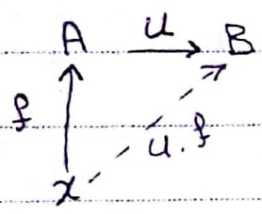


المورفيزم u لا يسو مورفيزم
 لكن u فئة $A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة \mathcal{A} نقول إن u مورفيزم إذا تحقق الشرط:

أياً كان $x \in \text{ob}(\mathcal{A})$ فإن لتطبيق $\alpha: \mathcal{A}(x, A) \rightarrow \mathcal{A}(x, B)$

المعرف بالشكل $\forall f \in \mathcal{A}(x, A)$ $\alpha(f) = u \cdot f$



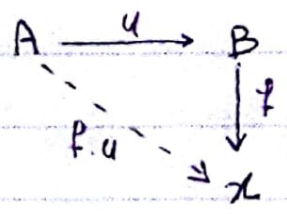
متباين
 بعض آخر... أياً كان $f_1, f_2 \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ بحيث

$u \cdot f_1 = u \cdot f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$ قابلية الاختصار من اليسار

* نقول عند المورفيزم u إنه مورفيزم إذا تحقق الشرط:
 أياً كان $x \in \text{ob}(\mathcal{A})$ فإن لتطبيق

$\beta: \mathcal{A}(B, x) \rightarrow \mathcal{A}(A, x)$

المعرف بالشكل $\forall f \in \mathcal{A}(B, x)$ $\beta(f) = f \cdot u$



متباين...
 بعض آخر... أياً كان $f_1, f_2 \in \text{Mor}(\mathcal{A})$
 قابلية الاختصار من اليمين $f_1 \cdot u = f_2 \cdot u \Rightarrow f_1 = f_2$

Subject:

ونقول ان u مورنيزم $A \rightarrow B$ اذا وجد مورنيزم

$$v: B \rightarrow A$$

* $v \cdot u = I_A$ و $u \cdot v = I_B$ للفتة f عكسة

الذي هو f^{-1} ان f مورنيزم $A \rightarrow B$ ان $f \cdot f^{-1} = I_B$ و $f^{-1} \cdot f = I_A$

* نتج من تعريف اليزومورفيزم:

ان v هو أيضاً ايزومورفيزم ووحيد أيضاً لان:

اذا كان $w: B \rightarrow A$ مورنيزم آخر للفتة f عكسة

$$w \cdot u = I_A \text{ و } u \cdot w = I_B$$

$$v = v \cdot I_B = v \cdot (u \cdot w)$$

$$= (v \cdot u) \cdot w$$

$$= I_A \cdot w = w$$

تلمذة: في أي فتة f فان

1- المورنيزم المطابقة هو ايزومورفيزم

2- تركيب ايزومورفيزين هو أيضاً ايزومورفيزم

البرهان:

1- ليكن $A \in \text{ob}(C)$ فان $I_A \cdot I_A = I_A$

فان I_A ايزومورفيزم

2- لنفرض ان $u: A \rightarrow B$ و $v: B \rightarrow D$

ايزومورفيزين للفتة f عندئذ يوجد

$$u': B \rightarrow A$$

$$v': D \rightarrow B$$

$$u \cdot u' = I_B \text{ و } u' \cdot u = I_A$$

$$v \cdot v' = I_D \text{ و } v' \cdot v = I_B$$

$$v \cdot u: A \rightarrow D$$

فان $v \cdot u$ مورنيزم للفتة f فان

Subject :

$$u', v' : D \rightarrow A$$

مؤثرين للفئة \mathcal{L} و \mathcal{M} :

$$(v', u) \cdot (u', v') = v' \cdot (u, u') \cdot v' \\ = v' \cdot I_B \cdot v' = v' \cdot v' = I_D$$

$$(u', v') \cdot (v', u) = u' \cdot (v', v') \cdot u \\ = u' \cdot I_B \cdot u = u' \cdot u = I_A$$

منه بان المؤثرين v', u هو ايزومورفيزم

(بمعنى ان v', u هو ايزومورفيزم)

مما هو ايزومورفيزم و ايزومورفيزم :

تعريف : f أي فئة \mathcal{L} اقضاء التالية صحيحة :

1- تركيب مؤثرين من \mathcal{L} هو مؤثر من \mathcal{L} .

