◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄ المحاضرة: الأولى ◄ عنوان المحاضرة: مقدمة

أهلاً بكم أعزائي الطلاب مع مقرر الرياضيات المتقطعة.

تحدثت الدكتورة عن هذه المادة كالتالي:

يوجد في الرياضيات : رياضيات متقطعة ورياضيات مستمرة .

حيث شبهت الرياضيات المتقطعة بالساعة الرقمية، بين الدقيقة والدقيقة تقفز قفزاً.

أما الرياضيات المستمرة فهي تمسح ساعة دائرية.

والآن نبدأ بمقدمة المادة:

مجموعة الأعداد الصحيحة : *set of integes*

هي الأعداد : $\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

إما أن يكون العدد زوجي $evea$ $(2n)$: حيث n عدد صحيح.

أو أن يكون العدد فردي odd $(2n+1)$: حيث n عدد صحيح.

الخواص الأساسية لعملية الجمع والضرب:

$$\forall n,m,k \in \mathbb{Z}$$

١) الخاصة التبديلية: $m+n=n+m$ ، $m.n=n.m$.

٢) الخاصة التجميعية: $(m+n)+k=m+(n+k)$ ، $(m.n).k=m.(n.k)$.

٣) الخاصة التوزيعية: $(m+n).k=m.k+n.k$ ، $m.(n+k)=m.n+m.k$.

تمثيل الأعداد الصحيحة:

بفرض أن b عدد صحيح موجب أكبر من الواحد

إذا كان n عدد صحيح موجب فإن n يملك تمثيلاً وحيداً على النحو:

$$n = a_k . b^k + a_{k-1} . b^k + \cdots + a_1 . b^1 + a_0$$

حيث k عدد صحيح غير سالب .

$a_0, a_1, \dots, a_k$ أعداد صحيحة غير سالبة ، بحيث $a_k \neq 0$.

قابلية القسمة:

نقول عن العدد الصحيح a بأنه يقسم العدد الصحيح n إذا كان $a \neq 0$ و وجد عدد صحيح مثل k بحيث :
$n = a . k$.

(نرمز لذلك $^{a}/_{k}$)

ولدينا خاصتين أساسيتين:

١) إذا كان $^{d}/_{a}$ و $^{a}/_{b}$ فإن $^{d}/_{b}$.
٢) إذا كان $^{d}/_{a}$ و $^{d}/_{b}$ فإن $^{d}/_{(ax + by)}$.

من أجل أي عددين صحيحين x, y .

العدد الأولي $prime$:

نقول عن العدد الصحيح $p > 1$ أنه أولي ، إذا كانت الأعداد $1, p$ هي قواسمه الموجبة فقط.

أما العدد الصحيح الذي يكبر الواحد وليس بعدد أولي ندعوه العدد المركب.

ملاحظة:

يكون العدد الصحيح n مركباً إذا وجد عدد صحيح a بحيث $^{a}/_{n}$, $1 < a < n$.

النظرية الأساسية في الحساب:

إن أي عدد صحيح أكبر من الواحد يمكن أن يكتب كتابة وحيدة على أنه عدد أولي أو جداء عددين أوليين أو أكثر ، حيث أن العوامل الأولية تكتب بترتيب متناقص.

مثلاً:

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

$$1024 = 2^{10}$$

$$999 = 3^3 \times 37$$

نظرية: إذا كان n عدداً صحيحاً مركباً، فإن للعدد n قاسماً أولياً أصغر أو يساوي $\sqrt{n}$.

مثال: بين أن 101 عدد أولي.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى

◄ دكتورة المادة: شغف زوريا

◄المحاضرة: الثانية ◄ عنوان المحاضرة:

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـحل مثال المحاضرة السابقة.

٢ـأعداد ميرسين.

٣ـالأعداد الأولية والمتتاليات.

إذا كان n عدداً صحيحاً مركباً ،فإن للعدد n...

لنبدأ الآن معا حل المحاضرة السابقة:

المثال: بين أن العدد ١٠١ أولي؟

الحل: إن ١٠١ أولي لأنه إذا أخذنا قواسمه الأولية التي لا تتجاوز $\sqrt{101}$ تكون 2,3,5,7 نجد أنه لا يقبل القسمة على أياً منها ، وحسب النظرية السابقة ليس مركباً⇐ ١٠١ أولي.

صيغة أخرى للنظرية: إذا كان العدد الصحيح الموجب n مركباً فإن للعدد n عامل أولي p بحيث يكون $n \leq p^2$.

نظرية:

يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية ومن الأعداد الأولية يوجد أعداد لها صيغة معينة تسمى أعداد ميرسين وهي الأعداد الأولية من الشكل :

$$m_2 = 2^2 - 1$$

$$m_3 = 2^3 - 1$$

$$m_5 = 2^5 - 1$$

$$m_7 = 2^7 - 1$$

أي تعرف صيغة ميرسين بالعلاقة $m_p = 2^p - 1$ حيث p عدد أولي، وليس كل الأعداد الأولية نستطيع إيجاد صيغة ميرسين لها.

مثلاً : $2^{n-1} = 2047 = 23,89$ ليس أولي .

إلى الآن عدد الأعداد الأولية التي وجد لها هذا الشكل ٤٩ .

$m_{74207281} = 2^{74207281} - 1$ والذي يتضمن أكثر من ٢٢ مليوناً من الأرقام وتحديداً ٢٢٣٣٨٦١٨ رقماً.

الأعداد الأولية والمتتاليات:

إن أي عدد صحيح فردي هو ناتج من إحدى المتتاليتين : إما $4k + 1$ حيث $k = 1, \dots$

أو $4k + 3$ حيث $k = 0,1,2, \dots$

إن الأعداد الأولية : $5,13,17,29$ تنتج من المتتالية $4k + 1$

بينما الأعداد الأولية $3,7,11,19,23,31$ تنتج من المتتالية $4k + 3$ حيث كل من المتتاليتين تحوي عدداً لا نهائياً من الأعداد الأولية.

أثبت العالم ديريكليه أن المتتالية الحسابية من الشكل $ak + b$ حيث $k = 1,2 \dots$ بحيث لا يوجد عدد أكبر من الواحد يقسم كلا العددين a, b معاً.

عندئذٍ كل متتالية من الشكل السابق تحتوي على عدد لا نهائي من الأعداد الأولية .

تقنيات الإثبات:

١) الإثبات المباشر.
٢) الإثبات باستخدام المكافئ العكسي.
٣) الإثبات بنقض الفرض.
٤) الإثبات بالاختبار الشامل(بالحالات).
٥) الإثبات الاستقراء الرياضي.

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج - باسل أبو عيسى - سلام الخليل

◄ دكتورة المادة: شغف زوريا

◄ المحاضرة: الثالثة ◄ عنوان المحاضرة : تقنيات الاثبات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالتوسع في تقنيات الإثبات .

٢ـتعداد مبادئ العد.

تقنيات الإثبات:

الإثبات المباشر $if\,A, then B$:

نفرض أن A صحيحة ثم نطبق متتالية من الخطوات المنطقية باستخدام جملة من المسلمات أو القواعد المثبتة حتى نصل إلى صحة B .

مثال:

إذا كان n عدداً فردياً فإن n^2 عدد فردي.

الحل:

نفرض أن n عدد فردي وبالتالي يكتب بالشكل $n = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح ما

لنربع n وبالتالي $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ يكتب بالشكل $n^2 = 2\mathrm{t} + 1$ حيث $\mathrm{t} = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي n^2 عدد فردي.

مثال ٢ :

إذا كان العددان n, m مربعان تامان فإن $n * m$ مربع تام علما أن $a \in \mathbb{Z}$ تام عندما يوجد $b \in \mathbb{Z}$ يحقق $a = b^2$.

الحل:

إذا كان n, m مربعان تامان فإنه يوجد $\mathrm{t} \in \mathbb{Z}$ و $s \in \mathbb{Z}$ بحيث $\mathrm{m} = \mathrm{t}^2,\ n = s^2$

$$\mathrm{m.n} = \mathrm{t}^2 . s^2 = (ts)^2$$

$m * n$ تام.

٢) الإثبات باستخدام المكافئ العكسي :

يمكننا عوضاً عن إثبات $if A, then B$ أن نثبت العبارة المكافئة لها تماماً.

