/ /

" التوجيه (1) "
المحاضرة السادسة عشر :

- تمرين : لتكن $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$

$E\subseteq X$ مترابطة في X $\Leftarrow$ $f(E)$ مترابطة في Y

" المجموعات المترابطة صورتها وفق التوابع المستمرة مترابطة "

الحل :

لنفرض جدلاً أن $f(E)$ ليست مترابطة إذاً يوجد U و V

مجموعتان مفتوحتان في Y بحيث :

$$f(E)\subseteq U\cup V \quad *$$

$$f(E)\cap U\cap V=\phi$$

$$f(E)\cap U\neq\phi \quad , \quad f(E)\cap V\neq\phi$$

وبالتالي نأخذ الصورة العكسية لـ *

$$E\subseteq f^{-1}(f(E))\subseteq f^{-1}(U\cup V)$$

$$=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$$

$$\Longrightarrow E\subseteq f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$$

وحسب مبرهنة سابقة " الصورة العكسية لمجموعة المفتوحة تكون مفتوحة "

/ /

ف $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ مفتوحتان لأن U و V مفتوحتان

كذلك نأخذ الصورة العكسية للتقاطع للحصول على مجموعة مفتوحة

$E \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(f(E) \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V))$

$= f^{-1}(f(E) \cap U \cap V) = f^{-1}(\phi) = \phi$

أي $E \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \phi$ (2)

كما أن $E \cap f^{-1}(U) \neq \phi$

لأنه لنفرض $y \in f(E) \cap U$

$\Rightarrow y \in f(E) , y \in U$

$\Rightarrow \exists x \in E : y = f(x) \in U$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(U) , x \in E$

$\Rightarrow x \in E \cap f^{-1}(U) \neq \phi$ (3)

وبنفس الطريقة نجد: $E \cap f^{-1}(V) \neq \phi$ (4)

من 1) و 2) و 3) و 4) نرى أن E غير مترابطة وهذا

غير صحيح اذاً f(E) مترابطة.

/ /

تمرين: $\mathring{A} = A \setminus (A^c)'$

الحل: $(\mathring{A})^c = \overline{A^c} = A^c \cup (A^c)'$

$\Rightarrow \mathring{A} = [A^c \cup (A^c)']^c$

$= A \cap ((A^c)')^c$

$\mathring{A} = A \setminus (A^c)'$

تمرين: A مغلقة $\Leftrightarrow Fr\,A \subseteq A$

الحل: A مغلقة وبالتالي $\bar{A} = A$ ومنه

$Fr\,A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus \mathring{A} \subseteq A$

$\Rightarrow Fr\,A \subseteq A$

وبالعكس: $\bar{A} \setminus \mathring{A} = Fr\,A \subseteq A$

$\Rightarrow \bar{A} \setminus \mathring{A} \subseteq A \Rightarrow (\bar{A} \setminus \mathring{A}) \cup \mathring{A}$

$\subseteq A \cup \mathring{A}$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$

$\Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow$ A مغلقة

/ /

تمرين : $A \subseteq X$ ، E مترابطة ، E تحوي نقاط من $\mathring{A}$ وتحوي نقاط من $\mathring{A^c}$ برهن : $E \cap Fr A \neq \emptyset$

* سنعتمد في الحل على التمرين السابق الذي كان :

$$X = \mathring{A} \cup Fr A \cup (A^c)^\circ$$

الحل : لنفرض جدلاً أن : $\emptyset = E \cap Fr A$

$$\Rightarrow E = E \cap X = (E \cap \mathring{A}) \cup (E \cap Fr A) \cup (E \cap (A^c)^\circ)$$

$$\Rightarrow E = (E \cap \mathring{A}) \cup (E \cap (A^c)^\circ)$$

$$\Rightarrow E \subseteq \mathring{A} \cup (A^c)^\circ$$

لنضع $U = \mathring{A}$ ومنه $V = (A^c)^\circ$ " $\mathring{A}$ مجموعة النقاط الداخلية مفتوحة دوماً "

