to B$ مورفيزمين للفئة ℓ عندئذٍ يوجد دالي مباشر

$F: \ell \to set$ يعرّف بالشكل $\forall\, x \in ob(\ell), F(x) = \{f: B \to X, f.u_1 = f.u_2\}$ $F(B,X)$

البرهان: ليكن $X, Y \in ob(\ell)$ بحيث $X = Y$

ليكن $g \in F(X)$ عندئذٍ $g: B \to X$ ويحقق $g.u_1 = g.u_2$ ولما كانت $X = Y$

نجد أن $g: B \to Y$ ويحقق $g.u_1 = g.u_2$ ومنه $g \in F(Y)$ أي أن

$F(X) \subseteq F(Y)$

وبطريقة مشابهة نجد أن $F(X) = F(Y)$

الشرط ② ـ لأجل كل مورفيزم $u: X \to Y$ للفئة ℓ لنضع $F(u): F(X) \to F(Y)$

$\forall\, \lambda \in F(X) \; ; \; F(u)(\lambda) = u.\lambda$

$F(Y) = \{g: B \to Y, g.u_1 = g.u_2\}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \\ B \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "u.\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

لما كان $\lambda \in F(X)$ فإنه $\lambda . u_1 = \lambda . u_2$ ومنه $u.(\lambda.u_1) = u.(\lambda.u_2)$

$(u.\lambda).u_1 = (u.\lambda).u_2$

وهذا يبين أن $u.\lambda \in F(Y)$

- ليكن $D \in ob(\ell)$، عندئذٍ $F(I_D) : F(D) \to F(D)$

$\forall \alpha \in F(D) \; ; \; F(I_D)(\alpha) = I_D . \alpha = \alpha$

وبالتالي فإن $F(I_D) = I_{F(D)}$

- ليكن $w : X \to Y$ و $v : Y \to Z$ مورفيزمين للفئة ℓ. إن $v.w : X \to Z$ وأن $F(v.w) : F(X) \to F(Z)$

$\forall \lambda \in F(X) \; ; \; F(v.w)(\lambda) = (v.w).\lambda = v.(w.\lambda)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "w.\lambda"'] & X \arrow[d, "w"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$F(v) : F(Y) \to F(Z)$

لما كان $w.\lambda : B \to Y$

وأن $(w.\lambda).u_1 = w.(\lambda.u_1)$

$= w.(\lambda.u_2) = (w.\lambda).u_2$

وهنا يبين أن $w.\lambda \in F(Y)$ وأن $F(v)(w.\lambda) = v.(w.\lambda)$

وبالتالي: $F(v.w)(\lambda) = F(v)(w.\lambda)$ ، $F(w) : F(X) \to F(Y)$

$= F(v)\big(F(w)(\lambda)\big) = F(v).F(w)(\lambda)$

ومنه $F(v.w) = F(v).F(w)$ أي أن F دالي مباشر

3 / تمهيدية:

لتكن ℓ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمين للفئة ℓ. إذا كانت الثنائية (N, f) حيث $f : B \to N$ نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2، عندئذٍ f إيبومورفيزم.

البرهان:

ليكن $x \in ob(\ell)$ و $\beta : \ell(N, X) \to \ell(B, X)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g.f"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\beta(g) = g.f$

ولنبرهن أن التطبيق β متباين. وليكن $g_1, g_2 \in \ell(N, X)$ حيث

$\beta(g_1) = \beta(g_2)$

$g_1.f = g_2.f$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "g_1"', shift right] \arrow[dl, "g_2", shift left] & \\ X & B \arrow[l, shift left, "g_1.f"] \arrow[l, shift right, "g_2.f"'] \arrow[u, "f"'] & A \arrow[l, shift left, "u_1"'] \arrow[l, shift right, "u_2"] \end{tikzcd}$$

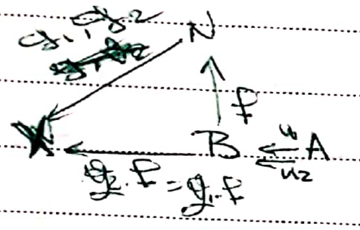
وأن $(g_1.f).u_1 = g_1.(f.u_1) = g_1.(f.u_2) = (g_1.f).u_2$

التاريخ : / /

الموضوع :

ومنه يوجد مورفيزم وحيد $v_1 : N \to X$ بحيث $v_1 . f = g_1 . f$

أيضاً يوجد $v_2 : N \to X$ بحيث $v_2 . f = g_2 . f$



$$= g_1 . f = v_1 . f$$

$$\Rightarrow g_2 . f = g_1 . f$$

ومنه فإنّ $g_1 = g_2$

وبالتالي β متباين و أنّ f ايبيمورفيزم

مبرهنة: 14.5

لتكن ℓ فئة و $F : \ell \to sets$ دالي مباشر لأجل كل $x \in ob(\ell)$ يوجد تطبيق متباين

وغامر: $\alpha : Hom(h_x, F) \to F(x)$

البرهان: ليكن $f \in Hom(h_x, F)$ ، $f : h_x \to F$ مورفيزم دالي عندئذٍ أياً

كان $y \in ob(\ell)$ و $f(y) : h_x(y) \to F(y)$ مورفيزم للفئة sets (تطبيق)

$f(y) : \ell(x,y) \to F(y)$

$\forall u \in \ell(x,y) ; f(y)(u) \in F(y)$

لأجل $y = x$ إنّ $u \in \ell(x,x)$ فإنّ $f(x)(u) \in F(x)$

لنضع $\alpha(f) = f(x)(I_x)$ إذن أن α تطبيق.