$then\ (not\ A, if\ not\ B)$

مثال:

إذا كان n^2 مربع عدد صحيح فردي فإن n عدد صحيح فردي:

الحل بالإثبات المباشر:

n^2 فردي فهو يكتب بالشكل $n^2 = 2k + 1 \Leftarrow n = \pm\sqrt{2k+1}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

لذلك نتبع اسلوب الإثبات بالمكافئ العكسي أي إذا كان n عدد صحيح زوجي فإن n^2 عدد صحيح زوجي.

نفرض n عدد صحيح زوجي فإنه يكتب بالشكل $n = 2k$ حيث k عدد صحيح

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \in \mathbb{Z}$ وبالتالي n^2 عدد زوجي لأنه كتب بالشكل $n^2 = 2t$ حيث $t = 2k^2 \in \mathbb{Z}$.

٣) الإثبات بالتناقض:

لإثبات أن A صحيحة نبحث عن تناقض B بحيث يكون $if\ not\ A, then\ B$ عبارة صحيحة ولكن بما أن B خاطئة فإن $not\ A$ خاطئة وبالتالي A صحيحة.

مثال:

أثبت أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي:

تذكرة ((نقول أن العدد r عدد نسبي إذا وجد $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث $b \neq 0$ ، a, b أوليان نسبيان بحيث يكون $r = \frac{a}{b}$)).

الحل:

بفرض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي أي يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ حيث $b \neq 0$ أوليان نسبياً يحققان $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

$$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

وبالتالي توجد بين a,b عوامل مشتركة وهذا يناقض فرض a,b وبالتالي $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

مثال آخر:

إذا كان $3n+2$ فردياً فإن n فردي حيث $n \in \mathbb{Z}$.

الحل:

بفرض أن n زوجي إذاً:

$$\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$$

$$\Rightarrow 3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) \in \mathbb{Z}$$

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ وهو عدد فردي ومنه n عدد فردي.

٤) الإثبات بالاختبار الشامل (الحالات):

عندما يتعذر إثبات عبارة باستخدام حجة واحدة لكل الحالات الممكنة نجري عملية الإثبات اخذين بعين الاعتبار الحالات المختلفة اخذاً منفصلاً وبعض العبارات يمكن إثباتها من خلال اختبار عدد (صغير نسبياً) من الأمثلة ، ويدعى هذا الاسلوب بالاختبار الشامل أي إجراء مسح واستنفاذ لكل من الحالات الممكنة واختبارها وهذا الاسلوب هو حالة خاصة من الإثبات بالحالات بحيث تكون كل حالة هي اختبار لمثال وحيد

مثال أثبت صحة المتراجحة $3^n < (n+1)^3$ من أجل n عدد صحيح موجب يحققه $4 > n$

الإثبات : نستخدم اسلوب الاختبار الشامل من أجل الحالات $n = 1,2,3,4$.

الحالة	$(n+1)^3$	3^n	المتراجحة
$n = 1$	٨	٣	محققة
$n = 2$	٢٧	٩	محققة
$n = 3$	٦٤	٢٧	محققة
$n = 4$	١٢٥	٨١	محققة

مثال: استخدم اسلوب الإثبات بالحالات لبيان صحة العبارة :

إذا كان n عدداً صحيحاً فإن $n^2 \geq n$.

الإثبات:

لنثبت أن $n^2 \geq n$ من أجل كل عدد صحيح n بأخذ الحالات:

١) $n = 0$
٢) $n = 1$
٣) $n = 2$

الحالة الأولى: $n = 0$

$n^2 = 0^2 = 0$ وبالتالي $n^2 = n$ إذا المتراجحة محققة.

الحالة الثانية: $n \geq 1$

نضرب طرفي المتراجحة ب n فنجد $n^2 \geq n$ وهو المطلوب .

الحالة الثالثة: $-1 \geq n$

بما أن n^2 عدد موجب دوماً فهو أكبر أو يساوي n لأن n هنا سالبة.

$$n^2 \geq n$$

بما أن المتراجحة محققة في الحالات الثلاث فهي محققة دوماً.

٥ الإثبات باستخدام ((إذا وفقط إذا)):

يكون λ عدداً فردياً إذا وفقط إذا كان $(\lambda^2 - 1)$ 81تقسم.

٦ الإثبات باستخدام الاستقراء الرياضي:

مبادئ العد

١) مبدأ الجمع :

لنفرض أنه لدينا حدث E يظهر ب m طريقة وحدث آخر F يظهر ب n طريقة ولنفترض أن F, E لا يمكن ظهورهما معاً عندئذٍ يكون ظهور الحدث E أو الحدث F ب $m + n$ طريقة .

٢) مبدأ قاعدة الجداء:

لنفترض أنه لدينا الحدث E يمكن ظهوره ب m طريقة بشكل مستقل عنه ، يظهر الحدث F ب n طريقة عندئذٍ يمكن ظهور الحدثين E و F معاً ب $m.n$ طريقة .

ملاحظة:

يمكن تعميم المبدأين السابقين إلى عدد منته من الأحداث بنفس الشروط .

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج - باسل أبو عيسى - سلام الخليل

نظري

◄ دكتور المادة شغف زوريا

◄ المحاضرة: الرابعة ◄ عنوان المحاضرة:

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمبادئ العد.

٢ـدالة العاملي.

٣ـمثلث باسكال.

تحدثنا في المحاضرة السابقة عن مبادئ العد:

١) مبدأ قاعدة الجداء.
٢) مبدأ قاعدة الجمع

ويمكن تعميم هذه القاعدة لأكثر من حدث:

لتكن الأحداث: $E_1, E_2, \dots, E_N$

طريقة كل منها: $n_1, n_2, \dots, n_N$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_N \Leftarrow$

مثال:

لنفترض أن مدرسة فيها ثلاث مقررات مختلفة للتاريخ وأربعة مقررات مختلفة للقراءة ومقرران مختلفان للاجتماعيات والمطلوب:

١) ما هو عدد الطرق لاختيار طالب ما مقرر واحداً من كل نوع من المقررات.
٢) ما هو عدد الطرق لاختيار طالب ما مقرر واحد فقط من هذه المقررات.

الحل:

١) نفترض أن عدد الطرق المطلوب هو m عندئذٍ $m = 3 \times 4 \times 2 = 24$

٢)نفترض أن عدد الطرق المطلوب هو n عندئذٍ $n = 3 + 4 + 2 = 9$

المبدأ الثالث (مبدأ التضمين أو الاستقصاء)

وهو يرتبط بمناطق الاشتراك لعدة مجموعات (أحداث) ففي حالة مجموعتين عدد عناصر اتحاد F, E يساوي عدد عناصر اتحاد المجموعتين منقصاً منه عدد العناصر في منطقة اتحادهما(تقاطعهما) ويمكن أن تعمم إلى عدة مجموعات أو أحداث .

إذا كانت $(A_1, A_2, \dots \dots \dots A_n)$ مجموعات منتهية فإن:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}|A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1}\,|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

دالة العاملي:

تعريف:

إن جداء الأعداد الصحيحة الموجبة المتضمنة من ١ إلى n نرمز له بِـ $n!$ وندعوه n عاملي.

$$n! = n(n-1).(n-2) \dots .3 \times 2 \times 1$$

نلاحظ أن : $1! = 1$ ويصطلح أن $0! = 1$.