اذاً U و V مفتوحتان

$$\Rightarrow E \subseteq U \cup V$$

كما أن $E \cap U \cap V \neq \emptyset$

$$E \cap \mathring{A} \cap (A^c)^\circ$$

$$= E \cap \mathring{A} \cap (\mathring{A})^c \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow E \cap V \cap U \neq \emptyset$$

/ /

وبما أن E مترابطة فرضاً فلا يمكن أن يكون

$$E \cap V \neq \phi \quad , \quad E \cap U \neq \phi$$

اذا كان $\phi = E \cap V$

$$\Rightarrow E \subseteq U \cup V \Rightarrow$$

$$E = (E \cap U) \cup (E \cap V)$$

$$E = E \cap U \subseteq U$$

$$\Rightarrow E \subseteq U \subseteq A^{\circ}$$

لكن هذا غير ممكن لأن E في هذه الحالة لن تحوي نقاط في A^c. وإذا كان

$$E \subseteq V \Leftarrow E \cap U = \phi$$

$$\Rightarrow E \subseteq (A^c)^{\circ} \subseteq A^c$$

وبالتالي E لن تحوي من A وهذا غير ممكن

اذاً لابد من أن يكون :

$$E \cap Fr\,A \neq \phi$$

/ /

تمرين : $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ مترابطة

$A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta$

اذا $\bigcup_\alpha A_\alpha$ مترابطة.

الحل :

نفرض جدلاً أن $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ غير مترابطة

اذا توجد مجموعتان مفتوحتان U , V بحيث

$$A \subseteq U \cup V$$

$$A \cap U \cap V = \emptyset$$

$$A \cap U \neq \emptyset$$

$$A \cap V \neq \emptyset$$

$$\exists \alpha \in D : A_\alpha \cap U \neq \emptyset \Leftarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} (A_\alpha \cap U) = A \cap U \neq \emptyset$$

وبالتالي : $\Leftarrow (A_\alpha \cap V) = A \cap V \neq \emptyset$

$$\exists \beta \in A_\beta \cap V \neq \emptyset$$

$$A_\beta \cap V \neq \emptyset$$

$$A_\beta \cap U \neq \emptyset$$

نلاحظ أن $(A_\beta \subseteq U \cup V)$, $A_\alpha \subseteq U \cup V$

$A_\alpha \cap U \cap V \subseteq A \cap U \cap V = \emptyset$, $A \cap U \cap V \subseteq A \cap U \cap V = \emptyset$

$A_\alpha \subset U \cup V$, $A_\alpha \cap U \cap V = \emptyset$

$A_B \subseteq U \cup V$, $A_B \cap V \cap U = \emptyset$, $A_B \cap V \neq \emptyset$

ولدينا $\phi \neq A_\alpha \cap A_\beta$

فرضنا اذا من نتيجة سابقة

$A_\alpha \cup A_\beta$ مترابطة

لكن

$A_\alpha \cup A_\beta \subseteq U \cup V$;

$(A_\alpha \cup A_\beta) \cap U \cap V = \phi$

$\Rightarrow (A_\alpha \cup A_\beta) \cap U \neq \phi$

$(A_\alpha \cup A_\beta) \cap V \neq \phi$

$\Rightarrow$ $A_\alpha \cup A_\beta$ غير مترابطة

هذا يناقض كونه مترابطة.

