

مثال: لنفرض أن الفئة المودولات ليانية فوق حلقة لواحدية R وليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{L}$  (تشاكل مودولات)

لشروط التالية متكافئة:

①  $u$  مورفيزم

②  $u$  متباينة

المطلوب:

[(1)  $\Leftrightarrow$  (2)]: لنفرض أن  $u$  مورفيزم... لنفرض جدها أن  $u$  ليست

متباينة عندئذ  $\text{Ker}(u) \neq 0$  لنفرض أن:

$$N = \text{Ker}(u) \in \text{ob}(\mathcal{L})$$

كقوة لتشكل مورفيزم جزئي

بما كان  $u$  مورفيزم فإن التطبيق  $\alpha: \mathcal{L}(N, A) \rightarrow \mathcal{L}(N, B)$  من المطلق

مجموعة التشاكلات من  $N$  إلى  $A$

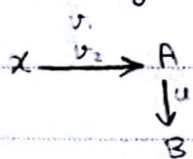
المعرف بالشكل  $\alpha(f) = u \circ f$  متباينة

أي شكلين العدة هو تروية تعرف  $\psi_1: N \rightarrow A$  بالشكل

$$\forall x \in N, \psi_1(x) = 0$$

و  $\psi_2: N \rightarrow A$  بالشكل

$$\forall x \in N, \psi_2(x) = x$$



و أن:  $\psi_1 \neq \psi_2$

من جهة أخرى أي كان  $x \in N$  فإن:

$$u \cdot \psi_1(x) = u(\psi_1(x)) = u(0) = 0$$

$$u \cdot \psi_2(x) = u(\psi_2(x)) = u(x) = 0$$

وضه فإن:  $u \cdot \psi_1 = u \cdot \psi_2$

أي  $\alpha(\psi_1) = \alpha(\psi_2)$

$\Leftarrow \psi_1 = \psi_2$  وهو غير ممكن

وبالتالي فإن  $u$  متباينة...

Subject :

1 1

[ (2)  $\Leftrightarrow$  (1) ] : نفرض أن  $u$  متباين وليكن  $x \in \text{ob}(\mathcal{L})$  بحيث أن

التطبيق :  $\alpha: \mathcal{L}(x, A) \rightarrow \mathcal{L}(x, B)$

المعرف بالشكل  $\alpha(f) = u \circ f$  ليد متباين ...

عندئذ يوجد  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(x, A)$  حيث أن  $\psi_1 \neq \psi_2$  وأن  $\alpha(\psi_1) = \alpha(\psi_2)$

وهذه بيان :  $u \circ \psi_1 = u \circ \psi_2$  ومنه أيضاً كان  $x \in X$  :

$$u \circ \psi_1(x) = u \circ \psi_2(x)$$

$$u(\psi_1(x)) = u(\psi_2(x))$$

ولما كان  $u$  متباين  $\Leftrightarrow \psi_1(x) = \psi_2(x)$

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \leftarrow$$

وهذا غير ممكن ... ومنه  $u$  مورفيزم.

## الردود

تعريف : ليكن  $\mathcal{L}$  و  $\mathcal{L}'$  فئتين نقول إنه يوجد لدينا دالي مباشر :

$F: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  إذا كان لدينا :

1- تطبيق الأشياء :  $F: \text{ob}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{L}')$

$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L})$  :  $A \mapsto F(A)$  (تقاله وهد)

2- تطبيق مورفيزمات : (مورفيزم دالي بين فئتين)

$$\textcircled{1} \quad F: \text{Mor}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{L}')$$

$$(A \xrightarrow{u} B) \mapsto (F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B))$$

3- يمكن تسميته بالشكل : كل زوج مورفيزم  $u: A \rightarrow B$  للفئة  $\mathcal{L}$

يوجد تطبيق :  $F_{AB}: \mathcal{L}(A, B) \rightarrow \mathcal{L}'(F(A), F(B))$

يفتان معاً :

$$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}) \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

Subject: \_\_\_\_\_

/ /

$$2) \forall f, g \in \text{Mor}(\mathcal{C})$$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \Rightarrow \text{معجمانطة هي لترتيب}$$

