- المونومورفيزم والإبيمورفيزم :

- ليكن $\mathcal{C}$ فئة و $u: A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ نقول إن u $\boxed{\text{مونومورفيزم}}$ إذا تحقق الشرط :

أياً كان $x \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق :

$$\alpha : \mathcal{C}(x,A) \longrightarrow \mathcal{C}(x,B)$$

المعرف بالشكل $\forall f \in \mathcal{C}(x,A)$ ؛

$$\alpha(f) = u.f$$

متباين .

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & B \\
x \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "u.f"'] &
\end{tikzcd}$$

- بمعنى آخر .. أياً كان : $f_1 , f_2 \in Mor(\mathcal{C})$ بحيث

$u.f_1 = u.f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$ قابلية الاختصار من اليسار

* نقول عن المورفيزم u إنه $\boxed{\text{إبيمورفيزم}}$ إذا تحقق الشرط :

أياً كان $x \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق :

$$\beta : \mathcal{C}(B,x) \longrightarrow \mathcal{C}(A,x)$$

المعرف بالشكل $\forall f \in \mathcal{C}(B,x)$ ؛

$$\beta(f) = f.u$$

متباين ..

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dashed, "f.u"'] & B \arrow[d, "f"] \\
& x
\end{tikzcd}$$

بمعنى آخر ، أياً كان : $f_1 , f_2 \in Mor(\mathcal{C})$

قابلية الاختصار من اليمين $f_1.u = f_2.u \Rightarrow f_1 = f_2$

- ونقول عن المورفيزم u إنه $\boxed{\text{إيزومورفيزم}}$ إذا وجد مورفيزم

$$v : B \to A$$

للفئة C بحيث $u.v = I_B$, $v.u = I_A$ *

الضرب هنا غير تبديلي لهذا لا يجب أن يعمل له تماثل عكسي.

* ينتج من تعريف الإيزومورفيزم :

- أن v هو أيضاً إيزومورفيزم ووحيد أيضاً لأن :

إذا كان $w : B \to A$ مورفيزم آخر للفئة C يحقق

$w.u = I_A$ و $u.w = I_B$ نعوض

فإن $v = v.I_B = v.(u.w)$

$= (v.u).w$

$= I_A.w = w$

تعميم : في أي فئة C فإن :

١- المورفيزم المطابق هو إيزومورفيزم

٢- تركيب إيزومورفيزمين هو أيضاً إيزومورفيزم

البرهان :

١- ليكن $A \in ob(C)$ ، لما كان $I_A . I_A = I_A$

فإن I_A إيزومورفيزم

٢- لنفرض أن $u : A \to B$ و $v : B \to D$

إيزومورفيزمين للفئة C عندئذ يوجد $u' : B \to A$

$v' : D \to B$

بحيث : $u'.u = I_A$ و $u.u' = I_B$

$v'.v = I_B$, $v.v' = I_D$

لما كان $v.u : A \to D$

مورفيزم للفئة C فإن:

$u'.v' : D \to A$

مورفيزم للفئة ℓ ويحققان :

$(v.u).(u'.v') = v.(u.u').v'$

$= v.I_B.v' = v.v' = I_D$

$(u'.v').(v.u) = u'.(v'.v).u$

$= u'.I_B.u = u'.u = I_A$

ومنه فإن المورفيزم $v.u$ هو إيزومورفيزم .

(بنفس الطريقة نثبت أن $v.u$ هو إيزومورفيزم)

خواص المونومورفيزم والإيبيمورفيزم :

نظرية : في أي فئة ℓ القضايا التالية صحيحة :

١- تركيب مونومورفيزمين هو مونومورفيزم .

٢- إذا كان v ، u ~~مورفيزمين~~ في الفئة ℓ بحيث أن $v.u$ مونومورفيزم فإن u مونومورفيزم

٣- أياً كان $A \in ob(\ell)$ فإن I_A مونومورفيزم ..

البرهان :

ليكن $u : A \to B$, $v : B \to D$

مورفيزمين للفئة ℓ

أياً كان $x \in ob(\ell)$ لنفرض أن :

$\alpha : \ell(x, A) \to \ell(x, B)$

$\alpha(f) = u.f$

$\beta : \ell(x, B) \to \ell(x, D)$

$\beta(g) = v.g$

لدينا $v.u : A \to D$

بفرض $\gamma : \mathcal{L}(x,A) \to \mathcal{L}(x,D)$

$\gamma(h) = (v.u).h$

1) لنفرض أن كلاً من u و v مونومورفيزم عندئذٍ فإن كلاً من α و β متباينين. لنبرهن أن γ متباين:

ليكن $h_1 , h_2 \in \mathcal{L}(x,A)$ حيث:

$\gamma(h_1) = \gamma(h_2)$

عندئذ: $(v.u).h_1 = (v.u).h_2$

$v(u.h_1) = v.(u.h_2)$ (لدينا $u.h_1 . h_2 \in \mathcal{L}(x,A)$)

$\Rightarrow \beta(u.h_1) = v(u.h_2)$

$u.h_1 = u.h_2$

$\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$

$h_1 = h_2$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "u.h_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ & B \end{tikzcd}$$

2) لنفرض $u.v$ مونومورفيزم عندئذٍ التطبيق γ متباين
ولنبرهن على أن التطبيق α متباين:

ليكن $f_1 , f_2 \in \mathcal{L}(x,A)$ حيث:

$\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$

$u.f_1 = u.f_2$

ومنه $\beta(u.f_1) = \beta(u.f_2)$

$v.(u.f_1) = v(u.f_2)$

$\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$

وبما أن γ متباين فإن $f_1 = f_2$

وهذا يبين أن التطبيق α متباين وبالتالي المورفيزم u مونومورفيزم

Subject :

٣) ليكن $A \in ob(\ell)$ لما كان

$$I_A : A \longrightarrow A$$

لنفرض $\mu : \ell(x,A) \longrightarrow \ell(x,A)$

$$\mu(\delta) = I_A . \delta = \delta$$

وأياً كان $\delta_1 , \delta_2 \in \ell(x,A)$ بحيث :

$$\mu(\delta_1) = \mu(\delta_2)$$

$$I_A . \delta_1 = I_A \delta_2$$

$$\delta_1 = \delta_2$$

أي أن التطبيق μ متباين وبالتالي المورفيزم I_A مونومورفيزم

تمهيدية : في أي فئة ℓ القضايا الآتية صحيحة :

١ـ تركيب إيبومورفيزمين هو ايبومورفيزم

٢ـ إذا كان u, v مورفيزمين للفئة ℓ وكان $v.u$ ايبومورفيزم فإن v إيبومورفيزم

٣ـ أياً كان $A \in ob(\ell)$ فإن I_A ايبومورفيزم.

البرهان مطبقة

نتيجة : إذا كان u ايزومورفيزم للفئة ℓ، عندئذ u مونومورفيزم وإيبومورفيزم .

برهانها : لنفرض أن $u : A \to B$ ايزومورفيزم عندئذ يوجد مورفيزم $v : B \to A$ للفئة ℓ بحيث :

$$\underbrace{u . v = I_B}_{\text{ايبومورفيزم}} \quad , \quad \underbrace{v . u = I_A}_{\text{مونومورفيزم}}$$

لكن العكس غير صحيح .