ملاحظة:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{9!}{9!} = \frac{12!}{3! \times 9!}$$

ونعمم إلى $\frac{n(n-1).(n-2)\dots.(n-r+1)}{r(r-1).(r-2)\dots 3\times 2\times 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

ونصطلح أن المقدار السابق يساوي $\binom{n}{r}$ أو nCr أو c_r^n

الذي يدل على اختيار r شيء من n شيئاً أي:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

نتائج:

١) $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ وذلك لأن $n - (n-r) = r$

مثال: $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}=10$

٢) $\binom{n}{0}=1$ ، ١) $\binom{0}{0}=1$

مثال: $\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8!}{2!\times 6!}=28$

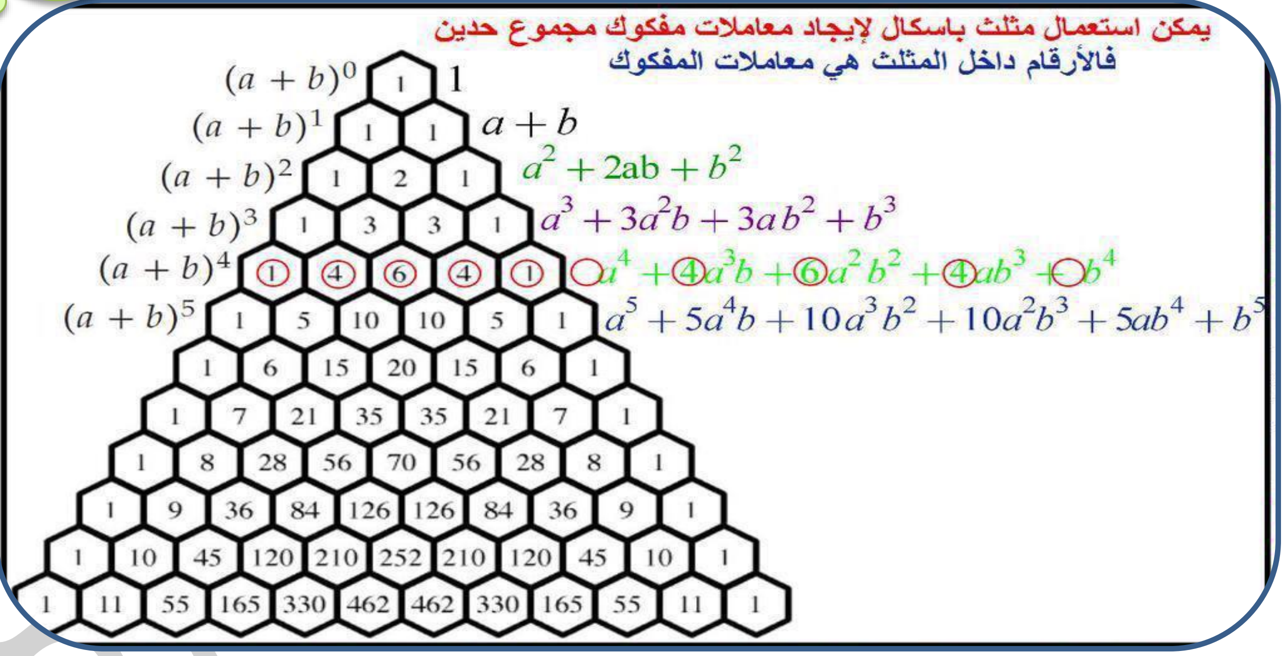
ملاحظة:

تدعى الأعداد $\binom{n}{r}$ أيضاً بمعاملات ثنائية الحد لأنها تظهر ظهوراً خاصاً كأمثال في مفكوك ثنائي الحد $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}.b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}.b+\cdots+\binom{n}{n-1}a.b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

كما أن أمثال القوة المتعاقبة يمكن ترتيبها في مصفوفة مثلثية تسمى مثلث باسكال.

مثلث باسكال



مثال: ما هو معامل الحد (أمثال الحد) $x^{12}\,y^{13}$ في المفكوك $(2x-3y)^{25}$

نطبق حسب الملاحظة السابقة :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$$

بوضع $n = 25, b = -3y, a = 2x$

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} (2x)^{25-k}(-3y)^k$$

في الحد الموافق لـ $k = 13$ يكون $\binom{52}{13}(2x)^{25-13}(-3y)^{13} = \binom{25}{13}(2)^{12}(-3)^{13}x^{12}y^{13}$

فيكون أمثال الحد $x^{12}y^{13}$ هو $\boxed{\binom{25}{13}(2)^{12}(-3)^{13}}$

وظيفة: برهن أن: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

ليكن لدينا : $a = 1$ و $b = 1$ عندئذٍ:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}.1^k$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

و.هـ.م

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – باسل أبو عيسى – سلام الخليل

المحاضرة الخامسة . 26/3/2019

المحتوى العلمي :

1_ تمارين .

2_ مطابقات .

3_ التباديل مع امثلة .

لنبدأ المحاضرة :

تمرين :

ليكن n عدد صحيح غير سالب ، برهن ان :

$$\sum_{K=0}^{n} (-1)^K \binom{n}{K} = 0$$

الحل : من اجل $a = 1$

$b = -1$

$$(1-1)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^K = 0^n$$

إذا اخذنا $K=0$:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots = 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

تمرين 2 : نفرض ان n عدد صحيح غير سالب ،

أثبت ان :

$$\sum_{K=0}^{n} 2^K \binom{n}{K} = 3^n$$

الحل :

من اجل $a = 1$ ، $b = 2$

عندئذ :

$$(1+2)^n = \sum \binom{n}{K} 1^{n-K} \cdot 2^K$$

$$3^n = \sum_{K=0}^{n} 2^K \binom{n}{K}$$

/ /

مطابقة باسكال:

نفرض n , K عددان صحيحان موجبان وكان $n \geq K$ فإن:

$$\binom{n+1}{K} = \binom{n}{K-1} + \binom{n}{K}$$

مطابقة فاندرموند..

نفرض n , m , r أعداد صحيحة غير سالبة وكان $r \leq n,m$ فإن.

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{K=0}^{n} \binom{m}{r-K}\binom{n}{K}$$

تمرين 3: إذا كان n عدد صحيح غير سالب فاثبت أن:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{n-K}\binom{n}{K} = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}^2$$

الحل:

من مطابقة فاندرموند من أجل $n=m=r$ ..

$$\binom{2n}{n} = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{n-K}\binom{n}{K} = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}^2$$

حيث:

$$\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$$

التباديل:

التبديل: هو تنظيم مجموعة ما مؤلفة من n عنصر حسب ترتيب معيّن (أخذ الكل كل مرة) وكذلك أي تنظيم لـ r من العناصر وفقه ترتيب معين يدعى r- تبديل.

وهو ترتيب n عنصراً بأخذ r عنصر منها كل مرة.

مثال:

باعتبار الحروف A, B, C, D

1. ACDB , DCBA , BDCA
هي تباديل لأربعة حروف مأخوذة كلها كل مرة.

2. DBC , ACB , BAD هي تباديل لأربعة حروف مأخوذة 3 منها كل مرة.

/ /

هي : AD , BC , CA ج
تباديل لأربعة حروف مأخوذ منها 2 منها كل مرة ..

• إن عدد التباديل لـ n عنصراً مأخوذ منها r عنصراً كل مرة يرمز
له بـ : $(n)_r$ أو $P(n,r)$
nP_r أو $P_{n,r}$

إن حساب التباديل يعطى بالعلاقة التالية :
$$P(n,r) = n(n-1)(n-2) \text{———} (n-r+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

ملاحظة : عدد المضاريب في الجداء هو r .

مثال : ما هو عدد التباديل m لستة حروف A,B,C,D,E,F :
مأخوذة منها ثلاثة في كل مرة ؟
أو (ما هي عدد الكلمات المكونة من 3 من الحروف الستة السابقة).
الحل :
الحرف الأول يمكن اختياره بـ 6 طرق .
الثاني " " بـ 5 طرق .
الثالث بـ 4 طرق .
وبالتالي : $m = 6 . 5 . 4 = 120$
أي هناك 120 تبديل لستة حروف مأخوذ منها 3 أي
$$P(6,3) = 6 . 5 . 4 = 120$$

نتيجة : إذا كان $n = r$ فإنه يوجد $n!$ تبديل لترتيب n عنصر مأخوذة
كلها في كل مرة .

مثال : كم تبديل يوجد لترتيب ثلاث حروف A,B,C
الحل : $m = 3 . 2 . 1 = 6$. عدد التباديل .

التباديل مع التكرار :

نريد غالباً معرفة عدد التباديل لمجموعات منفردة والتي تتكون من عدة عناصر من نوع واحد .

أي نريد حساب :

$$p(n;n_1,n_2,\ldots,n_r)$$

والذي يدل عدد تباديلها n عنصراً مختارة منها n_1 عنصراً من مرة و n_2 عنصراً من مرة و ... n_r عنصراً من مرة.

