**مثال** : لنفرض أن $\mathcal{C}$ فئة المودولات اليسارية تحوي حلقة لواحدية $R$ وليكن $u : A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ (تشاكل مودولات) الشروط التالية متكافئة :

① $u$ مونومورفيزم.

② $u$ متباينة.

**الحل** :

$[(1) \Leftarrow (2)]$ : لنفرض أن $u$ مونومورفيزم ... لنفرض جدلاً أن $u$ ليست متباينة عندئذ $Ker(u) \neq 0$ لنفرض أن :

$$N = Ker(u) \in ob(\mathcal{C})$$

نواة التشاكل هو مودول جزئي

بما كان $u$ مونومورفيزم فإن التطبيق : $\alpha : \mathcal{C}(N, A) \to \mathcal{C}(N, B)$

من المنطلق

مجموعة التشاكلات من $N$ إلى $A$

المعرف بالشكل $\alpha(f) = u.f$ متباين ...

نعرف $v_1 : N \to A$ بالشكل

$\forall x \in N \ , \ v_1(x) = 0$

و $v_2 : N \to A$ بالشكل

$\forall x \in N \ ; \ v_2(x) = x$

أي نطبق عناصر النواة صورة صفرية

تحقق بالـ $u$ يعطي أي

$\forall x \in N : N = Ker(u)$

$\Rightarrow u(x) = 0$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "v_1", "v_2"'] & A \arrow[d, "u"] \\ & B \end{tikzcd}$$

وأن : $v_1 \neq v_2$

من جهة أخرى أياً كان $x \in N$ فإن :

$$u.v_1(x) = u(v_1(x)) = u(0) = 0$$

$$u.v_2(x) = u(v_2(x)) = u(x) = 0$$

ومنه فإن : $u.v_1 = u.v_2$

أي $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$

$\Leftarrow$ $v_1 = v_2$ وهو غير ممكن .

وبالتالي فإن $u$ متباين ...

Subject :                                    /    /

[(2) ⇐ (1)] : لنفرض أن $u$ متباين ولكن $X \in ob(\mathcal{C})$ بحيث أن

التطبيق : $\alpha : \mathcal{C}(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}(X, B)$

المعرف بالشكل $\alpha(f) = u . f$ ليس متباين..

عندئذ يوجد $v_1, v_2 \in \mathcal{C}(X, A)$ بحيث أن $v_1 \neq v_2$ و أن $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$

ومنه فإن $u . v_1 = u . v_2$ ومنه أياً كان $x \in X$ فإن :

$$u . v_1(x) = u . v_2(x)$$

$$u(v_1(x)) = u(v_2(x))$$

ولما كان $u$ متباين $\Leftarrow$ $v_1(x) = v_2(x)$

$\Leftarrow$ $v_1 = v_2$

وهذا غير ممكن .. ومنه $u$ مونومورفيزم

## الدوال

تعريف : ليكن $\mathcal{C}'$ و $\mathcal{C}$ فئتين نقول إنه يوجد لدينا دالي مباشر :

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ إذا كان لدينا :

1. تطبيق أشياء : $F : ob(\mathcal{C}) \longrightarrow ob(\mathcal{C}')$

(مقابل وحيد)

$\forall A \in ob(\mathcal{C})$ ; $A \longmapsto F(A)$

2. تطبيق مورفيزمات : (مورفيزم دالي بين فئتين)

① $F : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{C}')$

$(A \xrightarrow{u} B) \longmapsto (F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B))$

② ويمكن كتابته بالشكل : لأجل أي مورفيزم $u : A \longrightarrow B$ للفئة $\mathcal{C}$

يوجد تطبيق : $F_{AB} : \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}'(F(A), F(B))$

يحققان معاً :

1) $\forall A \in ob(\mathcal{C})$ ; $F(I_A) = I_{F(A)}$

Subject : ........ / /

2) $\forall f, g \in Mor(\mathcal{C})$

$F(f.g) = F(f).F(g) \Rightarrow$ مع المحافظة على الترتيب

تعريف: لتكن $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ فئتين نقول أنه لدينا دالي غير مباشر :

إذا كان لدينا: $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$

١- تطبيق أشياء : $F: ob(\mathcal{C}) \to ob(\mathcal{C}')$

$\forall A \in ob(\mathcal{C});\ A \mapsto F(A)$

٢- تطبيق مورفيزمات :

1) $F: Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{C}')$

$(A \xrightarrow{u} B) \mapsto (F(B) \xrightarrow{F(u)} F(A))$

بمعنى آخر: لأجل أي مورفيزم $u: A \to B$ للفئة $\mathcal{C}$ ②

يوجد تطبيق: $F_{A,B}: \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{C}'(F(B), F(A))$

يحققان معاً :

1) $\forall A \in ob(\mathcal{C});\quad F(I_A) = I_{F(A)}$

2) $\forall f, g \in Mor(\mathcal{C});$

$F(f.g) = F(g).F(f)$

مبرهنة : لتكن $\mathcal{C}$ فئة عندئذ لأجل كل $x \in ob(\mathcal{C})$ يوجد :

$\boxed{1}$ دالي مباشر

$h_x: \mathcal{C} \to Set's$

$\boxed{2}$ دالي غير مباشر

$\hat{h}_x: \mathcal{C} \to Set's$

البرهان :

1) لنعرف $\hat{h}_x : \mathcal{C} \longrightarrow Set's$ من خلال :

* تطبيق أشياء $h_x : ob(\mathcal{C}) \longrightarrow ob(Set's)$

معرف بالشكل $\forall A \in ob(\mathcal{C})$ فإن :

$$h_x(A) = \mathcal{C}(\underbrace{X, A}_{\text{مجموعة}})$$

$$A = B \Rightarrow \mathcal{C}(X, A) = \mathcal{C}(X, B)$$

* تطبيق مورفيزمات :