لنعرف علاقة $\beta : F(x) \to Hom(h_x, F)$

$\forall \varepsilon \in F(x) ; \beta(\varepsilon) : h_x \to F$

ليكن $y \in ob(\ell)$ إنّ $\beta(\varepsilon)(y) : h_x(y) \to F(y)$

$\ell(x,y) \to F(y)$

$\forall v \in \ell(x,y) ; \beta(\varepsilon)(y)(v) = F(v)(\varepsilon) \in F(y) \Rightarrow$ β تطبيق

ليكن $w : y \to y'$ مورفيزم للفئة ℓ

لنثبت أنّ

$$\begin{tikzcd}
h_x(y) \arrow[r, "\beta(\varepsilon)(y)"] \arrow[d, "h_x(w)"'] & F(y) \arrow[d, "F(w)"] \\
h_x(y') \arrow[r, "\beta(\varepsilon)(y')"'] & F(y')
\end{tikzcd}$$

$F(w) . \beta(\varepsilon)(y) = \beta(\varepsilon)(y') . h_x(w)$

$\forall \mu \in h_x(y) = \ell(x,y) ;$

$F(w) . \beta(\varepsilon)(y)(\mu) = F(w).(\beta(\varepsilon)(y)(\mu))$

$= F(w)(F(\mu)(\varepsilon)) = F(w) . F(\mu)(\varepsilon)$

$= F(w . \mu)(\varepsilon)$ كون F دالي مباشر

الموضوع: .... التاريخ: / /

$(\beta(\varepsilon)(y').h_x(\omega))(\mu) = (\beta(\varepsilon)(y'))(h_x(\omega)(\mu)) = \beta(\varepsilon)(y')(\omega.\mu) = F(\omega.\mu)(\varepsilon)$

و منه المساواة محققة و المخطط تبديلي و منه $\beta(\varepsilon) \in Hom(h_x, F)$

ـ لنبرهن على أن $\alpha.\beta = I_{F(x)}$ و $\beta.\alpha = I_{Hom(h_x,F)}$

لدينا: $\alpha.\beta : F(x) \longrightarrow F(x)$ و لأجل كل $\varepsilon \in F(x)$ فإنّ:

$\alpha.\beta(\varepsilon) = \alpha(\beta(\varepsilon)) = \beta(\varepsilon)(x)(I_x) = F(I_x)(\varepsilon) = I_{F(x)}(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow \alpha.\beta = I_{F(x)}$

و لدينا $\beta.\alpha : Hom(h_x,F) \longrightarrow Hom(h_x,F)$

$\forall f \in Hom(h_x,F) : \beta.\alpha(f) = \beta.(\alpha(f)) = f$

$\beta(\alpha(f)) : h_x \longrightarrow F$

$\forall y \in ob(\ell) : \beta(\alpha(f))(y) : \ell(x,y) \longrightarrow F(y)$

$\forall v \in \ell(x,y) : \beta(\alpha(f))(y)(v) = F(v)(\alpha(f)) = F(v)(f(x)(I_x))$

من تعريف التطبيقات $\left\{ \begin{array}{l} f : h_x \longrightarrow F \ , \ f(x) : \ell(x,x) \longrightarrow F(x) \\ F(v) : F(x) \longrightarrow F(y) \end{array} \right.$

$= F(v).f(x)(I_x) = f(y).h_x(v)(I_x)$

$= f(y)(h_x(v)(I_x)) = f(y)(vI_x)$

$= f(y)(v)$

$$\begin{tikzcd} h_x(X) \arrow[r, "f(x)"] \arrow[d, "h_x(v)"'] & F(x) \arrow[d, "F(v)"] \\ h_x(y) \arrow[r, "f(y)"'] & F(y) \end{tikzcd}$$

$\forall v \in \ell(x,y) ; \beta(\alpha(f)(y)) = f(y)$

$\forall y \in ob(\ell) ; \beta(\alpha(f)) = f$

* **تعريف:**

لتكن ℓ فئة و ليكن $x \in ob(\ell)$ نقول إنّ X معرف عليه علاقة تكافؤ إذا تحقق الشرط

ـ يوجد دالة $F : \ell \longrightarrow \bar{\ell}$ حيث $C \circ F = \hat{h}_x$

$$\begin{tikzcd} & \ell \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "\hat{h}_x"] & \\ \bar{\ell} \arrow[rr, "C"'] & & Sets \end{tikzcd}$$