تمرين : $\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ مترابطات

$A_n \cap A_{n+1} \neq \phi$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

الحل : اعتماداً على النتيجة التي منها :

اذا كان A, B مترابطتان و $\phi \neq A \cap B$

$\Rightarrow A \cup B$ مترابطة

لتكن

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_1 \cup A_2$

$$B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \ldots, B_{n+1}$$

$$= B_n \cup A_{n+1}$$

$B_1 = A_1$ مترابطة فرضاً (لأنها تساوي A_1)

$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \quad , \quad B_2 = A_1 \cup A_2$

$\Leftarrow$ حسب النتيجة $B_2 = A_1 \cup A_2$ مترابطة

$$B_2 \cap A_3 \neq \emptyset$$

$$B_3 = B_2 \cup A_3$$

$\Leftarrow$ نتيجة $B_2 \cup A_3$ مترابطة

اذاً B_3 مترابطة وهكذا ....

بالاستقرار نجد أن :

$B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$ مترابطة

لأن B_n , A_{n+1} مترابطتين

و $B_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$

اذاً $\{ B_n : n \in \mathbb{N}^+ \}$ مترابطات

$$\emptyset \neq A_1 = B_1 \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B \neq \emptyset ,$$

/ /

اذاً $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ مترابطة

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ مترابطة

تمرين: $\{A_\alpha : \alpha \in D\}$ مجموعات مترابطة و

A مجموعة مترابطة بحيث:

$A \cap A_\alpha \neq \phi \quad \forall \alpha \in D$

أثبت أن $A \cup (\bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha)$ مترابطة.

الحل: لدينا $A \cup A_\alpha$ مترابطة (نتيجة) اذاً

$\{A \cup A_\alpha : \alpha \in D\}$

مترابطة بحيث

$\phi \neq A \subseteq \bigcap_{\alpha \in D} (A \cup A_\alpha)$

اذاً

$$A \cup (\bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in D} (A \cup A_\alpha)$$

مترابطة　　　مترابطة

/ /

تمرين : X مترابط $\Longleftrightarrow$ كل تابع مستمر يكون

ثابت : $f:(X,d) \longrightarrow (Z,|.|)$

الحل : $(\Longleftarrow)$ X مترابط ولكن f تابع مستمر من X ← في Z

نعلم أنّ $\phi \neq X = f^{-1}(Z)$

المصورة العكسية لمستقر يساوي المنطلق.

$\phi \neq X = \bigcup_{z\in Z} f^{-1}\{f(z)\}$

اذن توجد $z_0 \in Z$ بحيث $\phi \neq f^{-1}(z_0)$

$\{z_0\}$ مغلقة ومفتوحة في $(Z,|.|)$

f مستمر $\Leftarrow$ $f^{-1}(\{z_0\})$ مفتوحة ومغلقة في (X,d)

- X مترابط ونعلم أنّ [[X مترابط $\Leftarrow$ المجموعات الوحيدة المغلقة والمفتوحة في X هي ϕ و X]]

اذا $f(x) = \{z_0\}$ ومنه $f^{-1}(\{z_0\}) = X$

f ثابت $\Rightarrow$ $f(x) = z_0 \,,\forall x \in X$

$(\Rightarrow)$، محققة ونريد اثبات أن X مترابط، لنفرض جدلاً أن

X غير مترابط اذن توجد U و V مفتوحتان بحيث :

$$X = U \cup V \ , \ U \cap V = \phi$$

$$U \neq \phi \neq V$$

لنعرف التابع التالي:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x \in U \\ -1 & x \in V \end{cases}$$

وواضح أن f مستمر الآن لنفرض أن O مفتوحة في $(Z, 1.1)$

لدينا الحالات التالية:

1) $+1, -1 \notin \phi \Leftarrow f^{-1}(O) = \phi$ مفتوحة

2) $-1 \notin O \ , \ 1 \in O \Leftarrow f^{-1}(O) = U$ مفتوحة

3) $-1 \in O \ , \ 1 \notin O \Leftarrow f^{-1}(O) = V$ مفتوحة

4) $-1 \in O \ , \ 1 \in O \Leftarrow f^{-1}(O) = X$ مفتوحة

اذن f مستمر لكن غير ثابت وهذا يناقض ★ اذن

X مترابط