تطبيق بين مجموعات [illegible]

ليكن $\underline{u : A \to B}$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ ولنعرف :

$$h_x(u) : h_x(A) \longrightarrow h_x(B)$$

$$. \ \mathcal{C}(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}(X, B)$$

تصنيفه مجموعات مستقر

$$h_x(u)(v) = u.v$$

لنبرهن أنه تطبيق : $v_1 = v_2 \Rightarrow u.v_1 = u.v_2$

لندرس تحقق الشروط :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ X \arrow[u, "v"] \arrow[ur, dashed, "u.v"'] & \end{tikzcd}$$

P - ليكن $A \in ob(\mathcal{C})$ عندئذ :

$$h_x(I_A) : h_x(A) \longrightarrow h_x(A)$$

$$. \ \mathcal{C}(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}(X, A)$$

$$h_x(I_A)(v) = I_A . v = v$$

ومنه

$$h_x(I_A) = I_{\mathcal{C}(X,A)} = I_{h_x(A)}$$

ب - ليكن $v : B \to D$ و $u : A \to B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$ ومنه

$$v.u : A \longrightarrow D$$

$$h_x(v.u) : h_x(A) \longrightarrow h_x(D)$$

$$. \ \mathcal{C}(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}(X, D)$$

$\forall f \in \ell(x,A)$ ; $h_x(v.u)(f) = (v.u).f = v.(u.f)$.

ومطا كان $v : B \to D$ مورفيزم للفئة $\ell$ فإن:

$h_x(v) : h_x(B) \longrightarrow h_x(D)$

$: \ell(x,B) \longrightarrow \ell(x,D)$

$h_x(v)\,(u.f) = v(u.f)$

$h_x\,(v.u)(f) = h_x(v)\,(u.f)$

وبما كان $u : A \to B$ مورفيزم للفئة $\ell$ فإن:

$h_x(u) : h_x(A) \longrightarrow h_x(B)$

$: \ell(x,A) \longrightarrow \ell\, x(B)$

$h_x(u)(f) = u.f \implies$

$$h_x(v.u)(f) = h_x(v)\big(h_x(u)(f)\big) = \underbrace{h_x(v).h_x}_{\text{تطبيق}}(u)(f)$$

ومنه $h_x(v.u) = h_x(v).h_x(u)$

دالي مباشر

ج) لنعرف $\hat{h}_x : \ell \longrightarrow Set's$ من خلال:

* تطبيق أشياء $\hat{h}_x : ob(\ell) \longrightarrow ob(Set's)$.

معرف بالشكل: $\forall A \in ob(\ell)$: فإن:

$\hat{h}_x(A) = \ell(A,x)$

$A = B \implies \ell(A,x) = \ell(B,x)$

* تطبيق مورفيزمات:

ليكن $u : A \to B$ مورفيزم للفئة $\ell$ ولنعرف:

$\hat{h}_x(u) . \hat{h}_x(B) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$

$$: \mathcal{C}(B,X) \longrightarrow \mathcal{C}(A,X)$$

$$\hat{h}_x(u)(v) = v.u$$

نبرهن أنه تطبيق.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ X \arrow[u, "v"] \arrow[ur, dashed, "u.v"'] & \end{tikzcd}$$

$$v_1 = v_2 \Rightarrow u.v_1 = u.v_2$$

ندرس تحقق الشروط.

أ- ليكن $A \in ob(\mathcal{C})$ عندئذ:

$$\hat{h}_x(I_A) : \hat{h}_x(A) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: \mathcal{C}(A,x) \longrightarrow \mathcal{C}(A,x)$$

$\forall f \in \hat{h}_x(A)$ ؛

$$\hat{h}_x(I_A)(f) = f.I_A = f$$

ومنه.

$$\hat{h}_x(I_A) = I_{\mathcal{C}(A,X)} = I_{\hat{h}_x(A)}$$

ب- ليكن $v:B \to D$ و $u:A \to B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$ ومنه:

$$v.u : A \longrightarrow D$$

$$\hat{h}_x(v.u) : \hat{h}_x(D) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: \mathcal{C}(D,X) \longrightarrow \mathcal{C}(A,X)$$

$\forall f \in \mathcal{C}(D,X)$ ; $\hat{h}_x(v.u)(f) = f.(v.u) = (f.v).u$

وبما أن $u:A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ فإن:

$$\hat{h}_x(u) : \hat{h}_x(B) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: \mathcal{C}(B,X) \longrightarrow \mathcal{C}(A,X)$$

$$\hat{h}_x(u)(f.v) = (f.v)u$$

$$\hat{h}_x(v.u)(f) = \hat{h}_x(u)(f.v)$$

Subject : ........ / /

ومطالما كان $v:B \to D$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ فإن:

$$\hat{h}_x(v) : \hat{h}_x(D) \longrightarrow \hat{h}_x(B)$$

$$: \mathcal{C}(D,X) \longrightarrow \mathcal{C}(B,X)$$

$$\hat{h}_x(v)(f) = f.v \Rightarrow$$

$$\hat{h}_x(v.u)(f) = \hat{h}_x(u)(\hat{h}_x(v)(f).)$$

$$= \hat{h}_x(u).\hat{h}_x(v)(f)$$

ومنه: $\hat{h}_x(v.u) = \hat{h}_x(u).\hat{h}_x(v)$

دالي غير مباشر..

ملاحظة:

أثبت أن تركيب داليين مباشرين هو دالي مباشر

$$\mathcal{C}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{C}_3$$

F و G دوال مباشرة (أو غير مباشرة)