تعريف: لتكن  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  فئتين نقرر انهن لئينا دالي غير مباشر:

$$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

$$1. \text{ تطبيق اشیاء: } F: \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{C}')$$

$$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{C}); A \mapsto F(A)$$

c. تطبيق مورفيزمان:

$$d) F: \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C}')$$

$$(A \xrightarrow{u} B) \mapsto (F(B) \xrightarrow{F(u)} F(A))$$

يكنه لنا تغير كمال آخر لا اجل اي مورفيزم  $u: A \rightarrow B$  لئينا  $\mathcal{C}$

$$F_{A,B}: \mathcal{C}(A,B) \rightarrow \mathcal{C}'(F(B), F(A))$$

عقوان معاً:

$$1) \forall A \in \text{ob}(\mathcal{C}); F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$2) \forall f, g \in \text{Mor}(\mathcal{C}); -$$

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

مبرهنة: لتكن  $\mathcal{C}$  فئة عندئذ لا اجل كل  $x \in \text{ob}(\mathcal{C})$  يوجد:

□ دالي مباشر

$$h_x: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set's}$$

□ دالي غير مباشر

$$\hat{h}_x: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set's}$$

Subject :

البرهان :

(1) لتفرد  $h_x: \mathcal{L} \rightarrow \text{Set's}$  من خلال :

$h_x: \text{ob}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$  تطبيقاً أشياء  
معرف بالشكل  $\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L})$  فإن :

$$h_x(A) = \mathcal{L}(x, A)$$

$$A=B \Rightarrow \mathcal{L}(x, A) = \mathcal{L}(x, B)$$

تطبيقاً مورفزمات  
تطبيقاً مورفزمات

ليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفزم للفتة  $\mathcal{L}$  والتفرد :

$$h_x(u): h_x(A) \rightarrow h_x(B)$$

$$\mathcal{L}(x, A) \rightarrow \mathcal{L}(x, B)$$

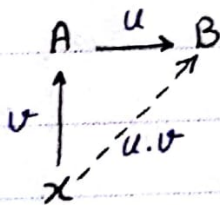
تطبيقاً  
مورفزمات  
تطبيقاً

$$h_x(u)(v) = u \cdot v$$

$$u_1 = u_2 \Rightarrow u \cdot v_1 = u \cdot v_2$$

لتبرهن أنه تطبيق :

لتفرد وفقاً للشرط :



P - يمكن  $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$  عندئذ :

$$h_x(I_A): h_x(A) \rightarrow h_x(A)$$

$$\mathcal{L}(x, A) \rightarrow \mathcal{L}(x, A)$$

$$h_x(I_A)(v) = I_A \cdot v = v$$

منه

$$h_x(I_A) = I_{\mathcal{L}(x, A)} = I_{h_x(A)}$$

ن - ليكن  $u: A \rightarrow B$  و  $v: B \rightarrow D$  مورفزمين للفتة  $\mathcal{L}$  منه :

$$v \cdot u: A \rightarrow D$$

$$h_x(v \cdot u): h_x(A) \rightarrow h_x(D)$$

$$\mathcal{L}(x, A) \rightarrow \mathcal{L}(x, D)$$

Subject: \_\_\_\_\_

1 1

$$\forall f \in \mathcal{P}(x, A) ; h_x(\sigma \cdot u)(f) = (\sigma \cdot u) \cdot f = \sigma \cdot (u \cdot f)$$