العلاقة العامة لهذه التباديل تعطى بالنظرية :

نظرية

نفرض $n, n_1, \ldots, n_r$ أعداد صحيحة غير سالبة و

$$n_1 + \ldots + n_r \leq n$$

فإن :

$$p(n;n_1,\ldots,n_r) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$

مثال : نريد تشكيل كل الكلمات المؤلفة من خمسة حروف مستخدمين حروف الكلمة : B A B B Y

يوجد $5! = 120$ تبديل للعناصر الخمسة

B_1, A, B_2, B_3, Y

حيث أن حروف B متباينة عن بعضها البعض نلاحظ أن التباديل الستة :

$B_1B_2B_3AY$, $B_2B_1B_3AY$, $B_3B_1B_2AY$

$B_1B_3B_2AY$, $B_2B_3B_1AY$, $B_3B_2B_1AY$

تشكل الكلمة نفسها ، وهذه النتائج الستة هي $3!$ كحقيقة.

وبالتالي فإن عدد الطرق $3! = 6$

المختلفة لتشكيل كلمة من خمسة حروف مشكلة من حروف كلمة هي :

$$p(5,3) = \frac{5!}{3!} = 20$$

تمرين :

أوجد العدد m لتشكيل كلمات من 7 حروف مستخدمين حروف كلمة .

BENZENE

الحل :

نوجد تباديل 7 حروف (عناصر) والتي فيها 3 مكرر مرة (الحرف E) و 2 مكرر مرة (الحرف N).

$$p(7;3,2) = \frac{7!}{3!2!} = 420.$$

انتهت المحاضرة ..

المحتوى العلمي:

- العينات المرتبة.
- التوافيق.
- تمارين.

العينات المرتبة.

1- السحب مع الإعادة:

نختار عناصر من مجموعة مؤلفة من n عنصر عددها r واحداً تلو الآخر مع إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة قبل أن يتم سحب العنصر الذي يليه.

وبالتالي عدد هذه السحوبات (حسب قاعدة الجداء)

$$\underbrace{n.n.n......n}_{r\ \text{مرة}} = n^r$$

2- السحب دون إعادة:

اختيار r عنصر من مجموعة مؤلفة من n عنصراً واحداً تلو الآخر ودون إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة قبل سحب العنصر الذي يليه.

في هذه الحالة يكون لدينا: r تبديلة.

$$p(n,r) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}_{r\ \text{مضروب}}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: اختير ثلاث ورقات من مجموعة أوراق اللعب الـ 52.

أوجد العدد m الدال على عدد طرق السحب للورقات الثلاث.

1- مع إعادة.

2- بدون إعادة.

3- الحل:

1- مع الإعادة: كل ورقة لعب يمكن سحبها في هذه الحالة بـ 52 طريقة

$$m = 52 . 52 . 52 = 140608$$

2- دون إعادة: الورقة الأولى يمكن سحبها بـ 52 طريقة أما الثانية بـ 51 والثالثة بـ 50 طريقة.

$$m = p(52,3) = 52 . 51 . 50 = 132600$$

/ /

التوافيق:

إذا كانت المجموعة S مؤلفة من n عنصراً فإن توافيق n عنصراً مأخوذة منها r عنصراً من n عنصراً دون النظر إلى الترتيب.

أو بمعنى أبسط هو عدد المجموعات الجزئية من S والتي تملك r عنصراً

ويرمز للتوافيق بالرمز. $C(n,r)$

أو nC_r

أو C^n_r.

مثال

أوجد عدد التوافيق بأربعة عناصر مأخوذة منها 3 في كل مرة.

$$C(4,3) = C^4_3 = \frac{n!}{r!(n-r)!} = 4$$

- وإن $P(4,3) = \frac{n!}{(n-r)!}$ وبالتالي:

$$C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!}$$

أي

$$C^n_r = \frac{P(n,r)}{r!}$$

أو $p(n,r) = C(n,r) \cdot r!$

مثال آخر: مزارع سيشتري 3 بقرات و 2 خروف و 4 دجاجة من رجل عنده 6 أبقار و 5 خراف و 8 دجاجات.

أوجد العدد m الدال على اختيارات المزارع؟..

الحل.

$$m = C^6_3 \cdot C^5_2 \cdot C^8_4$$

$$= \frac{6.5.4}{3.2.1} \cdot \frac{5\times4}{2.1} \cdot \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 20 \cdot 10 \cdot 70 =$$

$$= 14\,000$$

تمارين :

1- احسب . أ- $7!$, $8!$, $6!$ (واضح).

ب- احسب $50!$.

عشان $n = 50$ عدد كبير جداً .

بالنسبة للعاملي سنستخدم تقريباً يدعى . تقريب ستيرلنج وهو :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

$$50! \simeq \sqrt{2\pi 50} \; 50^{50} \cdot e^{-50}$$

$$= 3.04 \times 10^{64}$$

2- ~~[illegible]~~ أثبت أن :

$$\frac{(n+2)!}{n!} = n^2 + 3n + 2$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2)(n+1) =$$

$$= n^2 + 3n + 2$$

3- أثبت أن :

$$\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$$

الحل :

$$\cdot \binom{17}{6} = \frac{17!}{6! \; 11!}$$

$$\cdot \binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{16!}{5! \, 11!} + \frac{16!}{6! \cdot 10!}$$

$$= \frac{6 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} + \frac{11 \cdot 16!}{6! \cdot 11!}$$

$$= \frac{16! \, (6+11)}{6! \cdot 11!} = \frac{17!}{6! \cdot 11!} = \binom{17}{16}$$

4- أثبت مطابقة باسكال (واضحة).

/ /

5- نفرض أن صفاً في مدرسة مؤلف من 8 طلاب ذكور و 6 طالبات
أوجد العدد m الدال على عدد طرق إمكانية اختيار:
1- ممثل واحد للصف.
2- ممثلين للصف 1 ذكر و 1 أنثى.
3- رئيس للصف ونائب له.

الحل:

1- نستخدم هنا قاعدة الجمع:

$m = 8 + 6 = 14$

2- نستخدم قاعدة الضرب:

$m = C_1^8 \cdot C_1^6 = 8 \cdot 6 = 48$

3- $m = 14 \cdot 13 = 182$

6- يوجد أربعة خطوط للباصات بين A و B وثلاثة خطوط للباصات بين B , C.
أوجد m عدد طرق إمكانية سفر شخص بالباصات في الحالات التالية:
أ- من A إلى C مروراً بـ B.
ب- رحلة ذهاب وإياب من A إلى C مروراً من B.
ج- رحلة ذهاب وإياب من A ← C مروراً من B دون استخدام الباص أكثر من مرة.

الحل:

$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} C$

أ- $m = 4 \cdot 3 = 12$

ب- $m = 12 \cdot 12 = 144$

ج- $m = 12 \cdot 6 = 72$

7- أوجد m العدد الدال على عدد طرق تنظيم 7 أشخاص لا ينقسم:
أ- في صف من الكراسي.
ب- حول طاولة مستديرة.

الحل : أ- $m = 7! = 5040$ طريقة.

ب- $m = 6! = 720.$

ملاحظة:

هذا المثال يدلنا عدد التباديل الدائرية بشكل عام:
إن عدد طرق تنظيم n شيئاً بشكل دائري هو $(n-1)!$.

ع- أوجد العدد n إذا كان $p(n,2) = 72$

الحل:

$$p(n,2) = n(n-1) = n^2 - n = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

$$n = 9$$

$$n = -8 \quad \text{مرفوض}$$

بما أن n يجب أن يكون موجباً فإن الجواب الوحيد:

$$n = 9$$

المحاضرة السابعة .   2/4/2019

المحتوى العلمي :

• تمارين .

لنبدأ :

حل تمرين مطلقة : أثبت مطابقة باسكال؟

$$\overset{L_1}{\binom{n+1}{r}} = \overset{L_2}{\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}}$$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

نوحد المقامات :

$$= \frac{r.\,n!}{r\,(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{(n-r+1)\,r!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{r\,n! + (n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(r+n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)\,n!}{r!\,(n+1-r)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}$$

$$L_1 = L_2$$

و.ه.م .

تمرين ٩ : أوجد m العدد الدال على التباديل المختلفة التي يمكن تشكيلها من الكلمات

أ. THOSE   ب. UNUSUAL

ج. SOCIOLOGICAL

الحل :

أ. $m = 5! = 120$

ب. $m = \frac{7!}{3!} = 840$

ج. $m = \frac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!}$

$= 9979200$

/ /

تمرين ٣٥.