2- اذا كان u, v مؤثرين في الفئة \mathcal{L} بحيث ان $v \cdot u$

مؤثر من \mathcal{L} بان u مؤثر من \mathcal{L}

3- أي بان $\text{ob}(\mathcal{L})$ فان I_A مؤثر من \mathcal{L} ...

البرهان :

ليكن $u : A \rightarrow B, v : B \rightarrow D$

مؤثرين من الفئة \mathcal{L}

أي بان $x \in \text{ob}(\mathcal{L})$ نفرض ان :

$$\alpha : \mathcal{L}(x, A) \rightarrow \mathcal{L}(x, B)$$

$$\alpha(f) = u \cdot f$$

$$\beta : \mathcal{L}(x, B) \rightarrow \mathcal{L}(x, D)$$

$$\beta(g) = v \cdot g$$

$$v \cdot u : A \rightarrow D$$

Subject :

1 1

$$\gamma : \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \mathcal{L}(X, D)$$

بفرض

$$\gamma(h) = (\psi, u) \cdot h$$

(أ) نفرض أن كلًا من ψ و u معنويين عندنا كلًا من α و

B متباينين... لنرهن أن α متباين :

ليكن $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(X, A)$ حيث :

$$\gamma(h_1) = \gamma(h_2)$$

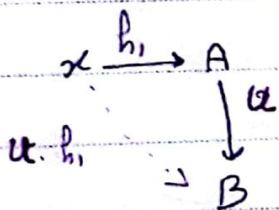
$$(\psi, u) \cdot h_1 = (\psi, u) \cdot h_2 \quad \text{عندنا :}$$

$$\psi(u \cdot h_1) = \psi(u \cdot h_2) \quad (\text{لأن } u \cdot h_1, h_2 \in \mathcal{L}(X, A))$$

$$\Rightarrow \beta(u \cdot h_1) = \beta(u \cdot h_2)$$

$$u \cdot h_1 = u \cdot h_2$$

$$\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$$



(ب) نفرض u معنويين عندنا α متباينين

ونرهن أن α متباين :

ليكن $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X, A)$ حيث :

$$\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$$

$$u \cdot f_1 = u \cdot f_2$$

$$\beta(u \cdot f_1) = \beta(u \cdot f_2) \quad \text{ومنه .}$$

$$\psi(u \cdot f_1) = \psi(u \cdot f_2)$$

$$\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$$

$$f_1 = f_2 \quad \text{ولما كان } \alpha \text{ متباين بيان .}$$

وهذا يعني أن تطبيق α متباين وبالتالي المعنويين u معنويين

Subject :

(٣) ليكن $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ وكان u

$$I_A : A \rightarrow A$$

$$\mu : \mathcal{C}(x, A) \rightarrow \mathcal{I}(x, A) \quad \text{لنفرضه}$$

$$\mu(\delta) = I_A \cdot \delta = \delta$$

أيضاً كان $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{C}(x, A)$ عتبة :

$$\mu(\delta_1) = \mu(\delta_2)$$

$$I_A \cdot \delta_1 = I_A \cdot \delta_2$$

$$\delta_1 = \delta_2$$

أي أن التطبيق μ متباين وبالتالي لمؤثر I_A مؤثر مورفيزم

تعميم : في أي فئة \mathcal{C} المصايا الآتية صحيحة :

- 1- تركيب إيسومورفيزمين هو إيسومورفيزم
- 2- إذا كان u مورفيزمين للفئة \mathcal{C} وكان v إيسومورفيزم فإن $v \circ u$ إيسومورفيزم
- 3- أيّاً كان $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ فإن I_A إيسومورفيزم البرهان واضحة

نتيجة : إذا كان u إيزومورفيزم للفئة \mathcal{C} ، عندئذ u مؤثر مورفيزم وإيسومورفيزم.

برهانها : لنفرض أن $u : A \rightarrow B$ إيزومورفيزم عندئذ يوجد مورفيزم $v : B \rightarrow A$ للفئة \mathcal{C} عتبة :

$$\underbrace{u \circ v = I_B}_{\text{إيسومورفيزم}} , \underbrace{v \circ u = I_A}_{\text{مؤثر مورفيزم}}$$

لكن العكس غير صحيح .