ومما كان  $\sigma: B \rightarrow D$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{P}$  بيان:

$$h_x(\sigma): h_x(B) \rightarrow h_x(D)$$

$$: \mathcal{P}(x, B) \rightarrow \mathcal{P}(x, D)$$

$$h_x(\sigma)(u \cdot f) = \sigma(u \cdot f)$$

$$h_x(\sigma \cdot u)(f) = h_x(\sigma)(u \cdot f)$$

ومما كان  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{P}$  بيان:

$$h_x(u): h_x(A) \rightarrow h_x(B)$$

$$: \mathcal{P}(x, A) \rightarrow \mathcal{P}(x, B)$$

$$h_x(u)(f) = u \cdot f \Rightarrow$$

$$h_x(\sigma \cdot u)(f) = h_x(\sigma)(h_x(u)(f))$$

$$= h_x(\sigma) \cdot h_x(u)(f)$$

$$h_x(\sigma \cdot u) = h_x(\sigma) \cdot h_x(u) \quad \text{دالة تطبيقية}$$

دالة مباشرة

ع) لنفرض  $\hat{h}_x: \mathcal{P} \rightarrow \text{Set's}$  من خلال:

\* تطبيق الأشياء  $\hat{h}_x: \text{ob}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$ .

معرف الشكل:  $\forall A \in \text{ob}(\mathcal{P})$  بيان:

$$\hat{h}_x(A) = \mathcal{P}(A, x)$$

$$A = B \Rightarrow \mathcal{P}(A, x) = \mathcal{P}(B, x)$$

\* تطبيق مورفيزمان:

ليكن  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{P}$  ولنفرض:

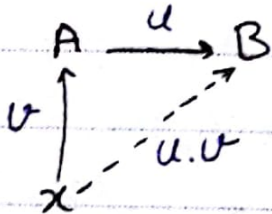
$$\hat{h}_x(u): \hat{h}_x(B) \rightarrow \hat{h}_x(A)$$

Subject:

$$: \mathcal{L}(B, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\hat{h}_x(u)(\psi) = \psi \cdot u$$

نبرهن انه تطبيق:



$$\psi_1 = \psi_2 \Rightarrow u \cdot \psi_1 = u \cdot \psi_2$$

لذلك هي تحقق الشروط:

P - يمكن ان  $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$  عندئذ:

$$\hat{h}_x(I_A): \hat{h}_x(A) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: \mathcal{L}(A, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall f \in \hat{h}_x(A);$$

$$\hat{h}_x(I_A)(f) = f \cdot I_A = f$$

ومنه:

$$\hat{h}_x(I_A) = I_{\mathcal{L}(A, X)} = I_{\hat{h}_x(A)}$$

د - ليكن  $u: A \rightarrow B$  و  $\psi: B \rightarrow D$  مورفيزمين للفضة P ومنه:

$$\psi \cdot u: A \rightarrow D$$

$$\hat{h}_x(\psi \cdot u): \hat{h}_x(D) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: \mathcal{L}(D, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(D, X); \hat{h}_x(\psi \cdot u)(f) = f(\psi \cdot u) = (f \cdot \psi) \cdot u$$

وبما ان  $u: A \rightarrow B$  مورفيزم للفضة P بان:

$$\hat{h}_x(u): \hat{h}_x(B) \longrightarrow \hat{h}_x(A)$$

$$: \mathcal{L}(B, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\hat{h}_x(u)(f \cdot \psi) = (f \cdot \psi) \cdot u$$

$$\hat{h}_x(\psi \cdot u)(f) = \hat{h}_x(u)(f \cdot \psi)$$

Subject :

1 1

وكان  $U: B \rightarrow D$  مورنيتم للفتة  $P$  بيان:

$$\hat{h}_x(U): \hat{h}_x(D) \rightarrow \hat{h}_x(B)$$

$$: P(D, x) \rightarrow P(B, x)$$

$$\hat{h}_x(U)(f) = f \cdot U \Rightarrow$$

$$\hat{h}_x(U \cdot U)(f) = \hat{h}_x(U)(\hat{h}_x(U)(f))$$

$$= \hat{h}_x(U) \cdot \hat{h}_x(U)(f)$$

$$\hat{h}_x(U \cdot U) = \hat{h}_x(U) \cdot \hat{h}_x(U) \quad \text{منه}$$

دالي غير مباشر

ملاحظة

أثبتت أن تركيب دالين مباشرين هو دالي مباشر

$$P_1 \xrightarrow{F} P_2 \xrightarrow{G} P_3$$

$F$  و  $G$  دوال مباشرة (أو غير مباشرة)