أوجد m العدد الدال على عدد اللجان المكونة من 5 أعضاء منها رئيس، بحيث اختيارهم من 12 شخصاً.

الحل.

بحيث اختيار الرئيس بـ 12 طريقة وباقي أعضاء اللجنة بـ :

$$C(11,4)=\binom{11}{4}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=330$$

وبالتالي فإن طرق اختيار أعضاء اللجنة هو:

$$m=12\times330=3960$$

تمرين ٤٢: يحوي صندوق على 8 جوارب زرقاء و 6 جوارب حمراء، أوجد عدد الطرق لاختيار جوربين من هذا الصندوق إذا كان.

أ- بحيث أن يكونان من أي لون.

ب- يجب أن يكون من اللون نفسه.

الحل.

أ-
$$m=\binom{14}{2}=\frac{14\cdot13}{2}=91$$

ب- اختيار جوربين من اللون الأزرق بحيث أن يكون بـ $\binom{8}{2}=28$ طريقة

ومن اللون الأحمر بـ $\binom{6}{2}=15$ طريقة.

وبالتالي اختيار جوربين من اللون نفسه هو:

$$m=\binom{8}{2}+\binom{6}{2}=28+15=43$$

تمرين ١٢، يوجد 12 طالب في صف ما. أوجد m العدد الدال على طرق إمكانية الطلاب اختيار ثلاثة امتحانات إذا اختار 4 طلاب منهم الدخول لكل الامتحانات ؟

الحل: هناك C(12,4) طريقة لدخول 4 طلاب الامتحان الأول.

وهناك C(8,4) طريقة لدخول 4 طلاب للامتحان الثاني

د. الباقون كلهم دخلوا الامتحان الثالث وبالتالي :

$$m = \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot 1 = 70 \times 495 = 34650$$

تمرين ١٤ :

ليكن لدينا :

1 8 28 56 70 56 28 8 1

وهو السطر الثامن من مثلث باسكال.

أوجد السطرين التاسع والعاشر؟!..

الحل :

1 8 28 56 70 56 28 8 1

السطر التاسع :

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

السطر العاشر :

1 10 45 120 210 256 210 120 45 10 1

المحتوى العلمي :

المجموعة .

الكافئة .

المتقدرات .

القوائم .

.. البنى في الرياضيات المتقطعة ..

المجموعة .. هي مجموعة من الأشياء لها ميزتين :

1. التكرار غير مسموح.   2. الترتيب غير مهم ..

لتكن A مجموعة ما فإن $P(A)$ هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من A .

ملاحظة : إن $P(\phi) = \{\phi\}$

بينما $P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$

• قدرة المجموعة A، هي عدد عناصر المجموعة A ويرمز لها بـ $|A|$.

لتكن A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n عندئذ :

$$|P(A)| = 2^n$$

مثال :

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

نلاحظ أن

$$|P(A)| = 2^3 = 8$$

العمليات على المجموعات :

• الاتحاد $A \cup B$ • التقاطع $A \cap B$

• الفرق $A - B$ • الإتمام A^c

• الفرق التناظري $A \triangle B$

/ /

الحافظة Bag :

هي مجموعة فيها التكرار مسموح و الترتيب غير مهم .

مثال :

العينة :

$$\Omega = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 1\}$$

الحافظة الخالية : $\phi = \{\ \}$

العمليات على الحافظة :

1. جمع الحافظات :

هو حافظة جديدة تتكون من التكرار عناصر الحافظتين أي إذا كان العنصر a موجود في الحافظة الأولى n مرة وفي الحافظة الثانية m مرة فهو موجود في مجموع الحافظتين n, m مرة .

مثال :

لتكن

$$A = [a, b, c, a, b]$$
$$B = [a, d, b]$$
$$C = [a, a, a, b, c, b]$$

إذن :

$$A + B = [a, b, c, a, b, a, d, b]$$

2. الاحتواء :

نقول إن الحافظة محتواة في الحافظة C إذا وفقط إذا كان كل عنصر من A موجوداً في C بعدد تكرارات أقل أو يساوي عدد تكراراته في C ، نلاحظ من المثال السابق أن $B \subseteq C$.

3. اتحاد الحافظات :

هي حافظة جديدة تضم عناصر الحافظتين لكن العنصر المتكرر x حيث بالتكرار الأكبر ما بين الحافظتين اللتين تشكلان الاتحاد .

مثال :

$$A \cup B = [a, a, b, b, c, d]$$

يعني أن $\max(n, m)$ حيث n عدد مرات تكرار x في A

m عدد مرات تكرار x في B

4- تقاطع الحافظات :
العناصر المشتركة بين الحافظات (الحافظتين) مع مراعاة أن العناصر المشتركة n
تكون بالعدد الأصغر $\min(n,m)$ في المثال السابقة

$$A \cap B = \{a, b\}$$

مثال آخر :
نفترض أن $p(n)$ تمثل الحافظة مثلاً للأعداد الأولية الناتجة عن تحليل العدد n

$$p(12) = \{2, 2, 3\}$$

$$p(54) = \{2, 3, 3, 3\}$$

$$p(12) \cap p(54) = \{2, 2, 3, 3, 3\} = p(108)$$

حيث 108 هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين

$$p(12) + p(54) = \{2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

نتيجة : من أجل عددين n, y فإن $p(n) \cap p(y)$ تمثل القاسم المشترك الأكبر للعددين n, y و $p(n), p(y)$ تمثل المضاعف المشترك الأصغر للعددين n, y حيث $p(n)$ هي حافظة الأعداد الأولية لـ n .

المتغيرات (المرتبات) :
التكرار فيها مسموح و الترتيب مهم مثلاً المتعدد :

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

أقرب مثال عن المتغيرات :
عناصر الجداء الديكارتي $A \times B = \{(a, b) ; a \in A, b \in B\}$
الجداء الديكارتي ليس تبديلياً "دعنا نعممه إلى عدد من المجموعات
إن الجداء الديكارتي $A \times B$ أو $B \times A$ هو مجموعة بينما عناصر
هاتين المجموعتين هما متغيرات .

مثال : $(I, a, salem)$ هو متعدد .
(s, a, l, e, m) هو متعدد b إذن الكلمات والنصوص هي
متعددات ..

/ /

مثال آخر:

المصفوفات هي متعددات . مثلاً المصفوفة:

$$X_{nn} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

متعدد كذلك.

$$X_{m\times n} = (x_1, x_2, x_3, \text{———}, x_m)$$

هي متعدد حيث:

$$x_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} , \quad x_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

تساوي المتعددات:

يتساوى متعددين عندما تتساوى الطولين وتكون العناصر المتقابلة متساوية

أي إذا كان:

$$x = (x_1, \text{———}, x_n)$$

$$y = (y_1, \text{———}, y_m) \qquad n = m$$

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad : i = 1, \text{———} n$$

القوائم < > Lists :

هي مجموعة مرتبة يسمح فيها بالتكرار بحيث يكون العنصر الأول من القائمة هو رأس القائمة وبقية العناصر هي ذيل القائمة..

مثال:

$$L = \langle a, 1, 2, 3 \rangle$$

$$Head(L) = a$$

$$Tail(L) = \langle 1, 2, 3 \rangle$$

ملاحظة

1. يمكن لعناصر القائمة أن تكون قوائم..
2. ذيل القائمة هو قائمة حذف منها العنصر الأول (رأس القائمة).
3. طول القائمة: هو عدد عناصر القائمة..

L	head(L)	Tail(L)
$\langle a, \langle b \rangle \rangle$	a	$\langle \langle b \rangle \rangle$
$\langle \langle a \rangle, \langle b, a \rangle \rangle$	$\langle a \rangle$	$\langle \langle b, a \rangle \rangle$
$\langle b, \langle \ \rangle \rangle$	b	$\langle \langle \ \rangle \rangle$ — قائمة خالية
$\langle \langle \ \rangle, a, b \rangle$	$\langle \ \rangle$	$\langle a, b \rangle$

العمليات على القوائم:

إنشاء:

إنشاء قائمة جديدة يكون بإضافة عنصر جديد للقائمة القديمة.

أمثلة:

$cons(w, \langle x, y, z \rangle) = \langle w, x, y, z \rangle$

$cons(a, \langle \ \rangle)$

$cons(This, \langle is, helptml \rangle)$

$= \langle this, is, helptml \rangle$

نتيجة:

$cons \langle head(L), tail(L) \rangle = L$

إضافة رأس القائمة إلى ذيل القائمة تنتج القائمة ذاتها.

المحتوى العلمي:

- تعريف العلاقة مع ملاحظات.
- صفات العلاقة على مجموعة.
- صف التكافؤ.

لنبدأ:

العلاقات

تعريف: نعرف العلاقة بين مجموعتين غير خاليتين X, Y بأنها ثلاثية من الشكل (X, Y, G) حيث

$$\phi \neq G \subseteq X \times Y$$

ونرمز لهذه العلاقة بالرمز R_G أو اختصاراً R.

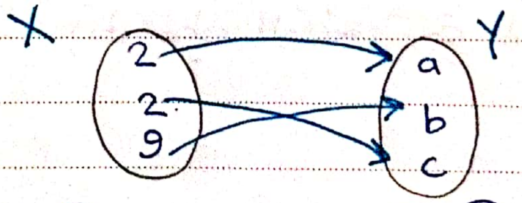
ندعو المجموعة X منطلق العلاقة والمجموعة Y مستقر العلاقة و G بيان العلاقة (أو قاعدة الربط). نقول إن العنصر $x \in X$ يرتبط بالعنصر $y \in Y$ ونرمز لذلك $x R_G y$ إذا كانت $(x,y) \in G$

ونمثل ذلك بالمخطط السهمي للعلاقة بإرسال سهم من x إلى y.

مثال1: لتكن العلاقة $R_G = (X, Y, G)$
حيث

$$Y = \{a, b, c\} \quad , X = \{2, 9\}$$

$$G = \{(2,a), (2,c), (9,a)\}$$



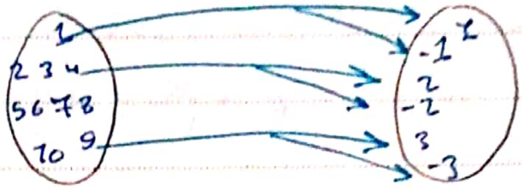
$$2 R_G c \quad , 9 R_G a \quad , 2 R_G a$$

مثال2: لتكن $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z}$ ولتكن العلاقة

$$R = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, G)$$

حيث R تعين لكل عدد طبيعي x عدداً صحيحاً من $\mathbb{Z}$ بحيث يكون $y^2 = x$

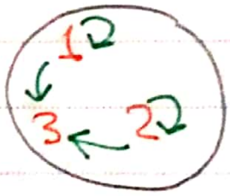
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : y^2 = x\}$$

$X = \mathbb{N}$  $Y = \mathbb{Z}$

حالات خاصة: أولاً: لتكن $R_G = (X, Y, G)$ علاقة من المجموعتين X, Y

تكون العلاقة من المجموعة نفسها إذا كان $X = Y$ ونكتب $R_G = (X, Y, G)$
$= (X, G)$

مثال:
إذا كانت $X = \{1, 2, 3\}$
$R_G = (X, X, G) = (X, G)$
$G = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3)\}$



ثانياً:
إذا كانت العلاقة R تحقق الشرط: من أجل كل عنصر x من X يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ يحقق $x R y$ فإننا نقول إن العلاقة R تحقق شرط التابع.
(في المخطط السهمي: كل عنصر من المنطلق ينطلق منه سهم وحيد).

ثالثاً: (X, Y, G)
إذا كانت العلاقة R تحقق شرط: من أجل كل عنصر $y \in Y$ فإنه يوجد عنصر واحد على الأقل $x \in X'$ يحقق أن $x R y$ عندئذ
إن العلاقة R تحقق شرط الغمر.
وهذا يكافئ أن كل عنصر في المستقر يصله سهم واحد على الأقل.

رابعاً:
إذا كانت العلاقة $R = (X, Y, G)$ تحقق الشرط: من أجل كل $x, x' \in X$ بحيث
$x R y$ و $x' R y$

/ /

عندئذ نقول إن العلاقة R تحقق شرط التباين يكافئ في المخطط السهمي أن كل عنصر في المستقر يصله سهم واحد على الأكثر.

مثال: إن العلاقة في المثال 1 لا تحقق شرط التابع ولا شرط العمر ولا شرط التباين بينما العلاقة في المثال 2 لا تحقق شرط التابع ولكن تحقق شرط التباين وشرط العمر.

ملاحظات:

1- إذا كانت العلاقة $R = (X, Y, G)$ تحقق شرط التابع فإننا ندعوها تابعة ونرمز لهذا التابع عادةً بالرمز f أو f_G ونكتب:

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto x R_G y = x f_G y$$

وبيان f هو:

$$G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

2- إذا كانت العلاقة R تحقق شرط التابع وشرط التباين فإننا ندعوها تابعاً متبايناً.

3- إذا كانت العلاقة R تحقق شرط التابع وشرط العمر فإننا ندعوه تابعاً غامراً.

4- إذا كانت العلاقة R تحقق شرط التابع وشرطي العمر والتباين فإننا ندعوها تابعاً تقابلاً.

" أي كل عنصر من المنطلق ينطلق منه سهم وحيد وكل عنصر في المستقر يصله سهم وحيد

مثال:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow +\sqrt{x}$$

علاقة تحقق شرط التابع والعمر والتباين.

/ /

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow |x|$$

علاقة تحقق شرط التابع ولكن لا تحقق شرطي الغمر والتباين.

صفات العلاقة في مجموعة.

تعريف:

لتكن $R = (X, X, G)$

$= (X, G)$ علاقة معرفة في مجموعة X.

حيث $G \subseteq X^2$ هو بيان العلاقة R.

ونرمز العلاقة R

1. انعكاسية: إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall x \in X \quad xRx.$

2. تناظرية: إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall x, y \in X : (xRy \Rightarrow yRx)$

3. متعدية: إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall x, y, z \in X :$
$(xRy, \; yRz \Rightarrow xRz)$

4. تخالفية: إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$

تعريف:

لتكن R علاقة معرفة في المجموعة X:

1. نقول عن R إن العلاقة تكافؤ في المجموعة X إذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتعدية وتناظرية.

2. نقول عن العلاقة R إنها علاقة ترتيب في المجموعة X إذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتعدية وتخالفية.

مثال: $X = \{1, 2\}$

$G = \{(1,1), (2,2), (2,1), (1,2)\}$

العلاقة R المعرفة في X بالشكل $R = (X, G)$

هي علاقة تكافؤ..

والأعداد الصحيحة مع "≤" أو الاحتواء تشكل علاقة ترتيب .

تعريف. لتكن (X,R) مجموعة مرتبة أي معرف عليها علاقة ترتيب نقول إن العنصرين $x,y \in X$ قابلان للمقارنة في X إذا كان xRy أو yRx أو نقول إن R هي علاقة ترتيب كلي على X إذا كان كل عنصران في X قابلان للمقارنة وفق تلك العلاقة.

تعريف.
لتكن $R_{G_1}=\{X, G_1\}$, $R_{G_2}=(X, G_2)$ علاقتين معرفتين على المجموعة X ، نقول إن العلاقة R_{G_1} أنعم من العلاقة R_{G_2} إذا كان $G_1 \subseteq G_2$.

تمرين 1.
لتكن X مجموعة غير خالية . أثبت أن علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب على $P(x)$ وهل هي علاقة ترتيب كلي ؟؟...

تمرين 2.
لتكن X هي مجموعة المثلثات في المستوي ، لنزود X بعلاقتين R, R' حيث أننا نقول عن مثلثين إنهما مرتبطين وفق العلاقة R إذا كانا متشابهين أثبت أن R ، R' هما علاقتي تكافؤ على X ؟ وأيهما أدق ؟..

تعريف صف التكافؤ.
لتكن X مجموعة غير خالية مزودة بعلاقة تكافؤ R .
نعرف المجموعات التالية :

$$[x]_R = \{y \in X : xRy\} \subseteq X$$

وذلك $\forall x \in X$

سنسمي $[x]_R$ صف تكافؤ العنصر x بالنسبة للعلاقة R

ونسميه أحياناً [x] صنفاً.
تكافؤ للمجموعة :

$$X/R = \{ [x] / x \in X \}$$

وهي مجموعة صفوف تكافؤ عناصر X .

المحاضرة العاشرة .. 16/4/2019

المحتوى العلمي :

- تمارين عن العلاقات .
- العلاقة المطابقة .
- العلاقة المعاكسة .

لنبدأ :

ليكن $X \neq \phi$ ، أثبت أن علاقة الاحتواء على $p(x)$ هي علاقة ترتيب هل هي علاقة ترتيب كلي ؟

الحل :

علاقة الاحتواء بين مجموعتين A, B ونرمز لها بـ $\subseteq$ تعرف كما يلي :

$A \subseteq B$ أي عنصر من A هو عنصر من B .

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

نريد أن نثبت أن " $\subseteq$ " هي علاقة ترتيب أي تحقق الصفات :

1- انعكاسية :

$A \in p(x)$ إن A تحقق :

$A \subseteq A$ لأن كل عنصر من A موجود في A وبالتالي :

$$\forall A \in p(x)$$

فإن A ترتبط بنفسها وفق العلاقة " $\subseteq$ " وهذه العلاقة تحقق شرط الانعكاسية .

2- متعدية :

ليكن A, B, C مجموعات من $p(x)$ بحيث تحقق :

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq C$$

وبالتالي أي عنصر من A موجود في B لأن :

$A \subseteq B$ لكن $B \subseteq C$ أي ~~عنصر~~ أن كل عنصر من B موجود بدوره في C وبالتالي تحقق $A \subseteq C$ وبالتالي " $\subseteq$ " هي علاقة متعدية .

3. تخالفية :

لتكن $A, B \in p(x)$ بحيث تحقق :

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

أي أن كل عناصر A موجودة في B وكل عناصر B موجودة في A

وبالتالي $A=B$ ، عندئذ تكون العلاقة " $\subseteq$ " تخالفية.
وبالتالي نستنتج ان علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب.
وان علاقة الترتيب هذه ليست بعلاقة ترتيب كلي لانه لو اخذنا
$a,b\in X$ حسب تعريف $P(x)$ يكون:
$\{a\},\{b\}\in P(x)$
لكن $\{b\},\{a\}$ لا يمكن المقارنة بينهما وفقه العلاقة " $\subseteq$ "
لأن $\{a\}\nsubseteq\{b\}$ و $\{b\}\nsubseteq\{a\}$
وبالتالي علاقة الترتيب ليست بعلاقة ترتيب كلي.

مثال آخر:
نلاحظ أننا نستطيع إثبات ان العلاقة اصغر أو يساوي " $\leq$ " هي علاقة ترتيب كلي على المجموعات $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$.

تمرين:
لتكن X هي مجموعة المثلثات في المستوي ، لنزود X بعلاقتين R ، R'
حيث نقول عن مثلثين إنهما مرتبطين وفقه العلاقة R إذا كانا متطابقين
ونقول عن مثلثين أنهما مرتبطين وفقه العلاقة R' إذا كانا متشابهين
أثبت ان R ، R' علاقتي تكافؤ ، وأيهما أدق.

الحل:

- R هي علاقة تطابقه المثلثات في المستوي.

1- انعكاسية
كل مثلث في X يتطابقه مع نفسه وبالتالي يرتبط مع نفسه وفقه R.

2- متعدية
إذا كان a,b,c مثلثات من المجموعة X.
وكان a يطابقه b وكان b يطابقه c فإن a و c أيضاً متطابقين.
وبالتالي العلاقة R متعدية لأن a ارتبط بـ c وفقه العلاقة R.

3- تناظرية
اذا كان a يطابقه b فإن b يطابقه a.
حيث b,a مثلثان من X وبالتالي العلاقة R تناظرية

/ /

ⵙ العلاقة R تحقق صفات الانعكاس والتعدي والتناظر
منه علاقة تكافؤ على X .

• R'

1- إن كل مثلث يشابه نفسه في X وبالتالي R' انعكاسية.
2- إذا كان a, b مثلثان من X وكان a يشابه b فإن b يشابه a أيضاً وبالتالي العلاقة R' تناظرية.
3- إذا كان a, b, c ثلاثة مثلثات في X وكان a يشابه b و b يشابه c .
حسب تعريف التشابه تتناسب أطوال أضلاع a مع c وتتساوى الزوايا وبالتالي a يشابه c .
ⵙ R' انعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي:
R' تشكل علاقة تكافؤ على X .
بما أن مجموعة المثلثات المتطابقة محتواة في مجموعة المثلثات المتشابهة أي أن
بيان العلاقة R محتوى في بيان العلاقة R' وبالتالي:
R أدق من R' .

العلاقة المطابقة:
إذا كانت العلاقة R معرفة على المجموعة X أي:
$R = (X, X, G)$ وكان بيان العلاقة مؤلفاً من كل الثنائيات من الشكل
(x, x) وذلك $\forall x \in X$ ،
عندئذ نقول إن R هي العلاقة المطابقة ونرمز لها بالرمز I_x أي بيانها:
$$G = \{(x, x) \; ; \; x \in X\}$$

مثال: $X = \{a, b, c, d\}$
وكانت R علاقة بيانها:
$$G = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$
عندئذ تكون $I_x = R$ العلاقة المطابقة على X

العلاقة المعاكسة لـ R :

إذا كانت $R = (X, Y, G)$ علاقة منطلقها X ومستقرها Y وبيانها G فإن العلاقة المعاكسة لـ R ونرمز لها R^{-1} هي علاقة منطلقها Y ومستقرها X وبيانها G^{-1} حيث :

$$G^{-1} = \{ (x,y) : (y,x) \in G \}$$

أي إذا كان x مرتبط بـ y وفق العلاقة R^{-1} فإن :
y كان مرتبطا بـ x وفق العلاقة R .

المحاضرة الحادية عشر.   22 / 4 / 2019.

تركيب العلاقات:

الهدف العملي:

مراجعة.

$$R=(X,G)$$
$$R=(X,X,G)$$
$$G_{I_X}=\{(x,y)\in X\times X : x=y\}$$
$$I_X=\{(x,x),\ \forall x\in X\}$$

$$R=(A,B,G)$$
$$R^{-1}=(B,A,G^{-1})$$
$$G^{-1}=\{(y,x) ; (x,y)\in G\}$$

مثال: لتكن $R=(\mathbb{N},\mathbb{N},G)$

$$G=\{(1,2),(2,3),(3,4),\dots\}$$

عندئذ فإن العلاقة المعاكسة:

$$R^{-1}=(\mathbb{N},\mathbb{N},G^{-1})$$

حيث:

$$G^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\dots\}$$

مبرهنة: لتكن X مجموعة ما غير خالية، ولتكن R علاقة على X عندئذ:

$$(R^{-1})^{-1}=R$$

البرهان

ليكن $(x,y)\in(G^{-1})^{-1}$ أي $x(R^{-1})^{-1}y$

و $(y,x)\in G^{-1}$

$(x,y)\in G \Leftarrow x\,R\,y$

$\Rightarrow \boxed{(R^{-1})^{-1}\subseteq R}$

ليكن $(x,y)\in G$ عندئذ:

$(y,x)\in G^{-1}$ وأيضاً:

$(x,y)\in(G^{-1})^{-1}$ وبالتالي $\boxed{R\subseteq(R^{-1})^{-1}}$

ومن الاحتواثين : $R = (R^{-1})^{-1}$

نتائج : R علاقة معرفة في المجموعة X.

1- إذا كانت العلاقة R انعكاسية فإن العلاقة R^{-1} انعكاسية

البرهان :

لكن R انعكاسية : $\forall x \in X$:

$$(x,x) \in G$$

$$\Rightarrow (x,x) \in G^{-1}$$

وبالتالي R^{-1} انعكاسية.

2- إذا كانت العلاقة R تناظرية فإن العلاقة R^{-1} تناظرية.

البرهان :

$\forall x,y \in X : (y,x) \in G^{-1} \Rightarrow (y,x) \in G$

لأن R تناظرية $\Rightarrow (x,y) \in G$.

العلاقة العكسية $\Rightarrow (y,x) \in G^{-1}$.

وبالتالي العلاقة R^{-1} تناظرية.

3- إذا كانت العلاقة R تخالفية فإن العلاقة R^{-1} تخالفية.

البرهان :

$\forall x,y \in X : (x,y) \in G^{-1} \wedge (y,x) \in G^{-1}$

$\Rightarrow (y,x) \in G \wedge (x,y) \in G$

وبما أن R تخالفية $\Leftarrow x = y$.

وبالتالي R^{-1} تخالفية.

4- إذا كانت العلاقة R متعدية فإن R^{-1} متعدية.

البرهان :

$\forall x,y \in X : (x,y) \in G^{-1} \wedge (y,z) \in G^{-1}$

$\Rightarrow (y,x) \in G \wedge (z,y) \in G$

وبالتالي فإن $(z,x) \in G$ لأن R متعدية

وهذا يعني $(x,z) \in G^{-1} \Leftarrow R^{-1}$ متعدية

نستنتج أن العلاقة تحافظ على صفات العلاقة:
فإذا كانت R علاقة تكافؤ على X تكون R^{-1} علاقة تكافؤ على X.
وإذا كانت R علاقة ترتيب على X تكون:
R^{-1} علاقة ترتيب على X أيضاً.

5- العلاقة المطابقة I_x على X. هي علاقة.

$$G_{I_x} = \{(x,x), (y,y), (z,z), \dots\}$$

انعكاسية وتناظرية ومتعدية وتخالفية.

مبرهنة: تكون العلاقة R المعرفة على X متناظرة إذا وفقط إذا كانت $R = R^{-1}$.

البرهان:

"$\Leftarrow$" لنفرض أن R علاقة تناظرية وبالتالي:

$$\forall (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$$

لنأخذ: R تناظرية.

حسب تعريف العلاقة العاكسة: $\Rightarrow (x,y) \in G^{-1}$

$$R \subseteq R^{-1}$$

$$\forall (x,y) \in G^{-1} \Rightarrow (y,x) \in G$$

R تناظرية $\Rightarrow (x,y) \in G$

إذاً: $R^{-1} \subseteq R$

وبالتالي: $R = R^{-1}$

"$\Rightarrow$"

لنفرض $R^{-1} = R$:

$$\forall x,y \in X: \quad R = R^{-1}$$

$$(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in G^{-1}$$

$$(y,x) \in G \Leftarrow$$ العلاقة العاكسة

R تناظرية.

/ /

مبرهنة:

R علاقة معرفة على المجموعة X الغير خالية فإن R تخالفية إذا وفقط إذا كان

$$G \cap G^{-1} \subseteq G_{I_X}$$

أو . $(R \cap R^{-1} \subseteq I_X)$

البرهان:

"⇐" لتكن R تخالفية ولتكن $(x,y) \in G \cap G^{-1}$

$\Rightarrow (x,y) \in G \wedge (x,y) \in G^{-1}$

$\Rightarrow (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G$

لكن بما أن R تخالفية:

$x = y$ ⇐

وبالتالي:

$(x,y) = (x,x) \in G_{I_X}$

$\Rightarrow G \cap G^{-1} \subseteq G_{I_X}$

$\Rightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_X$

"⇒"

لتكن $R \cap R^{-1} \subseteq I_X$ أي $G \cap G^{-1} \subseteq G_{I_X}$

ولنبرهن أن R تخالفية.

ليكن $(x,y) \in G \wedge (y,x) \in G^{-1}$

$\Rightarrow (x,y) \in G \wedge (x,y) \in G^{-1}$

$\Rightarrow (x,y) \in G \cap G^{-1} \subseteq G_{I_X}$

$\Rightarrow (x,y) \underset{\text{بيان العلاقة}}{\in} G_{I_X} \Rightarrow x = y$

وبالتالي R تخالفية.

مبرهنة:

إذا كانت R , S علاقتي تكافؤ على المجموعة X فإن تقاطعهما $R \cap S$ هي علاقة تكافؤ على X .

ملاحظة: $R \cap S$ هي علاقة بيانها هو تقاطع بياني كل من R و S أي بيانها هو $G_R \cap G_S$

/ /

البرهان:

1- $R \cap S$ تقاطعهما انعكاسية: إذا كانت R, S علاقتين تكافؤ فهما انعكاسيتان.

$\forall x \in X : (x,x) \in G_R \wedge (x,x) \in G_S$

$\Rightarrow (x,x) \in G_R \cap G_S$

وبالتالي $R \cap S$ تكون انعكاسية.

2- العلاقة $R \cap S$ تناظرية لأن:

$\forall x,y \in X : (x,y) \in G_R \cap G_S$

$\Rightarrow (x,y) \in G_R \wedge (x,y) \in G_S$

R تناظرية و S تناظرية. $\Rightarrow (y,x) \in G_R \wedge (y,x) \in G_S$

$\Rightarrow (y,x) \in G_R \cap G_S$

$\Rightarrow R \cap S$ تناظرية.

3- العلاقة $R \cap S$ متعدية لأن:

$\forall x,y,z \in X :$

$(x,y) \in G_R \cap G_S \wedge (y,z) \in G_R \cap G_S$

$\Rightarrow [(x,y) \in G_R , (y,z) \in G_R] \wedge [(x,y) \in G_S , (y,z) \in G_S]$

R متعدية و S متعدية. $\Rightarrow [(x,z) \in G_R] \wedge [(x,z) \in G_S]$

وبالتالي:

$(x,z) \in G_R \cap G_S$

وبالتالي: $R \cap S$ متعدية.

من 1 - 2 - 3 نجد أن:

$R \cap S$ علاقة تكافؤ.

تركيب العلاقات:

لتكن لدينا العلاقة $R = (X, Y, G_R)$ والعلاقة $S = (Y, Z, G_S)$

إن تركيب العلاقتين $S \circ R$ هي علاقة منطلقها منطلق R أي X ومستقرها مستقر S أي Z.

/ /

$S\circ R=(X,Z,G_S\circ G_R)$ حيث يكون :

$$G_S\circ G_R=\{(x,z)\in X\times Z,\ \exists y\in Y : (x,y)\in G_R\wedge (y,z)\in G_S\}$$

مثال : لتكن $X=\{1,2,3\}$ ولتكن $Y=\{a,b,c\}$

ولتكن :

$$Z=\{\square,\Delta,\circ\}$$

لتكن $R=(X,Y,G_R)$ حيث :

$$G_R=\{(1,a),(2,b)\}$$

ولتكن $S=(Y,Z,G_S)$ حيث :

$$G_S=\{(a,\square),(b,\Delta)\}$$

عندئذ يكون تركيب العلاقتين أي $S\circ R$ هي :

$$S\circ R=(X,Z,G_S\circ G_R)$$

$$G_S\circ G_R=\{(1,\square),(2,\Delta)\}$$

أي :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "R"'] \arrow[rr, bend right, "S\circ R"'] & Y \arrow[r, "S"'] & Z \end{tikzcd}$$

ملاحظة

إذا كانت R علاقة مجموعة X فإن :

$$I_X\circ R=R\circ I_X=R$$

البرهان :

ليكن : $\forall x,y\in X : (x,y)\in G_R\circ G_{I_X}$

$\Rightarrow \exists z\in X : (x,z)\in G_{I_X}\wedge (z,y)\in G_R$

$\Rightarrow x=z \wedge (z,y)\in G_R$

$\Rightarrow (x,y)\in G_R$

$\Rightarrow G_R\circ G_{I_X}\subseteq G_R$

أي : $\boxed{R\circ I_X\subseteq R}$

ليكن $(x,y)\in G_R$ ولدينا $(x,x)\in G_{I_X}$ وبالتالي حسب تعريف التركيب : $(x,y)\in G_R \wedge (x,x)\in G_{I_X}$

$(x,y) \in G_R \circ G_{I_X} \Rightarrow G_R \subseteq G_R \circ G_{I_X}$

$\Rightarrow \boxed{R \subseteq R \circ I_X}$

من الاحتوائين نجد:

$R \circ I_X = R$

وبشكل مشابه يمكن أن نثبت أن:

$I_X \circ R = R$

وظيفة:

أثبت أن:

$(S \circ S)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$